This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

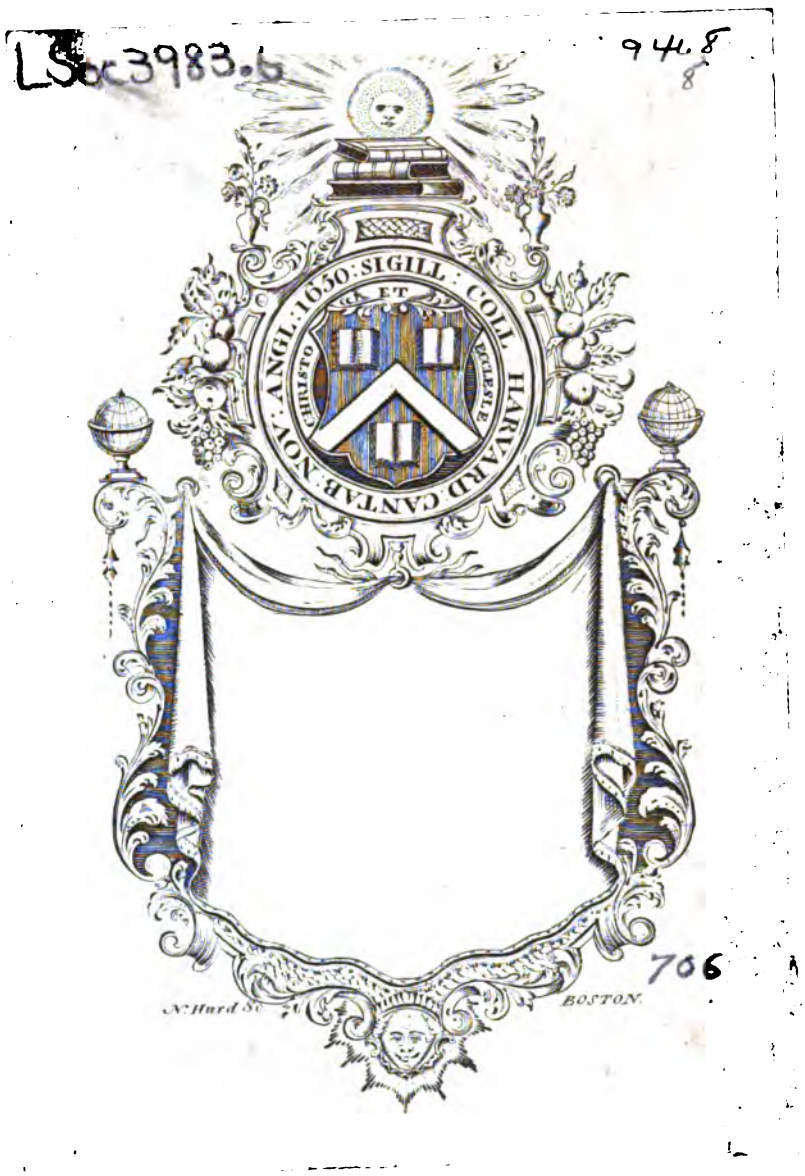
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

L Soc 3983.6


LSoc 3983.6
94.8
8
SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650
CHRISTO ET ECCLESIÆ
706
N. Hurd Sc.
BOSTON.

Гравд: Иванъ соколовъ при Академіи наукъ и Художествъ С: Петербургъ

St. Petersburg, Russia — Académie des Sciences.

NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. I.

ad Annum MDCCXLVII. et MDCCXLVIII.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCL.

LSoc 3983.6

HARVARD UNIVERSITY LIBRARY

9468
53.43
4.13

SVMMARIVM
DISSERTATIONVM
QVAS CONTINET
NOVORVM COMMENTARIORVM
TOMVS I.

Quae a PETRO MAGNO, immortalis memoriae Imperatore, anno MDCCXXIV. fundata, et a dilectiſſima Tori Socia, Eiusque in Imperio Succeſſore, Clementiſſima CATHARINA a. MDCCXXV. inſtaurata erat Academia Imperialis Scientiarum Petropolitana; ea tandem a. MDCCXLVII. a paternarum virtutum Herede, feliciter hodie toti Ruſſiae imperante, ELISABETA AVGVSTA, *Deliciis generis humani*, praeclaris legibus lautoque ſtipendio munificentiſſime ornata, aucta et firmata eſt.

Iudicauerat ſcilicet prouida *Patriae Mater*, veſtigiis Auguſtiſſimorum Parentum inſiſtens, ad ſcientias et artes in vaſtiſſimo totius orbis Imperio prouehendas, omnino opus eſſe, vt conſeruetur eiusmodi ſocietas eruditorum virorum, qui illas nouis inuentis ditare, ab aliis inuenta examinare et perficere, veraque a falſis ſeparare, denique cauere poſſint, ne ſumtus in res penitus inutiles, aut impoſſibiles impendantur, hosque coniunctis viribus longe maiores facere poſſe progreſſus, quam quidem a ſingulis, tametſi praeſtantiſſimis, exſpectari debeant.

Eiusmodi autem ſocietas ſtatutis et ſanctionibus convenientibus vel ideo munienda fuerat, vt vnusquisque ſodalium, quid a ſe requiratur aut ſibi agendum ſit, perſpectum haberet.

Operae ergo pretium visum est, praeclara haec statuta antea exponere, quam de argumento dissertationum in *Nouis Commentariorum* tomis digestorum, fusius verba faciamus.

Paucis tamen antea lector monendus est, omnes dissertationes, quae ad praecedentes Commentariorum tomos vsque ad annum MDCCXLVI. spectant, iam sub prelo fudare, et illis coronidem imposituras esse: hunc autem et sequentes tomos *Nouorum Commentariorum* nomine ideo venire, quia Academia nunc nouis legibus instructa est, et classes hic aliter, ac in praecedentibus tomis fieri solebat, dispositae inueniuntur. Scilicet noua haec volumina, mathematico-physicis meditationibus, exclusis, quae ad classem historicam pertinent, disquisitionibus, potissimum dicata sunt. Hinc classis prima horum *Nouorum Commentariorum*, quae *Matheſin* proprie spectant, complectitur; altera *physico-mathematica*, quae ad Physicam experimentalem et Mechanicam pertinent, comprehendit; tertia *physica*, anatomicas, botanicas et chemicas exhibet dissertationes, et quarta denique *astronomica*, quae ob rationem pag. 466. Tom. I. Comm. allatam, ad finem cuiusque Tomi *Nouorum Commentariorum* reiicietur, obseruationes potissimum sistit astronomicas.

Nec silentio praetereundum est, recensiones has, quae forte nonnullis iusto longiores videbuntur, indigenarum huius Imperii caussa potissimum typis mandatas esse, vt eo melius intelligat proficiendi cupidissima Natio, quid dissertationum harum auctores ad incrementum scientiarum conferre studuerint.

IN-

INSTITVTA ACADEMICA

EDICTVM

IMPERATORIAE MAIESTATIS SENATVI PROPOSITVM DE REBVS ACADEMICIS.

Immortalis memoriae AVGVSTA, dilectiſſima noſtra *Parens*, *Domina* atque *Imperatrix* CATHARINA ALEXIAS omnium, qui Imperio EIVS ſubiecti fuerant, commodis materno amore atque cura proſpiciens, cupiensque perficere, quae *Parens Noſter* Deſideratiſſimus PETRVS MAGNVS animo complexus fuerat ingentia molimina, inſtituit erudiendorum populorum ſuorum cauſa Academiam Scientiarum, cui non longo poſt interuallo, quam tutelam Imperii Ruſſici ſuſceperat, ſummam a PETRO MAGNO conſtitutam viginti quatuor millium nongentorum et duodecim rubellorum repraeſentari iuſſit.

At quum Dominus atque *Parens Noſter* in animo habuerit huic et Academiam artium, ſine qua maturiores ab ipſa ſcientiarum Academia vix ſperare licet fructus, coniungere, (quae res paullatim inſtituta auctaque Imperio haud aſpernandos Noſtro fructus tulit) cui tamen Academiae artium ſuſtinendae atque perficiendae nondum, quae debet, ſumma conſtituta eſt, Nos, quibus ſalus populorum Noſtrorum et artium incrementa curae ſunt, ſcopum, quem ſibi propoſuerant Parentes Noſtri, tenendum tuendumque ſuſcepimus: Itaque ſummae ſupra memoratae clementiſſime iubemus adiici octo et viginti millia rubellorum, trecentos et octoginta ſex, tuendae Academiae artium, et ornando augendoque cimeliophylacio atque bibliothecae Noſtrae. Ex quo adparet, ſummam vniverſam, quae impenditur quotannis tolerandis ſumtibus vtriuſque quum ſcien-

tiarum

tiarum tum artium Academiae, nec non Vniuerſitatis, (quae quidem ſumma ex curia reditus Imperii Noſtri diſpenſante tranſſcribenda eſt) eſſe quinquaginta trium millium, ducentorum ét nonaginta octo rubellorum; eam autem pecuniam ſecundum tenorem libelli, qui ſtatum continet academicum, quem quidem Nos clementiſſime adprobauimus, adminiſtrari iubemus. Ac ne doctis viris in exſoluendis ſalariis mora aliqua interiiciatur, volumus ac iubemus clementiſſime, vt iſta pecunia ſemper, quum eam popoſcerit Academiae Praeſes, aut illo abſente Cancellaria academica, nulla interpoſita mora erogetur. Quibus autem modis ſeſe academici viri et in reliquis rebus gerere debeant, monſtrabunt leges academicae, quas quidem Nos clementiſſime comprobauimus.

Quocirca omnes qui Noſtro Imperio ſubiecti ſunt, quum generoſi, tum

cete-

ceteri, cuiuscunque demum ſint conditionis atque ordinis, ſolis capite cenſis exceptis, admonentur, ne negligant neue vereantur liberos ſuos atque neceſſarios Academiae tradere, inſtruendos liberalibus artibus atque doctrina ciuilium rerum, quo Nobis et reipublicae fiant vtiliores. Imbuentur autem iis artibus, earumque ſcientia rerum, ad quas quemque naturalis fert propenſio, nullam inſtitutionis ſoluturi mercedem, cautione tamen ea, vt alimenta et ceteras neceſſitates ſibi proſpiciant ipſi. Senatum autem Noſtrum volumus mandatum hoc Noſtrum curare diligenter.

Tabulis authenticis *Imperatoria Maieſtas* ſubſcripſit nomen infra poſitum

ELISABETA.

Villa regia, a. 1747. Iul. 24.

LEGES

LEGES
IMPERATORIAE SCIENTIARVM ET ARTIVM ACADEMIAE PETROPOLITANAE.

Longam de vtilitate liberalium disciplinarum et artium in regnis rebusque publicis instituere orationem superuacaneum videtur; neque tamen alienum fuerit docere, qua potissimum via eae tractari et in patriae commodum conuerti debeant. PETRVS *Magnus* glorioſissimus *Ille* Russorum *Imperator*, iam suo aeuo ad vtramque, quum sublimiorum disciplinarum tum ingenuarum artium, Academiam formandam, animum adpulit, et quae de instituenda Scientiarum Academia proposita fuerant, publica auctoritate sanciuit, dilato interim Academiae artium stabiliendae consilio. Ceterum auspiciis glorioſissimae Russorum *Imperatricis* CATHARINAE, etsi fundamenta satis firma vtrique proposito tenendo videbantur posita, tamen nondum tanto satis dignos instituto vel Scientiarum vel artium Academia tulit fructus, legum videlicet ignara, necdum certa formula constituta, quid cuique sequendum, quidue fugiendum, quaenam cuiusque conditio, quiue aut quanti sumtus in quemque erogandi essent. Quibus incommodis haud dubie PETRVS *Imperator*, ac post Eum CATHARINA *Imperatrix* obuiam issent ipsi, nisi morte praeuenti fuissent.

ACADEMIA DVAS CONTINET CLASSES, QVARVM ALTERA SVO SIBI NOMINE ACADEMIA, ALTERA NOVO VOCABVLO VNIVERSITAS ADPELLATVR.

1.

Superiore significatione Academia est coetus doctorum hominum, qui de rerum natura et effectibus omnium, quae sunt in hoc Vniuerso corporum, inquirere, et quae ipsi norunt, aliis demonstrare, denique maturiores ingenii foetus in lucem edere satagunt. Igitur dignus Academia vir non contentus est cognitione rerum iam inuentarum, progreditur vlterius, praeclari alicuius inuenti auctor ipse, vel certe particeps. Ex quo adparet, academicos viros indefesso studio teneri vel adnotandi, quae sunt memoratu digna, vel legendi idoneos scriptores, vel componendi libros. Neque vero, qui se totum in hac cura consumserit, erudiendae vacare potest iuuentuti. Sunt igitur Academici, docendi muneris expertes, nisi si quos habeant penes se Adiunctorum vocabulo insignitos, aut studiosos peculiari suae curae traditos: sunt item Professores Vniuersitatis, qui docendi munus sustinent; de quibus inferius, quum de Vniuersitate sermo erit, agetur. Ceterum si necessitas exigat, non alienum existimabit ab instituto Academicus, et Vniuersitati operam suam commodare; modo ne talis cura eum ab aliis iisque grauioribus negotiis auertat. Iudicium et cura totius negotii penes Academiae Praesidem esto.

2.

Nemo est, opinor, qui infitias ire audeat, homines peritos cursus coelestium corporum, et nauigationis et Geogra-

graphiae, quum terrarum orbis, tum patriae ſuae, cuiuis regno magno eſſe et adiumento et ornamento. Igitur in republica academica prima claſſis eſt Aſtronomorum et Geographorum. Sunt enim ii, quorum ex ſcholis prodire ſolent rerum maritimarum peritiſſimi, qui non ſolum terraſque tractusque maris, coelumque profundum deſcribere, ſed et interdum vincula rerum perrumpere, nouoſque, ſi fortuna adſit, nobili auſu et felici ſucceſſu detegere orbes queant.

3.

Quamuis Ruſſorum Imperium ſolum habeat herbis, plantis, lapidibus, ſalibus, metallis gignendis prae aliis terris longe fecundiſſimum, atque adeo multa quum in viſceribus, tum in ſuperficie terrae deprehendantur, quibus curioſi naturalium rerum inueſtigatores ingenia exercere poſſint; tamen multo maxuma hominum pars earum rerum, quarum vberem nobis largitur prouentum, nomina et adpellationes, nedum virtutes et efficacitates ſatis nouit. Igitur opus eſt alia claſſe Phyſicorum, quae quidem conſtabit Botanico eodemque rerum naturalium inueſtigatore hiſtorico, Anatomico item et Chemico.

4.

Etſi ſtatus reiminis politici, artes, publicae opificum officinae, exercitus, claſſes, commercia cum exteris, cetera denique in Imperio ſatis ſalua eſſe videantur, tamen vt conſeruentur, quae recte conſtituta ſunt, opus eſt quibusdam adminiculis. Opus eſt, v. g. variis machinis et inſtrumentis bellicis quum pedeſtris exercitus tum vſibus claſſium adcommodatis. Taceo arhitectonicam ciuilem et militarem,

taceo artem fundendi tormenta bellica, repurgationem foſſarum, fluminum, et alterius in alterum deriuationem: omitto officinas pannorum quum ſericorum tum laneorum, praetereo agriculturam, hortos et innumera alia, quibus eget ciuitas. Quapropter tertiam duabus prioribus adiungi placet, claſſem videlicet phyſicam cum mathematica coniunctam, eamque occupabit Academicus, rerum naturam, variaſque naturae rerum effectus demonſtrans experimentis; itemque alter Mechanicus, cuius partes erunt excogitare varia inſtrumenta et machinas architectonicae quum militari tum ciuili adcommodatas.

5.

Iſtas, quas modo recenſui rerum naturalium diſciplinas, regnis rebuſque publicis vtiliſſimas eſſe, nemo ſanus, opinor, negauerit. Verum ſunt nonnulla, quae perfectiorem reddere poſſint ſtatum Academiae, ſi addantur, puta, examina ponderis atque menſurae, rerum item naturalium et artificioſarum inter ſe aequationes. Igitur adſciſcendus eſt, matheſi ſubliminori totum qui ſeſe tradidit, cuius partes erunt reliquorum problemata academicorum ſoluere, et expedire praeterea, ſi qua forte aliunde miſſa proponantur explicanda.

6.

Porro requiritur, qui Academicorum res geſtas memoriae tradat Secretarius, cuius de officio dicetur infra.

7.

In conſortium academicorum ordinariorum recipiuntur et honorarii, quos et ipſos munere Academicorum fungi verum

rum eſt. Quocirca quum ipſis mittentur grauioris paullo momenti heuremata Academicorum, ſententiam ſuam de iis expromere ne vereantur, neue grauentur, quae ipſi commenti ſunt egregia, cum Academia communicare. Quae vt aequiore animo faciant, oſtenditur ſingulis auctoramentum, quod tamen ducenorum ſummam rubellorum excedere non debet. Neque vero plures quam decem eodem tempore cooptari viſum eſt. Et ii quidem, qui ſunt in praeſentia academici honorarii, locum quem tenent, tenebunt. Ceterum Academia id aget, vt deinde ex praecipuis Europae regnis, rebuſue publicis eligantur ſinguli, quorum miniſterio commercium litterarium per vniuerſam Europam vigeat. Praeter iſtos decem, quos dixi honorarios, Praeſidi ſi viſum fuerit, licebit et alios eruditione claros et illuſtres nobilitate viros, quamcunque demum diſciplinam profiteantur, ſiue Ruſſi fuerint, ſiue peregrini, titulo honorariorum recipere, excepto tamen honorario.

8.

Sunt ergo in Academia Scientiarum decem ordinarii, quos abolita Profeſſorum adpellatione, nominari deinde placet Academicos. Sunt praeterea decem honorarii, et ii quidem extra limites Ruſſici Imperii. Hi omnes in id vnice incumbent, vt quae ab natura et arte proficiſcuntur, ad ſummum perfectionis prouehant faſtigium.

9.

Academico adiungitur Adiunctus, ſuo quisque Academico operam praeſtans vicariam. Itaque Academicus curam habebit Adiuncti, et Adiunctus ita ſeſe geret, vt dignus euadat,

dat, qui, quum aliquando excesserit Academicus, in eius locum succedat. Praeterea Adiunctus in rebus ad disciplinam suam spectantibus Academico suo erit pro interprete.

10.

Quum tale collegium constet viris eruditione praecellentibus, qui claris ingenii foetibus orbi litterario studia sua dudum adprobauerint, neque tamen alio pacto euocari queant nisi mutua stipulatione, manifestum est, stipendia in eos aequis portionibus conferri minime posse, sed aliis minora, maiora aliis pro re nata dari oportere. Porro quum dignitatis augendae nulla aut exigua admodum sit copia, incommodum istuc munificentia compensandum videtur. Sed arbitrium et ius erogandorum salariorum est penes Praesidem, qui bene meritos vel praemio vel auctiori stipendio afficiet, modo liberalitas ista expensarum modum, qui Maiestatis Imperatoriae *auctoritate constitutus est, ne excedat. Pari modo Adiunctorum alii ab aliis distinguendi sunt; et eorum quidem, qui luxu et inertia torpent, prauitas coërcenda; aliorum autem, qui in rebus gerundis strenuam nauare operam solent, solertia beneficio remuneranda videtur, inprimis si faueant testimonia Academicorum.*

DE OFFICIO ACADEMICORVM ET ADIVNCTORVM.

11.

Academicis, Adiunctis, Vniuersitati, Cancellariae et ceteris, quotquot sunt, Academiae partibus, constitutus ab Imperatoria Maiestate *Praeses auctoritate praeest, omniumque rerum curam, administrationem et regimen tenet. Is*

ante

ante omnia videbit, ne recipiantur, qui nullius sunt frugis, neue impensae frustra fiant. Ceterum Academia Scientiarum et artium more aliarum in Europa Academiarum sub auspiciis et tutela Imperatoriae Maiestatis *et sub ductu Praesidis, ab aliis iurisdictionibus libera et immunis agito, nec nisi a Praeside, aut si is absit, ex Academiae Cancellaria edicta* Maiestatis Imperatoriae *accipito.*

12.

Adsciscendi Academici aut ab Academia remouendi potestas et iudicium penes Praesidem esto.

13.

Et eruditione insignem et moribus egregium bonumque virum decet esse, quicunque locum Academici affectat, siue Russorum ex gente fuerit, siue aduena. Adiunctorum tamen ex grege nemo nisi russicae gentis esto. Neque vero quemquam in Academiam, siue Academici siue Adiuncti partes tuendas poscat, recipiendum puto, nisi specimen aliquod doctrinae suae orbi erudito ostenderit.

14.

Principio cuiusque anni, hoc est, primis Ianuarii diebus quilibet Academicus in congressibus academicis demonstrare debet, quae qualiaue studia illo anno sibi proposuerit pertractanda; et quarto quoque mense, quum tempus instat repraesentandi salaria, codicillis notum facere debet Praesidi, quid praestiterit ipse, quantosue progressus fecerit Adiunctus, laborum eius socius.

15.

15.

Acroaſes Academicae ſingulis dierum hebdomadibus ternae ſunto. In congreſſibus Academici commentationes ſuas ceteris coram legunto, ordine quo quiſque receptus eſt, et eas quidem ab hora nona ad duodecimam. Si quis diſſertationem ſuam legendo nondum abſoluerit, reiiciet eam in proxime ſequentem congreſſum, non exſpectato tempore vicis ſuae. Adiunctis ſententias ſuas expromere libere, vnaque cum Academicis ad eandem menſam adſidere licet.

16.

Quilibet Academicorum id proprie aget, quod ſuarum eſt partium: Itaque non opus eſt, vt v. g. Mathematicorum lineas moretur Botanicus, aut Anatomicus coelum curet Aſtronomorum.

17.

Nulla beuremata Academicorum, quamuis egregie excogitata, in commentarios Academiae Scientiarum niſi iuſſu Praeſidis referri poſſunt. Etenim Academicus, nedum Adiunctus, nihil publicorum negotiorum attrectare poteſt, inuito Praeſide, aut, ſi is abſit, Cancellaria.

18.

Vt autem magis ex voto procedant omnia, Academiae Secretarius ephemerides conficiet rerum ab Academicis geſtarum; deinde digeret doctas Academicorum commentationes et inuenta, quorum nihil ex tabulario auferri poteſt ſine chirographo; tum commercium litterarium inſtituet cum viris doctrina praeſtantibus; poſtremo ordinabit omnia

omnia mandata et edicta, quae a Praeside, vel si is abſit, ex Cancellaria mittentur. Quae vt commodius fiant, adiungitur Secretario Tabularius.

19.

Et diarium et commentationes Academicorum, denique omnia, quae ex iſto coetu in lucem proferuntur, latine aut ruſſice ſcribi debent; gallica autem germanicaue lingua nihil quicquam publicarum rerum traditor.

20.

Si qua Academico interceſſerint negotia cum foro alieno, de iſtis communicare debet cum Praeſide, aut illo abſente cum Cancellaria. Neque enim ſtudia Academicorum ſtrepitu ciuitatis aut tumultu forenſi diſturbari conuenit.

21.

Principio cuiusque anni Praeſes per Secretarium publicabit problema, quod erudito orbi ſoluendum tradet, propoſito praemio, quicunque feliciorem prae ceteris ſolutionem illius argumenti exhibuerit. Tractabuntur autem iſta exemplo et more aliarum Academiarum.

22.

Commentationes, et quae quiſque Academicorum praeclara excogitauerit alia, Secretario Academiae ipſe ſua manu adſeruanda tradet, ſyngrapho ab eo accepto. Is deinde cauebit, ne quid horum pereat, neue detrimentum capiat. Si quae facta ſunt experimenta in aedibus priuatis, ea inſtitui debent iterum, ſed publice, ſed praeſente

ſente Praeſide, in loco ad talia negotia deſtinato.

23.

De controuerſiis, quae forte inter Academicos exorientur, diſceptabunt modeſte, vt graueis decet viros, qui reuerentiam habent et famae et loci. Eos autem, qui praeter opinionem mutuis ſeſe lacerabunt contumeliis, Academiae Secretarius interpellando ab iniuria cohibebit, ceterum rem integram apud Praeſidem deferet.

24.

Academicorum quotquot ſunt, recens editos ſuae profeſſionis libros legunto. Quocirca ſimulac reſciuerint diuulgatos, poſcere eos ex bibliotheca, et adnotationibus illuſtrare, et quae viſa fuerint alicuius momenti, cum ceteris ſodalibus communicare debent. Et eas quidem adnotationes, dummodo ſit operae pretium, Praeſes in ruſſicum ſermonem conuerti, preloque ſubiici iubebit.

25.

Si quando reſciuerint Academici de nouo aliquo experimento, is, cuius intereſt, frequente Academicorum coetu illud ſub examen reuocare diligenter, rerumque momentis atque ponderibus adcurate penſitatis, in ephemerides, quidquid de toto negotio iudicauerit, inferere debet.

26.

Praeterea Academici component libros, argumentum artis et ſolertiae ſuae, qui rei ruſticae et decori ſint et emolumento; et eos quidem libros ruſſice reddi atque imprimi reip. intereſt. Nullus tamen

libet

liber typis mandari poteſt, quin perlectus ſit totus praeſentibus Academicis omnibus, vel certe iis, quibus id negotii Praeſes dederit; et quum publicandus eſt liber, publicatur ille perſcripta Praeſidis auctoritate, cui chirographum e regione adponet Secretarius.

27.

Si quid forte ex aliis regionibus huc mittetur reuocandum ſub examen, vel publico teſtimonio comprobandum, de hoc Academici graue, ſincerum atque firmum dabunt teſtimonium, ac rationem iudicii ſui exponent Praeſidi codicillis.

28.

Alienorum hominum, quem non duxerit ipſe Praeſes, aut huius iuſſu Secretarius, coetum Academicorum ingrediatur nemo, ne is quidem, qui doctas ſuas curas atque meditationes cum Academicis communicaturus venit.

29.

Conuentus Academicorum ſolennes quotannis terni ſunto. Binae in illis conuentibus praeleguntor diſſertationes, altera earum latino, altera ruſſico ſermone. Ipſi ſuorum ex numero eligent, quos quidem cenſent ad tale negotium maxime idoneos. Latinam tamen diſſertationem reddi prius ruſſice, eamque typis imprimi et inter auditores diſtribui oportet, quam in conuentu ſolenni legatur. Primus quiſque conuentus immortali PETRI *Magni, Academiae Fundatoris memoriae ſacer eſto, idemque primis Ianuarii diebus habetor: alius immortali* CATHARINAE *Imperatricis memoriae, primis Maii diebus dicator: ter-*

tius conuentus indicitor, quum praeterierit dies festus, memoriae Sachariae vatis sacer et ELISABETAE.

30.

Primum inter Academicos locum in conuentibus occupat Praeses. Inter ceteros, qui prior in Academia prouinciam capessiuit, is et priorem in consessibus Academicorum locum obtinet.

31.

In cognoscendis causis quae ad incrementa pertinent rei litterariae, quod maior Academicorum pars iudicarit, id ius ratumque esto; quae tamen coram Praeside fieri debent omnia. Quod si is absit, tum vero rei litterariae causas tractat et cognoscit Academicorum senior.

32.

Circa finem Nouembris mensis Secretarius publicabit cum interpretatione russica capita omnium, quae per annum vertentem factae sunt dissertationes, quibus callidas adiunget epicriseis suas.

33.

Praeses, quae in Academia instituta rite sunt, ea quam maxima potest cura tueri debet. Quum primum conuenerint Academici, repraesentandae sunt istae leges coram, quarum exemplum semper penes se habebit Secretarius, ne quis obtentum quaerat, quasi nesciat.

FRVCTVS, QVI PROVENIVNT EX INDVSTRIA ACADEMICORVM.

34.

Si quando, qui rebus Imperii administrandis praesunt, poscent Academiam Scientiarum vel formam operis alicuius,

vel

vel inuentionem machinae, vel nodorum paullo difficiliorum ſolutionem, vel notitiam rerum quae vel ad Geographiam, vel ad Nauigationem, vel Botanicen, vel Chemiam pertinent; denique ſi qua ſint alia, quae vel maritimarum, vel rerum vrbanarum tribunal requirat, aut quae rebus metallicis, aut ſalibus, aut agriculturae, aut aliis rebus perficiendis conducant; ea Praeſes curabit omnia, Academicorum ex numero ſine mora deſtinando talibus negotiis maxime idoneos, qui quidem indefeſſo ſtudio operi intenti, quicquid praeſtiterint, Cancellariae indicabunt: Aſt Cancellaria, more inter tribunalia recepto, omnem cum illo, cui opera Academicorum vſus fuerit, tribunali rem communicabit. Porro quaecunque praeclarā, ornandis vel ciuilibus, vel rebus militaribus excogitauerint Academici, ea Praeſidi aperient, aut quum is abfuerit, Cancellariae, quae quidem nulla interpoſita mora, quo debent loco, reddenda ea curabit.

35.

Euenit interdum, vt peregre arceſſendus videatur homo aliquis, qui certis negotiis vel in tribunali rerum maritimarum, vel alibi praeficiatur. Quem ſi arceſſant ipſi, periculum eſt ne fugiant, vt aiunt, praeter caſam. Petent ergo rite et more tradito ab Academiae Cancellaria, *quae, ſi praeſto ſit indigena, eum tradet; ſin minus, rectius talem hominem euocabit ipſa. Huius etenim eſt ſcire, quibus ex locis idonei rebus gerendis homines acciri debeant.*

ALTERA ACADEMIAE PARS QVAE EST VNIVERSITAS.

36.

Neque vero Ruſſia hoc vno contenta eſt, vt alat viros eruditione claros, quorum ex induſtria nonnullos fructus capiat; id potius agit, vt perpetuo habeat viros dignos, qui in aliorum locum, ſi opus ſit facto, ſufficiantur, maxime iuuenes. At quum Academia in praeſentia ſine ope maximam partem alienigenarum ſeſe tueri vix poſſit, in reliquum autem tempus conſtare debeat tota indigenis, idcirco cum Academia coniungitur pars ea, quae vocatur Vniverſitas.

37.

Vniuerſitas eſt frequentia hominum partim docentium, partim diſcentium. Illi Profeſſores, hi ſtudioſi vocitari conſueuerunt. Profeſſores non linguas docent, ſed doctrina rerum imbuunt. Igitur ſtudioſos par eſt latine iam ſcire, vt Profeſſorum lectiones intelligant, quae non niſi latino aut ruſſico ſermone tradentur. Horum triginta maxime idonei et in latina lingua exercitati ex ludis litterariis, quibus ex locis viſum fuerit Praeſidi, exciti nomina profitebuntur apud Academiam, publicaque largitate ſuſtentabuntur et gratuitis habitationibus, ſeparatis quidem illis, ſed tamen intra eosdem penates. Atque vt iſte numerus conſtans ſit et perpetuus, inſtituitor Gymnaſium, in quo adoleſcentulorum viginti publicis Academiae ſumtibus alantur. Et eorum quidem qui ſunt ſtrenui, in ſupplementum Academiae ſtudioſorum ſcribuntor; alieniores a muſis per officinas Academiae artium diſperguntor. Numerus diſcipulorum et ſtudioſorum, in quos publica erogantur ſtipendia, conſtituto maior ne eſto.

Nam

Nam ceterorum qui ſponte ſua veniunt, ſuo aere litterarum ſtudiis vacaturi, numerum definire haud ſane libet. Ceterum pro inſtitutione poſcendi aliquid neque Academici, neque Profeſſores neque Praeceptores quicquam iuris habent.

38.

Forma Vniuerſitatis ad exemplum ceterarum in Europa Vniuerſitatum dirigitor. Aperiuntor ante omnia ſcholae, in quibus doceantur a praeceptoribus linguae, latina, graeca, gallica atque germanica. Ex ſcholis transſcribentur in Academiam ſtudioſi, imbuendi a Profeſſoribus diſciplinis, quae vel latino vel ruſſico ſermone tradentur. Diſciplinarum claſſes ſunto tres, Mathematum, Phyſices et Humaniorum.

39.

Si diſciplinarum ratio ita conſtituta eſt, adparet, virorum eruditione praeſtantium in Ruſſia copiam etiam nunc deſiderari. Huic incommodo medebitur Vniuerſitas, quae ſufficiet viros, quibus non ſolum academica, ſed et alia longe grauiſſima negotia committi tuto poſſint. Neque enim eruditio cuiquam erubescenda, immo vero maximae laudi ducitur, eſſe in omni ſtatu tam militari quam ciuili, domi foriſque ruſſicae gentis viros doctrina praeſtantes, rebus gerendis idoneos.

40.

Quapropter et ex Academia equeſtri, ſi qui ſunt, qui politicarum ſtudio rerum exerceri cupiunt, ad vniuerſitatem mittendi ſunt, iis inſtituendi diſciplinis, quae apud ipſos non tractantur. Quo facto et Profeſſores negotium habe-

habebunt, neque locus excusationi relinquetur, quasi nemo sit, in quo erudiendo animum habeant occupatum.

41.

Ad Vniuersitatem omnibus, quibus ingenii vigor inest, cuiuscunque demum sint conditionis, aditus patet, solis capite censis exceptis. At si qui istorum ante recepti tirocinii rudimenta iam posuerunt, eorum opera Academia et in reliquum tempus vtetur. Generosos publicis Academiae sumtibus ali non placet, nisi forte eos, quibus est res familiaris tenuior. Iidem, quum in examine solenni Academicis adprobauerint profectus suos, eandem ac Academiae equestris iuuenes spem apiscendorum honorum habent. Quilibet eorum, qui se nobiles ferunt, quum nomina dabunt Vniuersitati, repraesentare debent datum ex curia heraldica testimonium, nobilitatis suae indicem.

42.

Qui propriis student sumtibus, ii sui iuris censendi, neque contra voluntatem suam retinendi sunt. At de his, qui sublimioribus sese tradiderunt studiis, ad legitima tribunalia referendum est, vt ad altiores promoueri queant gradus, iique dignitate et loco pares sunto his, qui ordines ducunt in exercitibus.

43.

Inter initia rerum Professores, quamcunque demum profiteantur de rebus coelestibus doctrinam, nullo discrimine admittuntur. Ceterum quum ingrediuntur prima muneris sui spatia, iure iurando obstringi debent, ne vel praeceptis vel consilio auditorum suorum auribus instillent quid-

quam

quam, quod orthodoxae Graecorum confessioni sit contrarium. Praeterea sacerdos aliquis doctrina clarus, ex numero hieromonachorum instruendus est publico Academiae salario, qui singulis Saturni diebus in auditorio magno elementa fidei tradat in catechesibus, simulque operam det, vt diuinae leges et sanctorum ecclesiae patrum tradita ab omnibus obseruentur.

44.

Professores et praeceptores, nec non studiosi et discipuli, siue suis, siue academicis sumtibus in Vniuersitate studeant, legibus obtemperare debent omnes. Eas autem leges condet Praeses ad exemplum aliarum, quae sunt in Europa Vniuersitatum, statuetque, quo tempore et quibus modis ratio docendi et discendi instituenda sit.

DISCIPLINAE, QVARVM SCIENTIA INSTRVVNTVR TIRONES IN VNIVERSITATE.

45.

1. *Institutio latini sermonis, quae quidem fieri debet lingua russica: gallicae et teutonicae linguae vsu in tradendis linguae latinae praeceptis plane interdicitur.*
2. *Poësis.*
3. *Lingua graeca.*
4. *Latini sermonis elegantiae et fundamenta stili cultioris.*
5. *Arithmetica.*
6. *Ars delineandi.*
7. *Geometria et aliae Matheseos partes.*
8. *Geographia, Historia, Genealogia et Ars heraldica.*
9. *Logica et Metaphysica.*

10. *Physica theoretica et experimentalis.*
11. *Antiquitates et historia litteraria.*
12. *Ius naturae et philosophia practica.*

46.

Omnes Praeceptores russica, at Professores latina lingua docento.

47.

Studiosi ad gradus Magistrorum, Adiunctorum, Professorum, et Academicorum promoueri possunt, ex more et consuetudine recepta in Vniuersitatibus. Sed de his plura dicentur in legibus Vniuersitatis, quas Praeses promulgabit.

48.

Ordo disciplinarum est talis: primo addiscenda est lingua latina, vt quiuis auctor classicus facile et sine cunctatione intelligi possit, eodemque temporis tractu incumbendum est in studium graecae linguae, et geographiae, et historiae et arithmeticae. Quum iam discipuli in gymnasio tantos progressus fecerint, vt lectiones latine propositas intelligere possint, tum vero transscribendi in Vniuersitatem et institutioni Professoris Eloquentiae tradendi sunt, qui exorsus ab arte poëtica deinde perget ad institutionem Rhetoricae latinae: Rhetorices russicae praecepta separatim tradi neutiquam opus est; latinae enim eloquentiae regulas qui nouit, eas ad cuiusuis alterius linguae vsum adcommodare facile potest. Itaque neque tempus frustra perdendum, neque ingenia tironum superuacaneis disciplinis oneranda videntur. Rhetoricis exercitationibus interponi potest gallicae linguae, aut si cui cordi est, delineandi studium. Quibus absolutis audient studiosi lectiones logicas et metaphysicas;

tum

tum incumbent in ſtudia phyſices theoreticae et experimentalis, cum quibus coniungent hiſtoriam, primo ciuilem, deinde litterariam, poſt genealogiam, tum heraldicam, poſtremo philoſophiam practicam. Neque vero iſtae diſciplinae confuſe et quaſi per ſaturam, ſed ordine et ſigillatim tractandae ſunt, inprimisque cauendum, ne tenera ſtudioſorum ingenia pluribus ſimul propoſitis diſciplinis obruantur. Promouendi autem et in aliarum diſciplinarum inſtitutionem tradendi ſunt, quum praeceſſerit examen.

49.

Poſtremo Praeſes quarto quoque menſe, poſtquam certior factus fuerit ab academicis, quid praeſtiterint ipſi, quoſue progreſſus fecerint ipſorum adiuncti et ſtudioſi, examinare debet gymnaſii tirones et ſtudioſos Vniuerſitatis, quo ſciat labores docentium et diligentiam ſucceſſusque diſcentium. Tali modo neque ratio publicarum impenſarum neque ſumma Imperatoriae Maieſtatis *munificentia curaque fruſtra erunt.*

DE CANCELLARIA.

50.

Forma Cancellariae edictis Imperatoriae Maieſtatis *ad amuſſim reſpondere debet. Haec eſt ſedes illa locusque, ex quo Praeſes vniuerſo corpori academico moderatur. Ceteros, qui vna cum Praeſide rebus academicis praeficiuntur, ſublimiores diſciplinas et linguas nonnihil attigiſſe decet, quo rectius intelligant, quid a quoque exigi oporteat. Iidem, quum Praeſes abeſt, coniunctim res Academiae adminiſtrant, eadem auctoritate, qua pollet ipſe, quum coram adeſt Praeſes; ideoque et in conuentibus aca-*

demicis conſeſſus et ſententiae dicendae ius habent. Porro qui praeſunt Cancellariae academicae, cum extraneis pactiones faciunt, et augendi minuendiue ſalaria pro dignitate et meritis cuiusque poteſtate pollent. Praeterea labores cuiusque habent perſpectos, et diligenter examinant, an, quae quisque facit, eo modo faciat, quo facere debet lege pactionis, qua ſemet obſtrinxit: Eorum denique eſt, de rebus ad Academiam pertinentibus communicare cum omnibus, quorum id intereſt, collegiis, ad eorumque manus perueniunt edicta Imperatoria *et libelli memoriales. Vt paucis expediam, quum doctores, tum diſcentes, nihil quidquam quod ad eorum forum non pertineat, ſponte ſua ſuſcipere, ſed omnia ad Cancellariam referre debent, quae quidem cunctarum rerum curam gerendo, rationes aerarii disponet, illudque ſartum tectum, et ab omni incommodo et detrimento ſincerum atque integrum conſeruabit, et quid ex quoque negotio emolumenti naſcatur, cum cura explorabit. Qui rebus gerendis praeſunt, eundem dignitatis gradum tuentur, atque ii, qui in ceteris collegiis iisdem honorum vocabulis utuntur; praeterque eos in Cancellaria ſunto Secretarius, actuarius, commiſſarius, curator regeſtorum, inſtitor, chirurgus eiusque ſocius et adminiſter, interpres, duo Cancellariae ſcribae rebus ruſticis, unus germanicis negotiis curandis; duo item alii, ordinis ſequioris, iisdem ruſticis, itemque unus ſcribendis rebus germanicis, et octo amanuenſes.*

BIBLIOTHECA ET CIMELIOPHYLACIVM.

51.

Bibliothecarius ſub regimine Praeſidis praeeſt Imperatoriae

ratoriae Maieſtatis *bibliothecae et cimeliophylacio, ac ſecundum hunc is qui vicem eius ſuſtinet. Amborum eſt ordinare et ornare bibliothecam et cimeliophylacium, eaque nouis libris nouaque ſupellectile inſtruere. His dicto audientes ſunto pictor animalium et plantarum, nec non medicamentarius, qui conſeruabit anatomica et alia vnguentariorum praeparata; item duo interpretes, quorum alter germanica ruſſice, alter ruſſica germanice reddere ſciat; et hi quidem quum propter litterarum, res per Europam geſtas continentium, tum propter aliorum ſcriptorum, quae publicae luci exponi debeant, interpretationes.*

52.

Quum magna adhuc ſit penuria, in bibliotheca librorum, rerum in cimeliophylacio, curioſorum hominum perluſtratione dignarum, huic incommodo minuendo deſtinatur quotannis ex reditibus bibliopolii ſumma binorum millium rubellorum: ad coëmendos autem varios cimeliophylacio neceſſarios adparatus, puta ſpiritum vini, vitrea, camphoram et id genus alia, ſtatuenda eſt certa pecuniae ſumma, quam quidem in alios impendere ſumtus nemini licet.

53.

Denique certa pecuniae ſumma conſtituitur botanico horto et laboratorio chemico tuendis, comparandis item variis, quibus vſus eſt in aſtronomia, phyſica experimentali et aliis diſciplinis, inſtrumentis, et ceteris rebus neceſſariis, poſtremo tribuendis praemiis, quibus donantur homines ingenioſi et eruditi, de quibus ſupra art. 21. facta mentio eſt.

ARTES.

TYPOGRAPHIA.

54.

Typographiae ſunto duae, quarum in altera exoticarum, in altera ruſſicae linguae libri imprimantur. Vtrique praepoſitus eſt prouiſor, qui cunctorum operariorum curam gerit, videtque vt eorum quilibet ſua cum ſtudio agat atque cura. Ac ne quid fraudis maliue doli proficiſci poſſit ex operis, idem ille prouiſor typos, formas, prela quam diligentiſſime cuſtodiet. Sed de his ampliora ſeparatim dabuntur mandata. De numero autem et conditionibus iſtorum libellus, qui ſtatum Academiae continet, plura tradet.

BIBLIOPOLIVM.

55.

Bibliopolio praeficitur prouiſor, cuius eſt cum transmarinis bibliopolis ſocietatem commercii epiſtolaris de libris venalibus iungere, et curare rationes accepti et expenſi. Huic duo adiunguntur ſocii, qui libros in taberna libraria ordinent, eosque mundos terſosque praeſtent, diſponant item exemplaria, et librorum emtionem ac venditionem in codicem referant. Bibliopolii ratio ad morem et rationem bibliopoliorum, quae ſunt apud exteros, exigenda, et de acceptis et expenſis, item de numero librorum vni Cancellariae ratio reddenda videtur; hoc enim loco moris, qui in collegio rerum maritimarum obtinet, ratio haberi nulla poteſt; fieri enim nequit, vt conſtans libris pretium ſtatuatur; praeterea venditio librorum variis fit modis, vt taceam auctorum et editionum diuerſitatem, quae pene innumera eſt.

ARS FVNDENDI TYPOS.

56.

Horum numerum, quo minor definiri in Academia non poteſt, et conditionem libellus ſtatum academicum continens, demonſtrabit.

ARS COMPINGENDI LIBROS.

57.

Refertur et de his in eodem de ſtatu Academiae libello. Neque vero Academiae tantum, ſed et omnibus Imperii locis, ex quibus pueri diſcendae huius artis cauſa mittentur, eorum opera vtilis eſt.

ARS IMPRIMENDI FIGVRAS AENEAS.

58.

Numerus et munia horum in eodem libello deſignantur.

ARTIFICES ET OPIFICES ALII.

59.

Architectus, tres caelatores, quorum hic imaginibus, ille regionibus, iſte litteris aeri incidendis inſeruiat, pictor idemque inuentor, mechanicus fabricandis inſtrumentis mathematicis, item aliis barometris faciendis, concinnator horologiorum, faber ſerarius et cum dolatore tornator. Habebunt ii adiutores ſinguli ſingulos, ſingulosque aut binos diſcipulos, ſecundum normam libelli, qui ſtatum continet Academiae. Merces et auctoramentum eis ſtatuetur pro ratione meritorum.

60.

Ex quibusuis Imperii locis ad quascunque artes aut opificia perdiſcenda recipiuntur diſcipuli gratis; at ſuſtentationis

tationis et alimentorum, a quibus traditi sunt, bi curam habebunt.

61.

In officinis operariorum vsus est variis adparatibus; itaque praeficitur apothecae inspector, cui postremae sortis omnium Academiae classium mercenarii atque operae parebunt.

62.

Certa statuitur summa coëmendis lignis atque candelis in vsum officinarum et ceterorum, qui in academicis aedibus publicis commodis inseruiunt.

63.

Pari modo summa mediocris destinatur sustentandis impensis extraordinariis, coëmendis item chartis, calamis scriptoriis, atramento, cerae signatoriae et ceteris, quorum adcurata iniri ratio non potest: ceterum qui facti sunt in haec atque huiuscemodi sumtus, percensendi et in commentarios referendi sunt omnes. Leges et mandata omnibus, qui in officinis operam nauant, dabit Praeses, quo quisque sciat, quid sibi faciendum, quidue vitandum sit.

64.

In manu Praesidis positum est, hisce statutis pro re nata vel aliquid addere vel immutare nonnulla, si quidem artibus amplificandis ista conducere et e republica litteraria esse cognouerit; modo ne ea fiant sine grauissimis causis. Illud vnum animo eius penitus infixum haerere debet, an-

annui qui impendantur in Academiam Scientiarum et Artium ſumtus, conſtitutam conceſſamque ſummam ne egrediantur.

Tabulis authenticis Sereniſſima Imperatrix *ſubſcripſit ſolenni formula*,

RATA HAEC SVNTO,

easque tabulas ſigillo publico muniuit.

* * *

Nunc diſſertationum ab Academicis in priuatis conventibus vi horum inſtitutorum ab an. 1746. praelectarum, breuem exhibemus conſpectum, quem poſtea commentationes ipſae, eo quo recenſitae ſunt ordine, excipient.

MATHEMATICA.

L. EVLERI, DE SVPERFICIE CONORVM SCALENORVM ALIORVMQVE CORPORVM CONICORVM DISSERTATIO.

Varia veterum circa ſectiones conicas et conorum naturam in vulgus nota ſunt molimina, haec autem ad conos rectos ſolummodo, non vero ſcalenos aut alia corpora conica, quorum ſuperficies determinanda erat, ſpectant. Primus, qui derelicta a veteribus argumenta pertractauit, fuit Cel. Varignonus, qui in Cent. II. Miſcell. Berol. lineam curuam exhibuit, cuius conſtructio a quadratura circuli pendet, mediante cuius rectificatione area coni ſcaleni aſſignari queat. Huic diſſertationi ma-

gnus Leibnitzius additionem ſubiunxerat, in qua idem negotium per rectificationem curuae Algebraicae ſoluere annitus fuerat, ſphalma autem, quod in ſolutionem hanc ingenio Leibnitziano alias digniſſimam et maxime aeſtimandam, inaduertentia viri alias ſagaciſſimi irrepſerat, illam inutilem plane reddiderat.

Propoſitum igitur fuit Cel. Eulero, ſuperficiem coni ſcaleni, ope rectificationis lineae algebraicae exhibere; porro, explanationem ſuperficiei cuiuscunque per lineam curuam algebraicam abſoluere, et lapſum ſummi emendare Leibnitzii. Id quod abunde praeſtitit, dum non ſolum fontem aperit e quo conſtructio curuae Varignonianae fluit, ſed et methodo Hermanniana docet, quomodo ſcopus, quem Varignonius et Leibnitzius ſibi propoſuerunt, obtineri poſſit, et loco curuae, cuius arcus ſuperficiei conicae non eſt proportionalis, ſed qui perpetuo quadam quantitate algebraica augeri aut minui debet, aliam aſſignari docet, quae ſine aſſumta alia quantitate ſuperficiei conicae portionem quamuis metiatur.

Expeditis ſic conis ſcalenis, conos quoscunque conſiderat, qui formantur dum linea recta per verticem perpetuo tranſiens, circa lineam quamcunque circumducitur, harumque ſuperficiem, variis modis inueniri poſſe docet.

Tandem conſtructionem Leibnitzianam elegantiſſimam emendare aggreditur, in quo peculiari modo procedit, et fuſe demonſtrat, non ſolum quomodo illa inuenienda ſit, ſed et, quod praecipuum erat, curuam Leibnitzianam ſi in rectam quampiam conſtantem ducatur, praebere ſuperficiem

ciem conicam quaesitam, sed quae antea portione quadam minui debeat.

Sicque Celeberrimus auctor constructionem Leibnitzianam emendatam, ad conos, quorum bases sunt figurae quaecunque, extendit, eamque reddidit vniuersaliſſimam.

L. EVLERI THEOREMATA CIRCA DIVISORES NVMERORVM.

Doctiſſima haec diſſertatio ita comparata eſt, vt ab harum rerum intelligentibus legi oporteat, quibus proin ieiuna quaedam recenſio parum, ceteris autem lectoribus nihil commodi allaturam eſſe perſuaſi ſumus. Introitus autem viri Celeberrimi in hanc diſſertationem meretur, vt hic in conſpectum producatur. Scilicet, ſummos ſemper Geometras agnouiſſe aſſerit, plurimas in natura numerorum praeclariſſimas abſconditas eſſe proprietates, quarum cognitio fines matheſeos non mediocriter eſſet amplificatura, tametſi iis, qui eas ad Arithmetices elementa referant, aliter viſum nec creditum ſit, iis aliquid ineſſe, quod vllam ſagacitatem aut vim analiſeos requirat. Hic Fermatium, inſignem Geometram teſtem adducit, qui diligentius in hoc genere verſatus, plurima huiusmodi theoremata produxit, quorum veritas euicta videtur, quamuis eius lateat demonſtratio.

Sicque vtique attentionem meretur, quae porro proponit in matheſi pura, in Arithmetica ſcilicet, quae tamen prae reliquis matheſeos partibus maxime pertractata

et perſpecta haberi ſoleat, dari tales veritates, quas cognoſcere, non autem demonſtrare valeamus, cum nulla in Geometria occurrat propoſitio, cuius veritas ſiue falſitas firmiſſimis rationibus euinci nequeat.

Porro demonſtrat in Arithmetica, vbi numerorum natura perpenditur omnium abſtruſiſſimas contineri veritates, quoniam veritas eo magis abſtruſa cenſenda, quo minus ad eius demonſtrationem aditus pateat.

Nec eum moratur ſummorum mathematicorum auctoritas, veritates huiusmodi prorſus eſſe ſteriles et haud dignas, in quarum inueſtigatione opera collocetur, quandoque pronuntiantium. Quoniam praeter quod omnis cognitio veritatis per ſe excellens ſit, etiamſi ab vſu populari abhorrere videatur, etiam veritates omnes, quas nobis cognoſcere licet, ita inter ſe eſſe connexas, vt nulla ſine temeritate tanquam prorſus inutilis repudiari poſſit. Accedit ſi vel maxime propoſitio quaedam demonſtrata nihil ad vtilitatem praeſentem conferre videatur, quod tamen methodus, qua eius vel veritas vel falſitas eruitur plerumque viam ad alias veritates vtiliores cognoſcendas patefacere ſoleat.

Haud ergo inutiliter operam ac ſtudium in indagatione demonſtrationum quarundam propoſitionum ſe impendiſſe confidit Cel. auctor. quibus inſignes circa diuiſores numerorum proprietates continentur.

Neque enim hanc de diuiſionibus doctrina omni carere vſu, ſed nonnunquam in Analyſi non contemnendam praeſtare vtilitatem affirmat. Non dubitat porro vir Cel. methodum ratiocinandi, qua vſus eſt, in grauioribus

oribus aliis inueſtigationibus aliquando non parum ſubſidii afferre poſſe.

Propoſitiones quas hic demonſtratas exhibet, diuiſores numerorum reſpiciunt in hac formula $a^n \pm b^n$ contentorum, quarum nonnullae iam ab ante memorato Fermatio ſed ſine demonſtratione ſunt publicatae.

De cetero omnes Alphabeti litteras hic conſtanter numeros integros indicare monet.

Ex reliquis elegantibus meditationibus breuiter notamus, demonſtrationem Theorematis quinti ſibi peculiarem eſſe, prouti §. 20 ipſe adſerit Cel. auctor.

Porro quod §. §. 24, 28, 31, 32 et 38 compendia quaedam inſignia adducat, quodque citato §. 32 problema difficillimum Fermatii, qua numerus primus dato maior quaerebatur, adhuc manere inſolutum affirmet, et tandem, quod veritates nonnullas, quas noſſe, non autem demonſtrare licet, §. 59 et 69 et alias nondum ex omni parte demonſtratas §. 63 et 66 adducat.

L. EVLERI VARIAE DEMONSTRATIONES GEOMETRICAE.

In hac diſſertatione vir Celeberrimus non ſolum theorema quoddam a Fermatio Geometris demonſtrandum propoſitum, ſed et nonnulla alia de areis trianguli et quadrilateri circulo inſcriptis, praeſertim autem theorema quoddam circa naturam trapezii demonſtrat, quod et a nonnullis aliis Geometriae amatoribus, quibus vir Celeberrimus idem propoſuerat, demonſtratum eſſe nouimus.

 Fatetur

Fatetur Celeberr. auctor theoremata haec primo intuitu nihil difficultatis inuoluere videri, earumque veritatem per analyſin haud difficulter agnoſci. Sed longe aliter ſe rem habere, ſi ab iis, qui artis analyſeos expertes ſunt intelligi debeant, quem in finem memoratus Fermatius eiusmodi demonſtrationem geometricam requiſiuerit, quae more veterum Geometrarum ſit adornata, quae ab iis etiam qui analyſi non ſint adſueti intelligi poſſit.

Rem igitur aggreſſus vir Celeberrimus omnium horum theorematum demonſtrationes pure Geometricas tradidit, in quibus nullum analyſeos percipiatur veſtigium, quae ita comparata ſunt, vt hic recenſeri non commode poſſint et a Geometriae cultoribus in ipſa diſſertatione legi debeant.

L. EVLERI DE PROPAGATIONE PVLSVVM PER MEDIVM ELASTICVM.

Arduam ſane materiam, quae tamen in Phyſica ſimul maximi eſt momenti, ſibi pertractandam ſumſit vir Cel. dum in propagationem pulſuum per medium elaſticum inquirere conatur, ſiquidem hac theoria inuenta, quae circa ſoni et luminis propagationem occurrunt phaenomena, ſimul cognita erunt et exacte determinata.

Hinc ad reſoluendam hanc maximi momenti quaeſtionem viam ſternens ex primis principiis mechanicis, a caſu ſimpliciſſimo orditur, vnicam prticulam ſolummodo conſiderando, et tandem inuenit, eam circa punctum medium

medium alternis motibus inſtar penduli motum iri, hunc-que motum perpetuo eſſe duraturum, niſi quatenus a reſiſtentia diminuatur.

Hoc caſu facillime expedito §. 8 duo corpuſcula conſiderat, hic autem, quod bene notandum, motum inuenit a priori maxime diſcrepantem, neque amplius oſcillatorio motui ſimilem, qui ob hoc ipſum et multo difficilius definiri poſſit.

Fatetur tamen ingenue inuentionem numeri accuratam, quo celeritas propagationis pulſuum per quoduis medium elaſticum definiatur, maxime eſſe arduam, nec ſine inſigni amplificatione doctrinae ſerierum expectari poſſe. Methodum tamen, qua Cel. Newtonus ad propagationem pulſuum vſus ſit, non parum eſſe elegantem, et tametſi a rigore Geometrico valde abhorreat, pro idonea approximatione haberi poſſe, qua occaſione, quomodo per experientiam valoris deſiderati proxime determinari poſſint declarat.

Simulque docet, ſi veri valores non exactiſſime inueniantur, nos tamen modum, quo pulſus per medium propagentur elaſticum, ſatis clare perſpicere poſſe, et in diverſis fluidis elaſticis, celeritates, quibus pulſus per ea propagentur, eſſe in ratione ſubduplicata compoſita ex directa elaſticitatum et inuerſa denſitatum affirmat.

Haec tamen iam aliunde conſtare dicit, et a Newtono firmiter iam eſſe demonſtrata, quoniam ad hoc non opus ſit, vt ipſa ſingularum particularum fluidi elaſtici agitatio ſit perſpecta.

Tandem ex iis quae ſupra allata ſunt de motu vnius particulae oſcillatorio, duarum autem ſeu plurium particularum

cularum non amplius oſcillatorio, ſed eo magis ab eo diuerſo, quo numerus particularum maior, intelligi afferit, ſonum neutiquam eo modo quo nonnulli eximii viri volunt, per aërem propagari, qui ſtatuunt, cum chorda, ſiue aliud inſtrumentum ſonorum impellitur, dari in aëre eiusmodi particulas, quae ſimilem motum oſcillatorium excipiant, eoque organum auditus excitent.

Cum autem vir Cel. iam in tractatu ſuo de lumine et coloribus plura alia incommoda oſtenderit, quibus haec laboret ſententia, ex hac diſſertatione patere ait, quod nequidem cum vera theoria pulſuum per medium elaſticum propagatorum conſiſtere poſſit, ſicque per eandem diſſertationem corroborata eſt ratio propagationis pulſuum, quam in ſcripto memorato fuſius expoſuerat Celeberrimus auctor.

L. EVLERI, EXAMEN ARTIFICII NAVES A PRINCIPIO MOTVS INTERNO PROPELLENDI, QVOD QVONDAM AB ACVTISSIMO VIRO IACOBO BERNOVLLI EST PROPOSITVM.

Quae ante biennium Geneuae edita ſunt opera Iacobi Bernoulli continent inter alia ſchediasma, cui titulus eſt: *artificium impellendi nauem a principio motus intra ipſam nauem concluſus.* Hoc artificium, cum Celeb. Eulero maxime videretur paradoxon, hunc mechaniſmum diligentius expendere et ad leges motus examinare operae pretium fore putauit.

Equidem haud ignorauit Vir acutiſſimus Bernoulli, actioni reactionem perpetuo eſſe aequalem, e quo ſequitur,

quitur ſi homines aut aliae machinae intra nauim conſtitutae vel maxime eam propellere niterentur, omnes conatus hos irritos fore; putauit autem, hanc veritatem tantum ad vires ſic dictas mortuas, quae ſolis preſſionibus continentur, non autem ad alterum virium genus, quae viuae appellantur, et a percuſſione oriuntur, reſtringi debere.

Dum autem Celeberrimus Eulerus contra plurimorum recentiorum philoſophorum ſententiam (qui ſummum inter vires viuas et mortuas diſcrimen ſtatuunt,) euicerit, hoc diſcrimen omni fundamento carere; hinc veretur, ne motus, quem Bernoullius naui ope percuſſionum imprimere conatus eſt, plane euaneſcat.

Machina autem Bernoulliana propoſita ita ſe habet: in naui conſtitui iubet tabulatum firmum in ſitu ad horizontem perpendiculari quod ſit perfecte elaſticum, puta chalybeum aut reticulatum eo ſaltim in loco vbi ictus recipit. Huic tabulato ſit appenſum pendulum cum annexo pondere, quod ope automati aſcendendo et deſcendendo naui motum quendam imprimere poſſit, ratione habita exceſſus virium viuarum ſupra mortuas, quae vltimae nauem retro pellere debent.

Tametſi autem vim, qua nauis a penduli percuſſionibus propellitur, non multo maiorem calculo inſtituto deprehenderit, altera vi a tenſionibus orta, tamen naui ab ea non mediocrem motum imprimi exiſtimat, vt etiam, aquae reſiſtentiae ratione habita, nauis non contemnendam celeritatem acquirere poſſit, quam in naue roſtrata ſingulis minutis primis ad 260. pedes extendit,

quae celeritas tanta, vt conſueta remigatione vix maior obtineri poſſit, huicque longe anteferenda, et maximo cum fructu venti loco adhibenda, prouti fuſius Celeb. Eulerus oſtendit.

Dum autem conſiderat, hanc vtilitatem nimis magnam eſſe in re nautica, quam vt diu latere potuiſſet, praeſertim dum non admodum abſcondito mechaniſmo contineatur, et ideo ob ipſam commodorum magnitudinem in ſuſpicionem incurrat, quae adhuc augeatur, quod deſcriptio huius artificii tantum in opusculis poſthumis reperiatur, nec viuente viro ſit deuulgata. Hinc admodum probabile videtur virum beate defunctum, niſi de ſucceſſu felici ipſe dubitaſſet, non celaturum fuiſſe tantum inuentum, quod omnibus eius reliquis inuentis, etiamſi ſint maxima, palmam praeripuiſſet.

Quapropter nihil ſe meritis ſummi viri detracturum confidit, ſi demonſtrauerit, huiusmodi penduli ictibus naui nullum prorſus motum imprimi.

Vt autem inueſtigatio effectuum penduli commode peragatur, definire conatur, quantum nauis à pendulo retro agatur, dum deſcendit per quadrantem, deinde ictum conſiderat, quo nauis propellitur; motumque, qui naui proram verſus imprimitur, exacte determinat et tandem deſpicit, vtrum nauis poſtquam pendulum receſſerit, motum habeat reliquum antrorſum directum nec ne, et quantus is ſit futurus. Et quoniam motus huius reciproci determinatio, ſi reſiſtentiae aquae rationem habere voluiſſet, maxime difficilis futura fuiſſet, haud ſine calculo moleſtiſſimo expedienda, igitur aliam viam faciliorem pro-

proponit §. 11. 12. 13. et primo pendulum ſimplex conſiderat, vbi legem conſtanter conſeruat, vt celeritates per radices quadratas ex altitudinibus ipſis debitis et temporis elementa per ſpatiola interea percuſſa ad celeritates applicata exprimat.

§. 18 tandem demonſtrat motum quem percuſſio penduli naui imprimere conatur, proram verſus praeciſe aequalem eſſe illi, quem vires pendulum tendentes, quamdiu deſcenſus et aſcenſus vnus abſoluitur in contrariam directionem generare valeat, ex quo apparet, etiamſi navis ab ictu penduli propulſionem proram verſus accipiat, tamen totum hunc motum deinceps ab aſcenſu penduli omnino ſublatum iri, et quoniam deſtructio haec poſt ſingulos ictus eueniat nullum omnino motum progreſſivum naui conciliari poſſe, prouti Celeb. Bernoullius putauerat, per errorem ad id ſtatuendum, inductus, quem in determinatione vis propellentis a percuſſione orundi commiſerat, quem ipſum errorem Cl. Cramerus eius commentator, probe animaduerterat, non autem ob calculi moleſtiam correxerat.

§. 19 et ſequentibus oſtendit, perfectam hanc virium propellentium et repellentium compenſationem quoque locum habere, ſi pendulum non totum quadrantem ſed et minores arcus abſoluat.

Poſtquam de pendulis ſimplicibus hucusque egiſſet §. 22. pendula adgreditur compoſita, in quibus idem obtinenere affirmat, ita vt hanc aequalitatem perfectam inter vires propellentes et repellentes primis mechanicae principiis adnumerare haud dubitet et tandem concludat, na-

ves nonſolum hoc modo Bernoulliano propelli non poſſe, ſed quascunque alias machinationes, quae totae naui ſint incluſae, nullique principio externo innituntur, aeque eſſe inutiles, neque nauibus vllum motum imprimere valere.

Quomodo ſtabilito hoc principio problemata, huc pertinentia, ſolutu longe difficillima, ſolui poſſint §. 23. oſtendit, hoc firmiſſime affirmando, in quocunque caſu, perfectam ſemper inter vires nauem propellentes, et eas quae in regionem oppoſitam effectum exerant, fore aequalitatem.

Cuius principii rationem §. 24. ſeqq. affert; qua occaſione memorabile paradoxon mechanicum proponit §. 26. „quod ſcilicet frictio ipſa motus cuiuspiam cauſa eſſe „poſſit, ita vt frictione ſublata nullus plane motus ſecu„turus ſit.„

Haec dum §. 27. ſequentibus ad reſiſtentiam aquae applicat, dubium quod ex ea oriri poſſet, ſoluit et tandem concludit, nullo modo naui ab hucusque deſcriptis pendulis celeritatem conſtantem antrorſum directam imprimi poſſe.

G. W. KRAFFTII DISSERTATIO GEOMETRICA DE PROBLEMATIBVS ALIQVOT CONICIS PER ANALYSIN CONCINNE SOLVENDIS.

Clariſſimus diſſertationis huius auctor viam monſtraturus, quomodo varia problemata conica per Analyſin concinne ſolui poſſint, praemiſſis tribus theorematibus, duo

duo ſequentia ſoluta exhibet problemata, alterum, *datis duabus diametris coniugatis ellipſeos inuenire axes*, et alterum *data vna diametrorum coniugatione inuenire alteram ſub angulo quouis dato*. Speciatim autem circa primum notat, problema hoc, ſi praeter diametros coniugatas perimeter detur, facile ſolui poſſe, prouti *Apollonius* prop. 46 et 47 libr. II. fecerit: quodſi autem non data ſit, prouti obtinet, tunc ſolutionem difficiliorem fore. Interim non negat conſtructionem huius problematis iam in *Pappi* exſtare collectionibus, ſed abſque demonſtratione, quam *Fred. Commandinus* ſupplere haud feliciter conatus ſit, teſtantibus *Greg a St. Vincentio* et *Blondello*, qui in Comm. Acad. Reg. Scient. Gallico idiomate ab Ao. 1666 — 1699 editis idem ſolutum dederit, cum quibus conferenda ſint, quae *Marchio Hoſpitalius* in libr. II. prop. II. ſectionum conicarum adtulerit.

Interim ſperat Cl. auctor ſi cui placuerit, omnes has demonſtrationes *Vincentii*, *Blondelli* et *Hoſpitalii*, cum illa quam hic dederit, comparare, illum inuenturum, eam reliquas et concinnitate ſuperare et euidentia.

G. W. KRAFFTII DEMONSTRATIONES DVORVM THEOREMATVM GEOMETRICORVM.

Conſueuerunt iam diu primi ordinis Geometrae, ſi novam quandam demonſtrationem veritatis cuiuſdam inuenerunt Geometricae, propoſitionem ipſam cum ami-

cis, cum quibus ipſis commercium intercedit litera rium communicare, vt demonſtrationem eiusdem proprio, vt aiunt, marte, inueniant, ſicque magis confirmetur, ſi a pluribus eadem demonſtratio allata ſit, aut fines amplificentur ſcientiae, ſi nouum vel prorſus aliud fundamentum pro demonſtratione inuentum ſit.

Hinc factum eſt, vt Cel. Eulerus veritatem theorematis, quam in hoc ipſo nouorum Comm. Tomo et quidem §. 26. ſeqq. diſſertationis quae inſcribitur, *Variae demonſtrationes Geometricae* ſupra pag. 64 ſeqq. demonſtratam dedit, Cl. Krafftio in literis d. 17 Febr. 1748 proponeret. Quod theorema non modo nouum vilum, ſed et generalitate ſua mirum in modum eidem placuit, hinc praemiſſo quodam lemmate e trigonometria petito, demonſtrationem ab Euleriana tametſi diuerſam non autem minus firmam, propoſiti exhibet theorematis.

Cum autem eodem fere tempore in aliud incidiſſet theorema, Cl. Krafftius quod a *Rob. Smith*, inter opuſcula *Coteſii* ſed ſine demonſtratione editum fuerat, quam quidem alii Geometrae, et inter reliquos Celeberrimus, cuius obitum nunc orbis luget eruditus, dederat *Bernoullius*, ſubtilem tantoque Geometrae dignam, vires ſuas experiri voluit Cl. Krafftius, et ex eodem quod ſupra praemiſerat, lemmate, caſus aliquot huius theorematis deducere, et ſic nobiliſſimo huic cyclometriae atque abſtruſiſſimo theoremati lucem clariorem conciliare, ſimul tamen in quolibet propoſitorum exemplorum caſu rigidiſſime probare anniſus eſt.

PHYSI-

PHYSICO-MATHEMATICA.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE TVBINGAE 1745 et 1746.

a

G. W. Krafft factae.

Exhibuit Vir Clariſſimus duabus diſſertationibus obſervationes ſuas Tubingae inſtitutas et quidem in primo diſſertationis primae paragrapho inſtrumenta, quibus vſus eſt, et reliquas obſeruationum circumſtantias adducit, quae in diſſertatione ipſa relegenda.

§. 2. et 3. Obſeruationis altitudinis barometricae maximae et minimae differentiam 1. poll. Lond. 56. Cent. mediamque altitudinem barometri 28^p. 58^c. nulla habita inſtrumenti ſupra *Nicri* fluuii ripam eleuati ratione, quae 60. pedes adaequat, affert. Hinc §. 4. notat 1.) barometri variationem annuam Tubingae longe minorem eſſe quam eſt Petropoli, et 2.) variationes menſtruas barometri in primis et vltimis anni menſibus plerumque eſſe maiores, quam in mediis, prouti id idem etiam Petropoli obſeruauerat.

§. 5. et 6. Obſeruationes exhibet thermometricas easque cum Petropolitanis comparat, notando iis diebus, quibus Petropoli ceſſauit frigus his iisdem illud Tubingae ortum eſſe, ita vt fere materia quaedam mota ex noſtra regione in illam produxiſſe id videatur.

Maximum calorem h. 2. et 3. p. m. in diebus aeſtiuis et calidis, ſolis radiis libere ad thermometrum allabentibus thermometro Fahrenheitiano gradum 103. Tubingae iisdem ſub circumſtantiis vno gradu minorem ſcil. 102. obſeruauit. Contra

Contra calorem aëris vmbroſi Petropoli minorem quam Tubingae inuenit ſcil. Petropoli 83°. Tubingae 89°.

Maximum autem frigus in thermometris Petropoli aëre libero in obſeruatorio Imper. ibidem expoſitis deprehendit 1740. 25. Ian. ſt. v. 30°. infra 0. Tubingae autem An. 1745. d. 21. Ian. frigus maxime inſolens ibi viſum, thermometro Fahrenheitiano ſaltem 13°. infra 0 monſtrante.

§. 7. Nonnulla lucis borealis veſtigia obſeruata adducit, et §. 8. appendicis loco obſeruationes in ſpecu prope Reutlingam haud incelebri inſtitutas et declinationem acus magneticae a tonitrubus et fulguribus mutatam affert, teſtaturque ſe praeeunte Grahamio quoque declinationem illam (ſi exacte ad eam attendatur) ſingulis horae quadrantibus aliquot minutis primis mutatam deprehendiſſe.

In ſequenti diſſertatione, quae obſeruationes anni 1746. comprehendit, §. 1 et 2. ex obſeruatione maxima et minima barometri quodammodo mutata, differentiam $1^{p}. 71^{c}.$ et mediam $28^{p}. 50\frac{1}{2}^{c}.$ deducit.

§. 3. autem maximum calorem huius aeſtatis longe lateque per totam Europam feruentiſſimae, die 25. Iul. 94°. in aëre vmbroſo boream verſus obſeruauit.

§. 4. Varias obſeruationes aurorae borealis menſibus Ian. Sept. Oct. Nou. et Dec. inſtitutas affert, et

Tandem §. 5. inſtar appendicis, locum quendam e Hiſtoria imperii Ottomanici a Principe Moldauiae Demetrio Cantemiro conſcripta fol. 364. ſub Oſmanno II. §. 3. citat, e quo veroſimiliter probat; anno iam 1620. d. 22. Febr. ſt. v. ſpinam illam celeſtem ſeu lumen Caſſinianum

tantum ibi obseruatam esse, sicque eius epocham quam An. Christi 1659. affigere solent, per 39 annos retrahit.

Ad reliquas huius classis Physico-Mathematicae dissertationes quod attinet, grato animo agnoscimus, quod nobis otia fecerint Clarissimi earundem auctores, dum brevem doctissimorum suorum laborum conspectum ipsi conficere haud grauati fuerunt, idcirco eundem ipsissimis eorum verbis exhibere nulli dubitauimus, idque lectores nostros latere noluimus.

DE QVANTITATE CALORIS, QVAE POST MISCELAM FLVIDORVM CERTO GRADV CALIDORVM ORIRI DEBET COGITATIONES.

Item

FORMVLAE PRO GRADV EXCESSVS CALORIS, SVPRA GRADVM CALORIS MIXTI EX NIVE ET SALE AMMONIACO, POST MISCELAM DVARVM MASSARVM AQVEARVM, DIVERSO GRADV CALIDARVM, CONFIRMATIO PER EXPERIMENTA. A. G. W. RICHMANN.

Calorem quidem fluidorum et quomodo calor fluidi vnius ad calorem alterius fluidi habeat, definire non licet: definiri tamen potest excessus caloris vnius fluidi supra gradum caloris alterius fluidi, et ratio excessuum caloris duorum fluidorum supra gradum caloris constantem. Huic rei inseruiunt thermometra. Si materiae fluidae homogeneae diuersarum temperierum miscentur, media quaedam temperies post miscelam oriri debet in mixto, vel potius medius quidam excessus caloris supra gradum caloris definitum.

Quomodo hic excessus post miscelam cognitis massis singulis et singularum massarum excessu caloris supra

gradum caloris conſtantem definiatur, oſtenſum eſt ab auctore in cogitationibus de quantitate caloris, quae poſt miſcelam fluidorum certo gradu calidorum oriri debet. Nimirum ſingularum maſſarum exceſſum caloris ſupra gradum caloris conſtantem multiplicandum eſſe in maſſas ſingulas et ſummam factorum per ſummam maſſarum dividendam eſſe. Hoc ibidem Cl. Krafftii experimentis probatum et nouis ſtabilitum eſt in confirmatione formulae pro gradu exceſſus caloris ſupra gradum caloris mixti ex niue et ſale ammoniaco poſt miſcelam maſſarum aquearum diuerſo gradu calidarum.

INQVISITIO IN LEGEM SECVNDVM QVAM CALOR FLVIDI VASE CONTENTI CERTO TEMPORIS INTERVALLO, IN TEMPERIE AERIS CONSTANTER EADEM DECRESCIT VEL CRESCIT, ET DETECTIO EIVS, SIMVLQVE THERMOMETRORVM PERFECTE CONCORDANTIVM CONSTRVENDI RATIO HINC DEDVCTA.

AVCT. G. W. RICHMANN.

Decreſcit calor aquae in aëre frigidiori et creſcit in aëre calidiori aqua. Qua lege hoc fiat inueſtigauit autor idem, et ex multis obſeruationibus quas communicauit in inquiſitione ſua in legem decrementi et incrementi caloris deriuauit, (1) decrementa et incrementa in paruis temporibus aequalibus in genere eſſe, in ratione compoſita ex directa ſuperficierum integrarum, et differentiarum inter temperiem aquae et aëris et inuerſa maſſarum. (2) hinc deduxit, differentias temperierum inter temperiem aquae et aëris, in temperie aëris conſtanti, temporibus ſecundum arithmeticam progreſſionem ſeſe excipientibus, ſecundum progreſſionem geometricam de-

decreſcere. Si. e. g. differentia initio eſt 100, et poſt quinque min. pr. 95. gr. poſt 10. minuta erit 90½ gr. (3) Ex lege decrementi et incrementi caloris etiam deriuauit autor thermometra perfecte concordantia et aeque velocia non obtineri, niſi ſuperficies bulborum Thermometricorum ſint, vt volumina bulborum.

TENTAMEN LEGEM EVAPORATIONIS AQVAE CALIDAE IN AERE FRIGIDIORI CONSTANTIS TEMPERIEI DEFINIENDI. AVCT. G. W. RICHMANN.

Inquiſiuit etiam idem autor in euaporationem, et primo euaporationem ex ſuperficie aquae calidioris aëre examinauit, et inuenit ex obſeruationibus in tentamine ſua definiendi legem euaporationis, quantitates euaporatas in conſtanti aëris temperie eſſe ferme in ratione ſpatiorum Logarithmicae cuius ſemiordinatae exhibent differentias inter temperiem aquae et aëris, ſeſe ſucceſſiue excipientes, et abſciſſae tempora, vel, ob conſtantem ſubtangentem, eſſe vt differentias differentiarum inter temperiem aquae et aëris.

MEDITATIONES DE CALORIS ET FRIGORIS CAVSA. AVCT. M. LOMONOSOW.

Calorem in motu materiae conſtare oſtenditur, §. 1. Motum illum calidis corporibus ineſſe, quamuis non ſemper percipiatur ſenſu, §. 2. Calorem conſtare in motu materiae inteſtino probatur, §. 3. Motum inteſtinum materiae coherentis caloris cauſam eſſe aſſeritur §. 4,

quod §. 5., confirmatur. Motus inteſtinus triplex indicatur, progreſſuus, tremulus, gyratorius, §. 6. Calorem conſiſtere in motu materiae coherentis inteſtino gyratorio docetur, §. 7-11. Ad obiectionem reſpondetur, §. 12. Conſectaria nonnulla eliciuntur, §. 13. Theoria ad phaenomena prouocatur, §. 14. Quartuordecim phaenomenis confirmatur, §. 5.-25. Quid de intumeſcentia calentium corporum iudicandum ſit innuitur, §. 26. Summum frigoris gradum in orbe noſtro terraqueo non dari ex propoſita theoria infertur, §. 27. Hypotheſis de propria calori materia per corporum poros vagabunda ad examen vocatur, §. 28. Corporibus aucto calore intumeſcentibus acceſſum calorificae alicuius materiae non argui §. 29. et 30; nec incremento ponderis calcinatorum, nec condenſatione radiorum ſolis per inſtrumenta cauſtica, nec denique experimentis circa materiam frigorificam inſtitutis idem euinci oſtenditur, §. 31-33. Quod aetheris officium ſit circa producendum calorem indicatur, §. 34. Frigoris propria materia breuiter refutatur 35.

TENTAMEN THEORIAE DE VI AERIS ELASTICA. AVCT. M. LOMONOSOW.

Poſt inuentam antliam pneumaticam multa quidem in natura aeris detecta, verumtamen cauſa elaterii nondum ſatis explicata eſſe cenſetur, §. 1. Hypotheſes viribus centralibus innixae prae reliquis placent, §. 2. Quid in illis deſideretur, aut potius ſuperfluum ſit, oſtenditur

ditur, §. 3. A clara notione elateris aeris explicandi initium capitur, §. 4. Elaterem aeris non ab organicis et compositis quibusdam moleculis, sed a simplicissimis et solidissimis atomis illius proficisci ostenditur, §. 5 - 7. Figura atomis elaterem producentibus sphaerica et superficies aspernula conuenientissima esse iudicantur, §. 8 et 9. Particulas aeris elaterem producentes non interfuso aliquo fluido, aere ipso subtiliore, sed mutua ipsarum actione a se inuicem pelli docetur, §. 10 - 12. Particulas aeris calore in gyrum actas et asperis superficiebus collisas a se inuicem resilire, indeque elaterem illius pendere probatur, §. 12 - 17. Exemplo explicatur theoria, §. 18 praecipua phoenomena, quae aer exserit, explicantur, eoque theoria proposita magis adstruitur 19. et seqq.

DISSERTATIO DE ACTIONE MENSTRVORVM CHYMICORVM IN GENERE AVCT. M. LOMONOSOW.

Inter abstrusas Chymicorum phoenomenum causas ea solutionis inuestigatione digna inprimis esse indicatur, §. 1 et 2. Vulgaris explicandi ratio in sola pororum et corpusculorum magnitudine et figura quaesita reiicitur, §. 3 - 6. Ingressum menstruorum in poros soluendorum fieri ob homogeneitatem materiae ostenditur, §. 7 - 10. Propositum indicatur, §. 11 et 12. Phaenomena solutiones comitantia inter se contraria, nempe spirituum acidorum cum metallis incalescentia et aquae cum salibus refrigeratio pro fundamento ponuntur, §. 13. Metalla aëris vi

quod §. 5., confirmatur. Motus inteſtinus triplex indicatur, progreſſiuus, tremulus, gyratorius, §. 6. Calorem conſiſtere in motu materiae coherentis inteſtino gyratorio docetur, §. 7-11. Ad obiectionem reſpondetur, §. 12. Conſectaria nonnulla eliciuntur, §. 13. Theoria ad phaenomena prouocatur, §. 14. Quartuordecim phaenomenis confirmatur, §. 5.-25. Quid de intumeſcentia calentium corporum iudicandum ſit innuitur, §. 26. Summum frigoris gradum in orbe noſtro terraqueo non dari ex propoſita theoria infertur, §. 27. Hypotheſis de propria calori materia per corporum poros vagabunda ad examen vocatur, §. 28. Corporibus aucto calore intumeſcentibus acceſſum calorificae alicuius materiae non argui §. 29. et 30; nec incremento ponderis calcinatorum, nec condenſatione radiorum ſolis per inſtrumenta cauſtica, nec denique experimentis circa materiam frigorificam inſtitutis idem euinci oſtenditur, §. 31-33. Quod aetheris officium ſit circa producendum calorem indicatur, §. 34. Frigoris propria materia breuiter refutatur 35.

TENTAMEN THEORIAE DE VI AERIS ELASTICA. AVCT. M. LOMONOSOW.

Poſt inuentam antliam pneumaticam multa quidem in natura aeris detecta, verumtamen cauſa elateris nondum ſatis explicata eſſe cenſetur, §. 1. Hypotheſes viribus centralibus innixae prae reliquis placent, §. 2. Quid in illis deſideretur, aut potius ſuperfluum ſit, oſten-

ditur

ditur, §. 3. A clara notione elateris aeris explicandi initium capitur, §. 4. Elaterem aeris non ab organicis et compositis quibusdam moleculis, sed a simplicissimis et solidissimis atomis illius proficisci ostenditur, §. 5 - 7. Figura atomis elaterem producentibus sphaerica et superficies aspernla conuenientissima esse iudicantur, §. 8 et 9. Particulas aeris elaterem producentes non interfuso aliquo fluido, aere ipso subtiliore, sed mutua ipsarum actione a se inuicem pelli docetur, §. 10 - 12. Particulas aeris calore in gyrum actas et asperis superficiebus collisas a se inuicem resilire, indeque elaterem illius pendere probatur, §. 12 - 17. Exemplo explicatur theoria, §. 18 praecipua phoenomena, quae aer exserit, explicantur, eoque theoria proposita magis adstruitur, 19. et seqq.

DISSERTATIO DE ACTIONE MENSTRVORVM CHYMICORVM IN GENERE AVCT. M. LOMONOSOW.

Inter abstrusas Chymicorum phoenomenum causas ea solutionis inuestigatione digna inprimis esse indicatur, §. 1 et 2. Vulgaris explicandi ratio in sola pororum et corpusculorum magnitudine et figura quaesita reiicitur, §. 3 - 6. Ingressum menstruorum in poros soluendorum fieri ob homogeneitatem materiae ostenditur, §. 7 - 10. Propositum indicatur, §. 11 et 12. Phaenomena solutiones comitantia inter se contraria, nempe spirituum acidorum cum metallis incalescentia et aquae cum salibus refrigeratio pro fundamento ponuntur, §. 13. Metalla aëris vi

elaſtica in poris eorum renata ſolui docetur, §. 51 - 27. Veritas experimentis confirmatur §. 28 et 29, et §. 30 - 34, phoenomenis explicatis vlterius probatur. Mathematico calculo denique adſtruitur, §. 35 - 38. Sales in aqua ſolui ſola frictione et confuſione corpusculorum illius cum aqueis particulis ſalium oſtenditur, §. 39 - 47 Solutiones in mediatas et immediatas diuiduntur, §. 48 et 49. Suſpenſarum in menſtruo particularum fit mentio §. 50.

DE MOTV AERIS IN FODINIS OBSERVATO. AVCT. M. LOMONOSOW.

Primo phoenomeni obſeruatio et deſcriptio ex Georgio Agricola proponitur. Tandem §. 1 - 9. definitones cum corollariis exhibentur. Denique §. 10 - 24. oſtenditur, ex diuerſa denſitate aëris fodinarum ab ea quam externus habet, motum hunc naſci, et cum in fodinis aëris calor ſit conſtans, externi vero varius, et quidem maior aeſtate, hyeme minor, reciprocantes fluxiones inde proficisci. Vltimo vſus huius theoriae breuiter indicatur.

DE INSIGNI PARADOXO PHYSICO AERE SCIL. IN 1837. VOLVMINIS PARTEM AQVA GELASCENTE REDVCTO, ET DE COMPVTATIONE VIS QVAM AQVA GELASCENS ET SESE IN MAIVS VOLVMEN EXPANDENS IN SPHAERA CAVA FERREA, BOMBA, DICTA, AD EAM DISRVMPENDAM IMPENDIT, COGITATIONES ET CONSILIVM QVOMODO REPETI DEBEAT EXPERIMENTVM. AVCT. G. W. RICHMANN.

Auctor examinauit quantum paradoxo Haleſii experimento de compreſſione aëris, aqua congelaſcente

in

in 1837 voluminis partem redacti, tribuendum sit et concluſit nihil certi hinc deduci poſſe. Simulque in calculo, Cl. de Buffon, qui Cel. Halleſii computationem vis comprimentis aërem emendare voluit, errorem detexit.

TENTAMEN EXPLICANDI PHAENOMENON PARADOXON SCIL. THERMOMETRO MERCVRIALI EX AQVA EXTRACTO, MERCVRIVM IN AERE AQVA CALIDIORI DESCENDERE ET OSTENDERE TEMPERIEM MINVS CALIDAM, AC AERIS AMBIENTIS EST, A. G. W. RICHMANN

Phaenomenon in Obſeruationibus thermometricis paradoxon ſequens occurrit. Si in aëre temperiei definiti gradus ex aqua temperiei paulo minoris gradus thermometrum extrahitur, tantum abeſt, vt aſcendat mercurius in thermometro, vt potius deſcendat modo plus modo minus. Huius paradoxi explicationem aliqualem idem autor ſuſcepit in tentamine explicandi phaenomenon paradoxum ſcil. thermometro mercuriali ex aqua extracto mercurium in aëre aqua calidiori deſcendere, et oſtendere temperiem minus calidam ac aëris ambientis eſt, et viſum eſt ei, materias quasdam in aëre volitare, quarum concurſu et vnione cum cuticula aquea bulbum thermometri ambiente, inter euaporandum, refrigerium oriretur.

SYNOPSIS METHODI NOVAE TVBOS MAIORES TRACTANDI. AVCT. C. G. KRATZENSTEIN.

Cum aſtronomis in obſeruationibus coeleſtibus nihil magis incommodo ſit, quam tractatio tuborum praeſertim maio-

siorum, licet etiam optimis fulcris Hugenianis, Hirianis etc. vtantur, autori visum est, hocce incommodum non melius posse remouari, ac si tubus plane immobilis in situ quodam commodo, e. g. horizontali constituatur, et tum radii obiectorum, in vna eademque semper directione fixati quasi, ad tubum deferantur. Exhibita nuper per Cel. S' Gravesande in nouiss. edit. physices machinula quadam incogniti inuentoris, quae ad experimenta optica melius instituenda speculum per horologium in eo semper positu gerit, vt radius solis in cameram obscuram reflexus eandem semper seruet directionem, non dubitauit autor hanc intento scopo suo optime posse accommodari. Describit itaque hanc machinam mutatis nonnullis dispositionibus, prout ipsi scopo astronomico magis conuenire visum fuit.

Huc pertinent loculamentum anterius ex horologio remotum, quia rotarum in illo contentarum vacillatio euitari nequit, et dispositio fulcri, vt totum instrumentum statim in situm obseruationi conuenientem redigi possit. Determinat deinde dispositionem et diuisionem rotarum singularum, quam Cel. S' Gravesande horologipoeorum iudicio reliquit; ostendit denique in quo vsus et commoditas huius methodi consistat.

Spectator nimirum iam ad tubum quoad eius directionem sedet otiosus et quietus, metitur diametros apparentes, delineat maculas, determinat phases et adtendit ad motum vertiginis planetarum, absque quod motus eorum diurnus et progressiuus ipsi vllo incommodo esse possit. Et quis dubitabit ad multa phaenomena e. g. annulum

nullum Saturni, ſtrias, Iouis etc. dum quaſi quieſcunt, multo melius poſſe attendi, ac dum motu continuo feruntur et obſeruatorem duplici labore occupatum tenent.

Obiectiones quae contra hanc methodum ex imperfectione ſpeculorum metallicorum fieri poſſent, inde refutat, quia noſtris temporibus actu conſtruuntur ſpecula metallica tantae perfectionis, vt cum optimis vitris obiectiuis de praecellentia certare poſſint.

SVPPLEMENTVM AD DISS. DE VI AERIS ELASTICA. AVCT. M. LOMONOSOW

Cauſa huius ſupplementi proponitur, §. 1. Bernoulliana deductio citatur, elaſticitates aëris in magnis compreſſionibus denſitatibus proportionales non eſſe §. 2. Deinde ad §. 10 vsque ex ruptis vi aquae globis per calculum deducitur conſectarium Bernoulliano geminum. §. 11. - 13. quomodo id cum propoſita ſuperius theora conſentiat, oſtenditur.

PHYSICA.

I. WEITBRECHTII, DE VTERO MVLIEBRI OBSERVATIONES ANATOMICAE.

Quas deſideratiſſimus Collega paucis ante obitum hebdomadibus conuentui exhibuerat obſeruationes Anatomicas, dum recenſere adgredimur, non nobis propoſitum eſt, eas integras hic inſerere; quoniam citra mutilationem vix contractionem pati videntur, ſed ſaltim

paucis exponere, quae potissimum ex obseruationibus suis circa quatuor cadauera foeminina, mulieris septem mensis praegnantis, duarum vetularum et virginis theatro Anatomico anno 1746. illatis, praesertim autem circa vterum praegnantem institutis, deduxerit corollaria, quae si non noua omnia videbuntur, aliqua tamen cum Cl. Auctore speramus fore, quae ad huius partis historiam amplificandam et perficiendam facere poterunt: sed ad propositum.

§. 1. et 2. Cl. Auctor discrimen inter tumorem circa praegnantes et anasarcodem aut asciticum eum in finem adducit, quia cautelas quasdam suggerit, quae in mulierculis vere an falso grauidis, ex solo habitu externo diiudicandis, obscurae saepe rei, lumen adspergere possunt.

§. 4. Mentem suam de disputatione quae inter artis obstetricandi magistros viget, circa determinationem crassitudinis vteri grauidarum aperit et phaenomena a se obseruata magis fauere docet sententiae illorum, qui vterum grauidum attenuari perhibent.

Porro veretur, ne qui a Mauricello dissentiunt, causa sua cadant.

§. 7. Docet, difficile indagatu esse, an vteri interna cauitas singulari tunica inuestiatur, obseruationes autem suas magis illorum sententiae fauere, qui illam negant.

§. 9. Quomodo cauitas vteri praegnantis et virginei inter se differant explicat, huncque non dici posse concauum s. in eo cauitatem aliquam spatiosam, laqueatam, turgidulam non esse fingendam, quoniam paries eius anterior et posterior sibi ceu planum plano accumbunt

bunt, et ſolo muco interſtinguuntur, ne concreſcant; Ille vero in ampullam expandatur. Hinc praegnantem vterum recte veſicae inflatae, virgineum vero lagenae compreſſae aequiparari.

§. §. 10. et ſeq. quae circa ceruicem vteri, haud exiguam quippe huius organi portionem, obſeruauerit, profert, et exinde §. 14. ſeq. notat, haec obſeruata ad multas veritates viam pandere. Primo ſcilicet exinde aſſertum *Grafii* confirmari docet, qui ſtabiliuit, collum non ſequi dilatationem vteri grauidi, ſed priſtinum fere ſtatum retinere, id quod de mediis geſtationis menſibus intellectum vult. Exinde opinionem eorum confellit qui vteri praegnantis ceruicem ſibi fingunt, ceu vnicum oſculum, annulo quaſi membraneo occluſum, qui paulatim mollior fiat et amplior, donec ita hiet vt foetum transmittere poſſit; hinc a *Deuenter* in novo Lumine Obſt. p. 4. pictam figuram corrigendam cenſet.

§. 15. Exinde apparere ait, quam difficile ſit primis menſibus ex ſolo tactu diiudicare, num foemina praegnans ſit, nec ne, et ex ſolo augmento ceruicis aliquid veri concludere, exercitatiſſimam multum et acutum iudicium requirere, id quod ab obſtetricibus popularibus non facile expectandum ſit.

§. 16. Rationem affert, quare (aliis tamen cauſis neutiquam poſthabitis) mulieres, quae primis vel mediis menſibus abortum patiuntur, doloribus multo vehementioribus et acutioribus diſcruciari ſoleant, quam ſi iuſtum parturiendi terminum attigerint.

§. 17. Ex compreſſa ceruicis figura et muco lento

tenaci totam cauitatem et omnia eius foraminula ab vno oſculo ad aliud obſidente, recte colligi poſſe arbitratur, vterum praegnantem perfecte clauſum eſſe, omnemque igitur introitum vel aëri vel alii cuipiam humori denegari nullamque in ſyſtemate vermiculari ſuperfoetationem fieri poſſe,

§. 18. Tandem etiam has obſeruationes ad illuſtrandam hiſtoriam ouulorum *Nabothianorum* facere commemorat, ſuamque coniecturam ſequentibus exponit. Quod arbitretur iſtas veſiculas *Nabothianas* non eſſe particulas organicas aut conſtitutiuas corporis animalis, non igitur eſſe ouula neque etiam eſſe hydatides morboſas, ſed eſſe corpuſcula plane fortuita, maceratione et contrectatione nata. Quam ſuam coniecturam admodum reddit probabilem et poſtquam figuras duas (quarum altera vterum ex muliere ſeptimum menſem praegnantis ſecundum longitudinem apertum, vt cauitas interior laterum, craſſitudo et ſinus venoſi cum directione fibrarum pateant, comprehendit, altera vero ceruicem vteri praegnantis apertam cum portione vaginae ſiſtit,) explicuerat, diſſertationi huic eruditae finem imponit.

A. K. BOERHAAVE, HISTORIA ANATOMICA OVIS PRO HERMAPHRODITO HABITI.

Dum Celeberrimus Auctor in diſſectionibus cadauerum ſaepenumero, tam in maſculino, quam foeminino ſexu inſtitutis, praecipue attentus fuit ad corporis humani, quoad partes externas in genere, ſpeciatim autem ad genitalium et pudendorum diuerſitatem, vix vn-

vnquam eandem perfecte figuram tam in internis quam externis a se obseruatam ait, licet partes constituentes in genere similes fuerint.

Consuesse quidem plerosque, si pudenda vel defectu vel augmento peccent, et deformationem quandam monstrent de hermaphroditis cogitare, qui an re ipsa dentur, scilicet in vtramque venerem paratos cum foeminis concumbentes et vicissim viros admittentes, nonsolum non determinat vir Clar. (ad negatiuam potius procliuis sententiam) sed et testimonio auctorum suffultus, vehementer dubitat, an tales existant, in quibus vnus sexus praevaleat, addito genitalium alterius quodam supplemento, quoniam hi attentius examinati vltimum hoc deformatum nec peruium, nec ad opus aliquod venereum aut vrinae excretionem aptum, gerant. Hac occasione mentionem iniicit memorabilis historiae quam *Regnerus de Graf*, de puero post mortem puella inuento narrat et quae ipse notauerat circa pauperem foeminam, viginti et vltra annis hermaphroditum a natiuitate declamatam, affert.

His praemissis rariorem illum casum, forsan in historia naturali nullibi notatum commemorat de quatuor hominibus sibiricis ex duobus parentibus natis, eadem exacte genitalium deformatione praeditis, quos occasione descriptionis a Cl. *Gmelino* in Sibiria factae et ad Academiam Imperialem missae, e Sibiria arcessere, operae pretium iudicatum fuit.

Postquam autem paucis diuersas hac de re Academicorum *Gmelini*, *Weitbrechtii* et *Wildii* sententias in prolixioribus dissertationibus expositas, quam vt in

Commentariis locum inuenirent, (quem in finem nec conſcriptae videantur) recenſuiſſet, ſimulque miratus eſſet, quod ad hanc litem componendam, nemo de demetiendo corpore cogitauerit, quoniam conſtat, viri corporis truncum conuergere inferiora verſus, foeminae contra latius diuergere. Bono quodam fortunato accidiſſe ait, quod ouis mas, ob partium genitalium deformationem pro hermaphrodito habitus, ad Academiam allatus ſit, quem obſeruatis in hominibus ſibiricis ſimillimum examinando deprehendit, prouti ex deſcriptione prolixiori huius anatomes, figurisque ad illuſtrationem dictorum aeri inciſis vberius perſpici poteſt.

E qua deſcriptione patere ait, ouem hic pro hermaphrodito habitum verum fuiſſe marem, in quo partes genitales externae defectu peccent; et nihil *omnino* in his apparuiſſe, quod alterius ſexus ſignum indicauerit, aut additamentum.

Tandem putat, ſi deſcriptio partium genitalium externarum atque harum figura, in oue cum deſcriptione et figuris, quas laudati viri Celeb. de hominibus Sibiricis dederint, comparetur, apparere, has ita inter ſe conuenire, vt facile ex inquiſitione Anatomica partium internarum, quam in oue equidem ipſe vir Celeberrimus inſtituere potuit, quod ſupra commemoratis viris in vivis hominibus facere haud licuit, litem de ſexu finitam eſſe. Quodque, vt hic ouis, ita homines Sibirici habendi ſint pro maribus non pro foeminis, quodque mixtus in illis neutiquam ſit ſexus, et immerito illis nomen hermaphroditorum imponatur.

ABR.

ABR. KAAV BOERHAAVE OBSERVATIONES ANATOMICAE

Quinque hac dissertatione cum lectoribus communicat obseruationes Cel Boerhaauius, de quibus praegustum aliquem dare propositum nobis est.

Principio monet Cel. auctor fieri forsan posse, vt qui hic exponantur casus, iam alibi ab auctoribus annotati inueniantur, hoc ipsum autem vix euitari posse, quoniam inter tot dissectiones aut lustrationes cadauerum, quae ipsi offeruntur, plus intentus esse debeat in vsum anatomes, aut causam mortis inuestigandam, quam in lectionem variorum librorum; quae autem insolita ipsi occurrunt, se fideliter in aduersaria in futuros vsus referre solere, hinc si accidat, vt casus talis, ex aduersariis prolatus, ab aliis annotatus inueniatur, veritatis simplicitatem eo firmiorem euasuram sperat.

Circa cerebrum inflammatum in prima obseruatione, in latere dextro durae matris itidem valide inflammatae, partem concauam totam succinctam fuisse membrana animaduertit, eamque fuse describit, in medio tamen relinquit, an pars sit peculiaris in hoc homine connata, an a summa inflammatione orta, aut humores crassiores serosi a vasibus nimium dilatatis, borea et frigore superveniente, concreti hanc formauerint.

Quae circa cranium militis classiarii obseruata sunt, vbi scutum osseum cum dura matre concretum inuenit prolixe secunda exponit obseruatio, quae non solum harum causam adducit, sed et alias notatu dignas hac occasione offert, annotationes et meditationes.

Ter-

Tertia obſeruatio continet cerebri inflammationem in ſuppurationem et gangrenam ſe terminantem, vbi rupta in anteriori cerebri loco vomica mortem ſubitaneam homini ebrio conciliauerit, qua occaſione profert alias obſeruationes, et varios allegat auctores, qui de abſceſſibus intra cranium, inter duram matrem et cranium intra duram et piam matrem et in cerebri ventriculo in ipſaque cerebri ſubſtantia aliquid memoriae prodiderunt, inter quos et Hippocratem adducit.

In quarta obſeruatione occaſione pericardii cum corde concreti prolixe neceſſitatem et praeſentiam pericardii validiſſimis adſtruit argumentis et ſuam autopſiam doctiſſimi aduerſarii autopſiae in elephante diſſecto opponit.

Quinta tandem obſeruatio, quae in cadauere viri in noſocomio maritimo Petropolitano lenta febri enecto notata fuerunt exponit, ſcilicet omnia viſcera abdominis et thoracis vidit inter ſe concreta, ſuo tamen loco diſpoſita, vt nullum plane liberum foret, et omnes has concretiones (vti tunc temporis auditoribus ſe exhibuiſſe teſtatur) fuiſſe per membranas extenſas, quae duplicaturae concretae tenacula effecerunt. Qua occaſione, quam de harum ortu fouet, ſententiam more ſolito, id eſt doctiſſime exponit.

ST. KRASCHENINNIKOW DESCRIPTIONES RARIORVM PLANTARVM.

Quatuor in hac diſſertatione nouarum plantarum ſpecies deſcribit clare doctus D. Adjunctus, quae in horto

horto Academico botanico e feminibus ad Academiam miſſis, floruerunt, *Perſicariam* ſcilicet, *Saluiam*, *Lunariam* et *Thalictrum*, copioſeque recenſet, quae circa vegetationem ſingularum obſeruauerit, quae in ipſa diſſertatione relegenda ſunt.

Quod ad *Perſicariam* attinet, nos pro more breuiter notamus, illam ſeptentrionalibus imperii Sinarum regionibus familiarem eſſe, ibidemque ad conficiendum coeruleum pigmentum, *Indigo* dictum, materiam praebere, id quod a Rev. Gaubilo, Academiae noſtrae membro honorario, didiciſſe ſe ſcribit. Addit porro rationem, cur eam Perſicariae foliis ouatis glabris nomine ſalutauerit.

De *Saluia* refert, eam non tantum foliis cordatis obtuſe crenatis, aut ſpicis florum nutantibus, ſed caulibus nudis, ramis cauli approximatis et parallelis, non difficulter a congeneribus diſtingui poſſe.

De natali huius plantae loco ſibi quidem pro certo non conſtare fatetur, auditu tamen ſe percepiſſe ſcribit, eam e feminibus a *Cl. Gerbero*, Florae Tanaicenſis auctore lectis, propagatam, hincque credibile eſſe naſci eam in adiacentibus Tanai regionibus.

Lithariam quod ſpectat, quoniam Stellerus eam in America ſeptentrionali maturum iam fructum ferentem legerit, et ſub nomine Leucoii ſaxatilis deſcriptam dederit, idcirco primo Stelleri deſcriptionem ſiſtit, tum ſuam adiicit, partim ad ſupplendam Stelleri deſcriptionem, partim vt appareat, quantum diuerſa ſoli natura vnam eandemque plantam immutare valeat: Rationem deinde

reddit, cur Lunariae eam iunxerit et non nouum genus constituerit.

Tandem *Thalictrum*, quod e seminibus a Stellero in Camschatka lectis, prodiit, pro noua specie describit, differentiamque eius a congeneribus addit.

ASTRONOMICA.

DE MOTV NODORVM LVNAE EIVSQVE INCLINATONIS AD ECLIPTICAM VARIATIONE. A. L. EVLERO.

Quicunque theoriam lunae breuiter, sed clare ac perspicue pertractatam legere gestiunt, iis *dissertationem* hanc Cel. Euleri, nec non sequentem, quae quantum motus terrae a luna perturbetur accuratius inquirit, merito commendamus. Instituti nostri ratio equidem poscceret, vt praecipua contenta hic exponamus, veremur tamen valde, ne, dum breuiores Cel. auctore esse volumus, lectoribus nostris obscuriores fiamus, hinc aliquem saltem praegustum altarum harum speculationum dediſſe, fontemque ipsum monstrasse contenti erimus.

Lunam scilicet, corpus inter omnia coelestia nobis proximum, cuius distantiam ope parallaxeos sine sensibili errore assignare valemus, quo subsidio circa solem, praecipue autem fixas adhuc caremus, motum habere asserit vir. Cel. adeo implicatam, totque perturbationibus obnoxium, vt nullis adhuc certis legibus circumscribi

et

et ope tabularum exacte determinari potuerit, quoniam non in vno eodemque plano, ſicut planetae, motum abſoluat, et eius diſtantia maxima et minima variabilis ſemper et inconſtans deprehendatur. Hinc inaequalitatem eius non ad vnicam aequationem reuocare licuiſſe, ſed plures fuiſſe condendas tabulas aequationum, quae quamuis calculum effecerint moleſtiſſimum, tamen non perfecte cum coelo conſentire deprehenſas fuiſſe.

§. 2. Docet, non obſtante motu hoc perturbato theoriam ſummi *Neutoni*, *Kepleri* legibus ſuperſtructam maximopere conducere ad ſoluendas difficultates circa motum contumaciſſimi huius ſideris obuias, tametſi attractionem, quam ſectatores *Neutoni* ad omnia prorſus corpora extendere atque adeo proprietatibus materiae annumerare ſunt conati, tanquam auſum nimis temerarium reiiciat, quoniam pro vſu Aſtronomico ſufficiat, noſſe eiusmodi vires in mundo re ipſa exiſtere, quarum effectus, cum ſolus ſpectetur, perinde ſit cauſa ſiue cognita ſiue incognita.

Id ſaltim nos lucrari, quod poſitis his principiis, quo omnia corpora coeleſtia ſe mutuo attrahere ſtatuuntur, determinatio motuum qui in coelo fiunt ad reſolutionem problematum mechanicorum reducatur, prouti fuſius et eleganter §. 3. exponitur, et tandem euincitur Magnum *Neutonum*, qui ipſe primum hoc negotium aggreſſus, incredibileque ſtudium in hac quaeſtione enodanda poſuit, ſummas difficultates ob oculos ponere, quibus iſte calculus adhuc laboret, tantum abeſſe, vt ſuſceptum hoc opus aut ipſe, aut qui poſt eum huic negotio ſe applicuerunt, confece-

rit, praeſertim dum hi vltimi vix idem praeſtiterint, in quo *Neutonum* feliciter praeeuntem habuere, non tamen negat tabulas Aſtronomicas ad mentem huius viri ſummi conditas, multo propius locum lunae quouis tempore, quam reliquas exhibere.

§. 4. Exponit vir Cel. quid eum impediuerit, vt tentatum hunc a ſe laborem non perfecerit, et tandem aperit, quomodo in praeſentem modum quo problema hoc ſoluere adgreditur inciderit, quo mediante lineam nodorum lunae et inclinationis eius ad eclipticam variationem, quae res aliis methodis vix calculo comprehendi poſſunt, ſatis commode definire ipſi licuit, et cui viae inſiſtendo haud dubitat, quin reliqua motus lunae phaenomena multo felicius explicari queant.

§. 5. A faciliori problematis ſolutione orditur, et notari vult, quoniam ſpectatorem in terra concipiat eiusque reſpectu motum omnem diiudicat, motum terrae tam in ſolem quam in lunam contrario modo inducendum et ſingulas vires, quibus terra ſollicitatur pariter in contrariis directionibus tam ſoli quam lunae affigendas eſſe.

Paragraphis ſequentibus vires determinat quibus motus ſolis perturbatur et ſic totam ſolis theoriam §. 11. abſoluit ſimulque methodum qua vtitur clare exponit.

Hinc §. 12 ad lunam progreditur et vt terram quieſcentem obtineat etiam hic, prouti ſupra in ſole factum, in directionibus contrariis vires, quibus terra incitatur in lunam transfert.

Et tandem §. 19. determinat celeritatem lineae nodo-

dorum retrogradam directe esse, vt cosinus distantiae lunae a sole, sinus distantiae solis a nodo et sinus distanniae lunae a nodo coniunctim, reciproce vero vt cubus distantiae solis a terra et celeritas lunae secundum longigitudinem, ita vt motus lineae nodorum ab his quinque elementis pendeat, hanc autem expressionem mirifice cum *Neutoni* determinatione L. III. pag. 30 princ. congruere docet.

In sequentibus paragraphis vsque ad 31 §. quid singulae hae aequationes, si fiant, maximae efficere possint, adducit, et ob harum nonnullarum in tabulis Astronomicis neglectum ipsas non mediocri emendatione indigere afferit, in reliquis 32 - 34 §. variationem inclinationis orbitae lunae quoque determinat, et quamuis differentiam inter inclinationem maximam et minimam duobus fere minutis primis maiorem quidem quam tabulae exhibere solent deprehendat, tamen ideo eam in suspicionem cadere haud posse affirmat, tum quoniam in tabulis quaedam aequationes, vti supra innuimus, neglectae, tum quia per obseruationes vehementer est difficile hos limites exactissime constituere.

QVANTVM MOTVS TERRAE A LVNA PERTVRBETVR ACCVRATIVS INQVIRITVR. A. L. EVLERO.

In superiori dissertatione dum Cel. Eulerus nouas pro motu solis tabulas condere conatus fuit, assumpserat commune centrum grauitatis terrae et lunae, in ellipsi circa solem in eius foco existentem, reuolui atque ex loco lunae aberrationem centri terrae ab ista ellipsi ad quod-

vis tempus assignauerat. Haec autem hypothesis cum ad veritatem proxime quidem accedat, non autem cum ea perfecte conueniat, idcirco sibi proposuit vir Cel. in istum errorem diligenter inquirere, quo ista hypothesis a veritate recedat, et hunc in finem deuiationem terrae de orbita elliptica ex ipsis sollicitationibus lunae inuestigare conatur, nulla communi centri grauitatis ratione habita, quod quidem negotium ad maxime complicatos calculos auctorem deduxit, cum illa hypothesis rem facillime expediuisset.

Nos missis his difficultatibus in dissertatione ipsa feliciter expeditis paucis attingimus, virum Cel. inter maximorum Geometrarum *Neutoni* et *Danielis Bernoullii*. quorum prior massam terrae ad massam lunae vt 39. ad 1, alter vt 62. ad 1. statuit, mediam quandam determinationem inuenisse, statuendo massam terrae quadragesies octies grauiorem esse luna, maximam correctionem loci solis in ecliptica 16″. 38‴, et maximam correctionem log. distantiae solis in syzigiis 34 ad logarithmum e 6. notis constantem vel addendam vel subtrahendam esse, et tandem demonstrasse, quod tabulae suae solares, prouti ex hac dissertatione sequi videbatur, nondum notabili indigeant emendatione.

G. W. KRAFFTII OBSERVATIO ECLIPSIS SOLARIS DIE 25. IVL. 1748. TVBINGAE FACTA.

Quomodo vir Cl. eclipsin solis cum maculis in eo haerentibus d. 25 Iul. 1748 st. n. Tubingae obser-

ſeruauerit, quaſque ſimul inſtituerit obſeruationes meteorologicas, hic commode, niſi deſcribendae eſſent, referri non poſſunt.

Quod idem de Cl.

HEINSII OBSERVATIONE ECLIPSIS LVNAE PARTIALIS d. 30 Aug. 1746 INSTITVTA,

vt et de Cl.

BRAVNII ET POPOVII IN OBSERVATORIO IMPERIALI DIE $\frac{19}{30}$ IVL. ET $\frac{29 \text{ Iul.}}{9 \text{ Aug.}}$ 1748 HABITIS OBSERVATIONIBVS ECLIPSIS SOLIS ET LVNAE

intelligendum, quapropter harum rerum curioſos ad Commentarios ipſos remittimus.

C. N. DE WINSHEIM, DE ABERRATIONE FIXARVM.

Recenſionum harum auctor, has de aberratione fixarum manuductiones, rogatus a collegis in vſum obſeruatorii Petropolitani in ordinem redegit, easque ideo publici iuris fieri permiſit, quoniam experientia iam edoctus fuit, etiam mediocria ingenia, qui nullam vel paruam analyſeos habuerunt cognitionem, doctrinam hanc, non aeque clare ac perſpicue vbique propoſitam, mediantibus his regulis, captui eorum magis accommodatis, ſibi admodum reddidiſſe familiarem.

OBSERVATIONES ALIQVOT COELESTES LIPSIAE 1746. aeſtate habitae, A. G. Heinſio.

Cl. Heinſius ante omnia inſtrumenta ſua deſcribit, quibus in praeſentibus vſus eſt obſeruationibus, eum potiſ-

potiſſimum in finem, vt in ſequentibus ad hanc deſcriptionem lectores ablegare poſſit. Hinc quadrantem cum ſuo errore, horologium oſcillatorium, nec non teleſcopium catadioptricum Gregorianum cum ſuis ſpeculis et ocularibus ſuſe deſcribit, ſimulque indigitat, quo apparatu in ſequentibus obſeruationibus eclipſium Iouialium vſus ſit, ſcilicet eo, quo per teleſcopium obiecti diameter 52. vicibus maior appareat, quam nudo oculo, quem vel ideo elegerit, quoniam in hoc ſtatu maximam lucis ſatellitum copiam obtinuit, ad quam conditionem reſpiciendum erat, cum in his obſeruationibus Iupiter plerumque in vicinia horizontis verſaretur, et altitudo meridiana Iouis vix 18. gradus ſuperauit, figuram tamen Iouis oualem faſcias atque ſatellites Iouis ſe diſtinctiſſime hoc ſuo apparatu coelo ſereno vidiſſe teſtatur vir Clariſſimus.

Deinde quatuor emerſiones d. 27. Iun. 4. 20. et 27. Iulii obſeruatas adducit; porro obſeruationes eleuationis poli Lipſienſis reſpicientes, partim ex altitudine ſolis circa ſolſtitium, partim ex altitudinibus nonnullarum fixarum ſumpta declinatione earumdem e catalogo Halleii et Caſſinii affert, mediamque quandam eleuationem ex iis deducit, quam cum eleuationibus a reliquis Aſtronomis aut captis, aut in catalogum latitudinum relatis, comparat.

Vltimo nonnullas obſeruationes refert meteorologicas pro maximo aeſtu Lipſiae d. 15. Iul. ſt. n. 1746. obſeruato determinando, quem cum aeſtu Petropoli olim ab auctore notato, et quem in inſula Borbonica 1734. obſeruatum fuiſſe in Commentariis legerat Pariſinis, comparat.

Con-

CONTINVATIO OBSERVATIONVM ASTRONOMICARVM Lipsiae habitarum 1746. st. n. Auct. G. Heinsio.

Hic vnicam adhuc emersionem 1 satellitis d. 12. Aug. obseruatam et eclipsin lunae partialem d. 30. Aug. 1746. a se conspectam exhibet Cl. Heinsius, de quibus hic dicere nil attinet, quoniam iam supra lectores ad Commentarios ipsos ratione huius et ceterarum ibi commemoratarum obseruationum ablegauimus.

CONTINVATIO OBSERVATIONVM LIPSIAE habitarum 1747. st. n.

Pergit Cl. Auctor cum Academia communicare, quas iisdem instrumentis, quae in superiori dissertatione descripserat et sub eodem telescopii apparatu obseruauit duas emersiones 1 satellitis Iouis, deinde quas circa solstitium brumale instituit obseruationes altitudinum solis affert, et collatis inter se praecedentibus obseruationibus, eleuationem poli Lipsiensem $51^{\circ}. 22' \frac{1}{2}$ figit.

Porro exhibet, quas de stellis variabilibus in constellatione Cygni nominatim P. et x. Bayeri instituit obseruationes, cum iis, quae a Cl. Astronomo *Godofr. Kirchio* et *Maraldi* habitae sunt, reuolutionemque variabilis in collo Cygni x scil. *Bayeri* rotunde $405\frac{1}{2}$. dierum determinat.

Tandem subiungit nonnullas obseruationes meteorologicas exhibentes maximam barometri altitudinem extraordi-

riam, nec non gradum maximi caloris et frigoris a thermometro mercuriali indicatum.

OBSERVATIO ECLIPSIS SOLARIS
die 25 Iul. 1748. Lipsiae habita a G. Heinsio.

Quomodo ad obseruationem hanc commode peragendam se praeparauerit, statum duorum suorum horologiorum oscillatoriorum respectu temporis veri examinando exponit Vir Clarissimus et quae ipsa die, qua eclipsis celebranda, obstiterint impedimenta commemorat, quo minus initium eclipsis exacte obseruare potuerit. Deinde praecipuas obseruationes institutas esse docet per tubum Astronomicum 3. pedum paris. longum, obiecta secundum diametrum 14. vicibus amplificantem, eaque clare repraesentantem, quem machinae parallacticae impositum, reticuloque instructum ob situm obseruatorii sui et ob campi repraesentationis $1\frac{1}{2}$. fere graduum prae ceteris ad hoc negotium aptum iudicauerat.

Ex mora disci solaris per filum horarium diebus praecedentibus saepenumero explorata tempus solare et diametrum solis in partibus diurni deduxit.

Reliquas autem obseruationes et deductiones iuxta methodum, quam fuse in descriptione eclipsis solis d. 4. Aug. st. n. 1739. Petropoli obseruatae exposuerat, instituit, prouti rerum coelestium scrutatores maxima cum voluptate a §. 4. ad 11. videbunt, in quo 11mo sequentia elementa deducta exhibet. Coniunctionem solis et lu-

nae veram reſpectu eclipticae, latitudinem lunae borealem, inclinationem orbitae lunae viſae ad circulum latitudinis verſus orientem, parallaxim lunae horizontalem, diametrum lunae horizontalem et diametrum ſolis.

Maculas ſolis in ſole conſpicuas quod attinet, harum poſitiones dum diebus 24. et 25. hor. pom. reſpectu diſci et diametri ſolis per appulſus limborum ſolis etc. determinatas adducit, et poſtea appulſus limbi lunaris ad nonnullas maculas durante eclipſi obſeruatas §. 13. affert.

§. 14. tandem commemorat ſe tempore obſeruationis maximae circa eam regionem marginis lunaris, qui extra ſolis diſcum extitit, et cornua in peripheria ſolis definiuit, nec vllum lumen nec annulum lucidum cuiusmodi ex atmoſphaera lunae vel inflexione radiorum ſolarium ad iſtam lunae marginem oriundum, alias ſuſpicari licuiſſet, per tubum machinae parallacticae impoſitum animaduertere potuiſſe, cornua potius optime terminata apparuiſſe.

Neque in fine eclipſis lunam, penitus e diſco ſolis egreſſam, ad marginem limbi ſolis adhuc maxime vicinum eiusmodi lumen per tubum Gregorianum oſtendiſſe, licet totus fere ſol extra campum repraeſentationis tubi poſitus fuerit, vt eiusmodi lumen, ſi quod daretur, ſenſibile effici poſſit.

Ve-

Venerem quoque ab aliis ſpectatoribus nudis oculis conſpectam, ab obſeruatore ad alias obſeruationes attento non animaduerſam eſſe aſſerit.

Et tandem §. 15. qui diſſertationem claudit, quae ab amico, tempore eclipſis inſtitutae ſint obſeruationes meteorologicae, praecipue quae thermometro in loco vmbroſo conſtituto et deinde ſoli expoſito acciderint, adducuntur.

INDEX
DISSERTATIONVM

Mathematicarum.

Leonardi Euleri, De ſuperficie conorum ſcalenorum, aliorumque corporum conicorum. p. 3.

Eiusdem Theoremata circa diuiſores numerorum. p. 20.

Eiusdem Variae demonſtrationes Geometricae. p. 49.

Eiusdem De propagatione pulſuum per medium elaſticum. p. 67.

Eiusdem Examen artificii naues a principio motus interno propellendi, quod quondam ab acutiſſimo viro Iacobo Bernoullio eſt propoſitum. p. 106.

Georgii Wolffgangi Krafftii, Diſſertatio Geometrica de problematibus aliquot conicis per analyſin concinne ſoluendis. p. 124.

Eiusdem Demonſtrationes duorum Theorematum Geometricorum. p. 131.

Phyſico-Mathematicarum.

Georgii Wolffgang. Krafftii, Obſeruationes Meteorologicae, factae An. 1745 Tubingae. p. 139.

Eiusdem Obſeruationes Meteorologicae, factae An. 1746 Tubingae. p. 147.

Geor-

Georgii Wilhelmi Richmanni, De quantitate caloris, quae poſt miſcelam fluidorum, certo gradu calidorum, oriri debet, cogitationes. p. 152.

Eiusdem Formulae pro gradu exceſſus caloris, ſupra gradum caloris mixti ex niue et ſale ammoniaco, poſt miſcelam duarum maſſarum aquearum, diuerſo gradu calidarum, confirmatio per experimenta. p. 168.

Eiusdem Inquiſitio in legem, ſecundum quam calor fluidi in vaſe contenti, certo temporis intervallo, in temperie aëris conſtanter eadem decreſcit vel creſcit, et detectio eius, ſimulque thermometrorum perfecte concordantium conſtruendi ratio hinc deducta. p. 174.

Eiusdem Tentamen legem euaporationis aquae calidae in aëre frigidiori conſtantis temperiei definiendi. p. 198.

Michaëlis Lomonoſowii, Meditationes de caloris et frigoris cauſa. p. 206.

Eiusdem Tentamen theoriae de vi aëris elaſtica. p. 230.

Eiusdem Diſſertatio de actione menſtruorum Chymicorum in genere. p. 245.

Eiusdem De motu aëris in ſodinis obſeruato. p. 267.

Georg. Wilh. Richmanni, De inſigni paradoxo Phyſico, aëre ſcilicet in 1837. voluminis partem aqua gelaſcente reducto, et de computatione vis, quam aqua gelaſcens et ſeſe in volumen expandens in ſphaera caua ferrea, Bomba dicta, ad eam diſrumpendam impendit, cogitationes. p. 276.

Georg.

Georg. Wilb. Richmanni, Tentamen explicandi Phaenomenon paradoxon, ſcil. thermometro mercuriali ex aqua extracto mercurium in aëre, aqua calidiori, deſcendere et oſtendere temperiem minus calidam ac aëris ambientis eſt. p. 284.

Chriſtiani Gottl. Kratzenſteinii, Mechanicae coeleſtis ſpecimen primum, continens: Nouam tubos longiores commodiſſime tractandi methodum. p. 291.

Michaëlis Lomonoſowii, Supplementum ad meditationes de vi aëris elaſtica. p. 305.

Phyſicarum.

Abr. Kaau Boerhaauii, Hiſtoria anatomica ouis pro hermaphrodito habiti. p. 315.

Ioſiae Weitbrechtii, De vtero muliebri obſeruationes anatomicae. p. 337.

Abr. Kaau Boerhaauii, Obſeruationes anatomicae. p. 353.

Stephani Kraſcheninnikowii, Deſcriptiones rariorum plantarum. p. 375.

Aſtronomicarum.

Leonardi Euleri, De motu nodorum lunae eiusque inclinationis ad eclipticam variatione. p. 387.

Eiusdem Quantum motus terrae a luna perturbetur accuratius inquiritur. p. 428.

Georgii Wolffg. Krafftii, Obſeruatio eclipſeos ſolaris d. 25. Iul. 1748. Tubingae facta. p. 444.

Chr.

Chriſtiani Nicolai de Winsheim De aberratione fixarum. p. 446.

Godofredi Heinſii, Obſeruationes aliquot coeleſtes Lipſiae habitae aeſtate An. 1746. p. 464.

Eiusdem Continuatio obſeruationum Aſtronomicarum Lipſiae habitarum An. 1746. p. 472.

Eiusdem Continuatio obſeruationum Lipſienſium An. 1747. p. 475.

Eiusdem Obſeruatio eclipſis ſolaris d. 25. Iul. 1748. ſt. n. Lipſiae habita. p. 482

Ioſephi Adami Braunii et *ſocii Nic. Popowii*, Obſeruatio eclipſis ſolis anni 1748 d. $\frac{14}{17}$, menſis Iulii in obſeruatorio Imperiali reparato Petroburgi, praeſente Illuſtriſſimo Comite de Raſumovsky Academiae Scientiarum Praeſide inſtituta. p. 495.

Eiusdem Obſeruatio eclipſis lunae a. 1748 die 29 menſis Iulii ſt. v. in obſeruatorio Imperiali reparato habita. p. 497.

* * *
* *
*

MATHEMATICA.

DE SVPERFICIE CONORVM SCALENORVM, ALIORVMQVE CORPORVM CONICORVM.

AVCTORE
L. EVLERO.

§. 1.

Quamquam natura conorum a longo iam tempore ita est inuestigata, vt nihil praetermissum videatur, in quo laboraremus; tamen in dimetiendis conorum superficiebus vltra conos rectos, quorum axes ad bases sunt normales, non processerunt veteres. Celeb. Varignonius in Miscell. Societatis Regiae Berolinensis Continuatione II. argumentum hoc prorsus nouum primus tractauit, atque lineam curuam, cuius constructio a quadratura circuli pendet, inuenit per cuius rectificationem area cuiusque coni scaleni assignari queat. Subiuncta autem huic dissertationi ibidem reperitur additio Magni Leibnizii, in qua idem negotium per rectificationem curuae algebraicae expeditur. Constructio huius curuae eximium exemplum profundissimi Auctoris ingenii exhibet; verum inaduertentia Viri alias sagacissimi in hanc solutionem sphalma quodpiam irrepsit, quod vti facile emendari potest, ita quoque praestantiae solutionis parum detrahit. Exprimit enim superficiem coni scaleni rectangulo ex linea recta magnitudine data Tab. I.

in arcum lineae curuae, cuius conſtructionem expoſuerat, cum iſte arcus antea quantitate quapiam algebraica minui debuiſſet. Quamobrem operam meam non inutiliter mihi equidem collocaſſe videor, ſi primo ſuperficiem coni ſcaleni ope rectificationis lineae algebraicae ordinis ſexti exhibuero, tum vero explanationem ſuperficiei conoidalis cuiuscunque per lineam curuam algebraicam abſoluero, ſimulque lapſum ſummi Leibnizii emendauero.

Fig. 1. §. 2. Sit circulus AMB baſis coni ſcaleni, cuius vertex in ſublimi poſitus ſit V. vnde ad planum baſis demittatur perpendiculum VD; et ex puncto D per centrum baſis C agatur recta DACB. Superficies igitur haec conica generatur, dum linea recta perpetuo per punctum V tranſiens circa peripheriam circuli AMB circumducitur, huiusque ſuperficiei portio arcui AM reſpondens includetur arcu AM et binis rectis ex punctis A et M ad verticem V ductis. Huiusmodi portioni gibbae figuram planam aequalem inueniri oportet. Ponatur radius baſis $AC=BC=a$. longitudo axis $VC=f$ perpendiculum $VD=b$, et interuallum $CD=c$, ita vt ſit $ff=bb+cc$. Hinc erit latus coni minimum $VA=\sqrt{(bb+cc-2ac+aa)}$ et latus maximum $VB=\sqrt{(bb+cc+2ac+aa)}$. Sumto nunc arcu quocunque AM, ponatur angulus $ACM=u$, erit arcus $AM=au$; eiusque elementum $Mm=adu$. Ducatur in puncto M tangens MQ, et ex D in eam ducatur perpendicularis DQ, erit recta VQ normalis in tangentem MQ. Quare ſi ductae concipiantur rectae VM et Vm, erit area trianguli $MVm=\frac{1}{2}Mm.VQ$; quae areola erit differentiale portionis ſuperficiei conicae AVM, quam quaerimus.

§. 3

§. 3. Vt igitur longitudinem perpendicularis VQ inueſtigemus, in radium CM, ſi opus eſt, productum ex D ducamus normalem DN, quae parallela erit et aequalis tangenti MQ, et propterea DQ=MN. Cum ergo in triangulo rectangulo DCN ſit hypotenuſa CD=c et angulus DCN=u, erit CN=c cos$u$, hincque MN=DQ=c cos$u-a$. Iam quia triangulum VDQ ad D eſt rectangulum, erit VQ=$\sqrt{(bb+cc\,\text{cos}.u^2-2ac\,\text{cos}.u+aa)}$; ex quo area trianguli elementaris MVm erit =$\frac{1}{2}$Mm.VQ=$\frac{1}{2}adu\sqrt{(bb+(c\,\text{cos}u-a)^2)}$. Quamobrem ſuperficies conica AVM erit =$\frac{1}{2}a\int du\sqrt{(bb+(c\,\text{cos}u-a)^2)}$. Vnde perſpicitur, ſi conus eſſet rectus, quo caſu interuallum CD=c euaneſceret, ſuperficiem coni recti arcui AM reſpondentis fore =$\frac{1}{2}a\int du\sqrt{(aa+bb)}$=$\frac{1}{2}au\sqrt{(aa+bb)}$. Aequaretur ergo areae trianguli, cuius baſis =au= arcui AM et cuius altitudo ſit =$\sqrt{(aa+bb)}$=VA: vti ex elementis conſtat.

§. 4. Ex aequatione AVM=$\frac{1}{2}a\int du\sqrt{(bb+(c\,\text{cos}u-a)^2)}$ ſtatim fluit conſtructio curuae Varignoniahae, per cuius rectificationem ſuperficies conica exhiberi poteſt. Formetur enim inter coordinatas orthogonales p et q eiusmodi curua vt ſit $dp=bdu$ et $dq=du(c\,\text{cos}u-a)$, erit elementum huius curuae =$du\sqrt{(bb+(c\,\text{cos}u-a)^2)}$. Hinc arcus iſtius curuae per $\frac{1}{2}a$ multiplicatus praebebit rectangulum, cuius area aequalis erit ſuperficiei conicae AVM. Erit ergo huius curuae abſciſſa $p=bu=\frac{\text{VD.AM}}{\text{AC}}$: et applicata $q=c\int du\,\text{cos}u-au=c\,\text{ſin}u-au$ vnde abſciſſae $p=\frac{b}{a}$.AM reſpondebit applicata q=QM−AM quae

propterea earum ope rectificationis circuli facile construuntur. Attendenti autem statim patebit hanc curuam eandem esse, quam Varignonius tradidit.

§. 5. Si hanc superficiem conicam per quadraturas curuarum exprimere velimus, id quidem infinitis modis tam per curuas algebraicas quam transcendentes sine vllo negotio fieri posset. Verum iam pridem summi Geometrae constructiones problematum transcendentium quae fiunt per rectificationes curuarum praecipue algebraicarum, illis quae per quadraturas efficiuntur, longe antetulerunt: cum facilius sit longitudinem cuiusque lineae curuae saltem proxime practice assignare, quam eius aream. Hancobcausam eo tempore, quo ista quaestio in Miscellaneis Soc. Regiae est agitata Celeb. Varignonius non parum praestitisse merito est visus, quod explanationem superficiei conicae scalenae ad rectificationem lineae curvae reduxerit, cuius constructio ope rectificationis circuli tam facile expediri possit. Maxime autem fine dubio est aestimanda solutio Leibnitii, qua idem, quod Varignonius, per curuam algebraicam idque pro omnibus omnino superficiebus conicis praestitit, nisi ob errorem ante memoratum vsu careret. Nunc autem, postquam a Hermanno methodus latissime patens est inuenta quadraturas omnium curuarum ad rectificationes curuarum algebraicarum reuocandi, fere sine vllo negotio scopus, quem Varignonius et Leibnitius sibi proposuerant, obtineri poterit.

§. 6. In hunc finem eliminemus ex formula inuenta $\frac{1}{2}a\int du\sqrt{(bb+(c\cos u-a\cdot^{\circ})}$ quantitatem transcendentem u, ponendo cosinum anguli $u=z$, ita vt, ducto ex M ad diame-

diametrum perpendiculo MP ſit CP$=az$, et MP$=a\sqrt{(1-zz)}$, erit $du=\frac{-dz}{\sqrt{(1-zz)}}$, et ſuperficies conica quaeſita AVM$=-\frac{1}{2}a\int\frac{dz\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{\sqrt{(1-zz)}}$. Sit iam curuae algebraicae, ope cuius rectificationis haec ſuperficies menſurari queat, abſciſſa $=x$ et applicata $=y$, ponaturque $dy=p\,dx$, vt ſit eius elementum $=dx\sqrt{(1+pp)}$. Efficiendum ergo eſt vt integratio $\int dx\sqrt{(1+pp)}$ ab integratione formulae $\int\frac{dz\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{\sqrt{(1-zz)}}$ pendeat. Primo autem requiritur, vt $\int p\,dx$ fiat quantitas algebraica; alioquin enim curua non foret algebraica. Cum igitur ſit $\int p\,dx=px-\int x\,dp$, ponatur $\int x\,dp=q$, fietque $x=\frac{dq}{dp}$ et $y=\int p\,dx=\frac{p\,dq}{dp}-q$. Vocetur arcus iſtius curuae $=s$, et cum ſit $s=\int dx\sqrt{(1+pp)}$ fiet $s=x\sqrt{(1+pp)}-\int\frac{x\,p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$; ſicque rectificatio curuae ab integratione formulae $\int\frac{x\,p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$ pendebit, quae formula ob $x\,dp=dq$ abit in hanc $\int\frac{p\,dq}{\sqrt{(1+pp)}}$, quae vlterius reducitur ad $\frac{pq}{\sqrt{(1+pp)}}-\int\frac{q\,dp}{(1+pp)^{3:2}}$: ita vt futurus ſit arcus curuae $s=\frac{dq\sqrt{(1+pp)}}{dp}-\frac{pq}{\sqrt{(1+pp)}}+\int\frac{q\,dp}{(1+pp)^{3:2}}$. Statuatur nunc $\int\frac{q\,dp}{(1+pp)^{3:2}}=\int\frac{dz\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{\sqrt{(1-zz)}}$, fietque $q=\frac{dz(1+pp)^{3:2}\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{dp\sqrt{(1-zz)}}$ vbi pro p functionem quamcunque algebraicam ipſius z aſſumere licet. Quo facto erit q functio algebraica ipſius z cognita, ex eaque porro ipſae coordinatae curuae quaeſitae x et y definientur.

§. 7. Deſcripta ergo hac curua ope coordinatarum $x=\frac{dq}{dp}$ et $y=\frac{p\,dq}{dp}-q$, ſi eius arcus vocetur $=s$ ob $s=\frac{dq\sqrt{(1+pp)}}{dp}-\frac{pq}{\sqrt{(1+pp)}}+\int\frac{q\,dp}{(1+pp)^{3:2}}$, fiet formula noſtra, ex qua ſuperficiei

ſuperficiei conicae portio AVM determinatur $\int \frac{dz\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{\sqrt{(1-zz)}}$ $= s - \frac{dq\sqrt{(1+pp)}}{dp} + \frac{pq}{\sqrt{(1+pp)}} +$ Conſt. Quae conſtans ſi ita determinetur, vt poſito $z=0$, ipſa formula euaneſcat, tum rectangulum $\frac{1}{2}a(\int - \frac{dq\sqrt{(1+pp)}}{dp} + \frac{pq}{\sqrt{(1+pp)}} +$ Cōſt.) aequabitur portioni ſuperficiei conicae EVM, poſito ſcilicet angulo ACE recto.

§. 8. Ponamus, vt rem exemplo illuſtremus $p = \frac{z}{\sqrt{(1-zz)}}$, vt ſit $\sqrt{(1+pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1-zz)}}$ et $dp = \frac{dz}{(1-zz)^{3:2}}$; erit $q = \frac{\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{\sqrt{(1-zz)}}$ et $\frac{dq}{dp} = \frac{bbz+(c-az)(cz-a)}{\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}$ $= x$ et $y = \frac{(a(cz-a)-bb)\sqrt{(1-zz)}}{\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}$: Hinc prodibit portio ſuperficiei conicae EVM $= \frac{1}{2}a(s - \frac{c(cz-a)\sqrt{(1-zz)}}{\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}} +$ Conſt.), ſi quidem haec conſtans ita accipiatur, vt iſta formula euaneſcat poſito $z=0$. Simili autem modo aliis quibuscunque valoribus pro p accipiendis innumerabiles aliae curuae algebraicae obtinebuntur, quarum rectificatione portio ſuperficiei conicae quaecunque in plano exhiberi poterit.

§. 9. In huiusmodi autem lineis curuis non ipſe arcus ſuperficiei conicae eſt proportionalis, ſed eum perpetuo quapiam quantitate algebraica vel augeri vel diminui oportet, vt prodeat expreſſio ſuperficiem conicam abſolute menſurans. Qua circumſtantia etſi praxis non impeditur, tamen eiusmodi lineae curuae, quarum longitudo ſtatim ipſa ſine adiuncta alia quantitate quaeſitum praebet, illis non immerito anteferri ſolent. Hancobrem non abs re erit eiusmodi curuam algebraicam aſſignare, quae ipſa, vti curua illa Varignonii transcendens, ſine aſſumta alia quantitate

titate ſuperficiei conicae portionem quamuis metiatur. Cum igitur portio EVM exprimatur hac formula $\frac{1}{2}a\int\frac{dz\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{\sqrt{(1-zz)}}$, curua algebraica inueſtigari debebit cuius elementum ſit $=\frac{dz\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{b\sqrt{(1-zz)}}$. Huius enim curvae ſi arcus quantitati z reſpondens ponatur $=s$, erit ſuperficiei conicae portio $EVM=\frac{1}{2}abs$.

§. 10. Sint coordinatae huius curuae quaeſitae x et y, quae cum per functiones algebraicas ipſius z exprimi debeant, ſtatuatur $dx=\frac{dz(m+kz)}{\sqrt{(1-z)}}$ et $dy=\frac{dz(n+kz)}{\sqrt{(1+z)}}$ ſic enim ſumtis integralibus fiet

$$x=2m+\tfrac{4}{3}k-(2m+\tfrac{4}{3}k+\tfrac{2}{3}kz)\sqrt{(1-z)}$$
$$y=-2n+\tfrac{4}{3}k+(2n-\tfrac{4}{3}k+\tfrac{2}{3}kz)\sqrt{(1+z)}$$

Eiusmodi conſtantibus adiectis, vt poſito $z=0$, quod euenit in puncto E, ambae coordinatae x et y euaneſcant. Hinc elicietur iſta aequatio:

$$\left.\begin{matrix}+xx-4mx-\frac{8}{3}kx\\+yy+4ny-\frac{8}{3}ky\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}4(n-m)(n+m)z+\frac{1}{3}(n-m)kzz\\-\frac{8}{3}(n+m)kz\quad-\frac{1}{3}kkzz\end{matrix}\right.$$

Vnde valor ipſius z per x et y facile definitur, qui in altera aequatione ſubſtitutus dabit aequationem algebraicam inter x et y, qua natura curuae quaeſitae continebitur.

§. 11. Cum iam ſit $dx=\frac{(m+kz)dz}{\sqrt{(1-z)}}$ et $dy=\frac{(n+kz)dz}{\sqrt{(1+z)}}$. fiet huius curuae elementum:

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)}=dz\sqrt{\left(\frac{m^2+2mkz+k^2zz}{1-z}+\frac{n^2+2nkz+k^2zz}{1+z}\right)}$$

ſeu $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{dz\sqrt{(+nn-nnz+2nkz-2nkzz+mm+mmz+2mkz+2mkzz+2k^2z^3)}}{\sqrt{(1-zz)}}$

Quod aequale ponatur formae $\frac{dz\sqrt{(aa+bb-2acz+ccz^2)}}{b\sqrt{(1-zz)}}$ prodibuntque ex comparatione terminorum homogeneorum

hae aequationes.

$$aa+bb=(nn+mm)hh$$
$$2ac=(n-m)(n+m)hh-2(n+m)khh$$
$$cc=2k^2h^2-2(n-m)khh$$

Ex harum vltima fit $n-m=k-\frac{cc}{2khh}=\frac{2khh-cc}{2khh}$ qui valor in secunda substitutus dat:

$$2ac=-\frac{(n+m)(-2khh+cc)}{2k}$$

ergo erit $n+m=\frac{-4ack}{2khh-cc}$. Cum ergo sit:

$$n-m=\frac{2khh-cc}{2khh}$$

ex his aequationibus ambae litterae m et n definiuntur.

§. 12. Superest ergo vt tertia incognita k per primam aequationem definiatur. Cum autem quarta incognita h maneat indeterminata, ei pro lubitu valor assignari poterit, statuamus ergo $hh=\frac{cc}{2kk}$, vt euadat $n-m=0$: eritque $n+m=-\frac{2ak}{c}$, ac propterea $m=n=-\frac{ak}{c}$, vnde facta in prima aequatione substitutione etiam incognita k ex calculo egreditur. Fieri ergo nequit $m=n$. Quocirca statuamus $2kkhh=gcc$ seu $hh=\frac{gcc}{2kk}$ eritque $n-m=\frac{(g-1)k}{g}$ et $n+m=\frac{-4ak}{(g+1)c}$. Vnde fit $n=\frac{(g-1)k}{2g}-\frac{2ak}{(g+1)c}=\frac{(gg-1)ck-4agk}{2g(g+1)c}$ et $m=\frac{-2ak}{(g+1)c}-\frac{(g-1)k}{2g}=\frac{-4agk-(gg-1)ck}{2g(g+1)c}$.

§. 13. Ex his valoribus nunc obtinebitur:

$$mm+nn=\frac{16aapgkk+(gg-1)^2cckk}{2gg(g+1)^2cc}$$

Hinc ex prima aequatione $aa+bb=(nn+mm)hh$ fiet $aa+bb=\frac{16aagg+(gg-1)^2cc}{4g(g+1)^2}$

sit

ſit $aa+bb=ee$, haecque aequatio euoluta dabit:

$$ccg^4-4eeg^3-2ccgg-4eeg+cc=0$$
$$+16aagg$$
$$-8eegg$$

ex qua valorem ipſius g quaeri oportet.

§. 14. Quanquam haec aequatio eſt quarti ordinis, tamen quia non mutatur, ſi loco g ponatur $\frac{1}{g}$, ea ad reſolutionem aequationis quadratae reuocari poteſt. Fingantur eius factores $cgg-2pg+c=0$ et $cgg-2qg+c=0$ et productum illi aequationi aequale efficiatur. Erit autem hoc productum:

$$ccg^4-2cpg^3+2ccgg-2cpg+cc=0$$
$$-2cqg^3+4pqgg-2cqg$$

Quae forma cum aequatione inuenta comparata dabit:

$$p+q=\tfrac{2ee}{c} \text{ et } pq=4aa-2ee-cc$$

unde fit: $(p-q)^2=\frac{4e^4}{cc}-16aa+4ee+4cc$

et $p-q=\frac{2}{c}\sqrt{(e^4-4aacc+2ccee+c^4)}$. Conſequenter

$$p=\frac{ee+\sqrt{(e^4-4aacc+2ccee+c^4)}}{c} \text{ et}$$

$$q=\frac{ee-\sqrt{(e^4-4aacc+2ccee+c^4)}}{c}.$$

§. 15. Inuentis nunc p et q ex aequationibus ſuperioribus valores ipſius g ita definientur vt ſit

$g=\frac{p+\sqrt{(pp-cc)}}{c}$ et $g=\frac{q+\sqrt{(qq-cc)}}{c}$. Cum igitur nunc quatuor valores pro quantitate g inuenerimus, habebimus primo $hh=\frac{gcc}{2kk}$ ſeu ſumta quantitate h pro arbitrio erit $k=\frac{c}{b}\sqrt{\frac{1}{2}g}$; vnde porro inueniuntur.

$$m=\frac{-(\gamma-1)k}{2g}-\frac{2ak}{(g+1)c}$$
$$n=\frac{+(\varrho-1)k}{2g}-\frac{2ak}{(g+1)c}$$

Ex cognitis denique valoribus litterarum m, n, et k curua quaeſita per coordinatas x et y ſupra exhibitas algebraice deſcribetur, quo facto ſi eius arcus quantitati z reſpondens dicatur $= s$, erit ſuperficiei conicae portio $EVM = \frac{1}{2} abs$.

§. 16. Vt exemplum praebeamus, faciat axis coni VC cum baſi angulum $60°$, incidatque perpendiculum VD in peripheriam, baſis erit CD = CA et propterea $c = a$; porro erit $CV = f = 2a$ et $bb = 3aa$ vnde fit $ee = 4aa$ atque $p = a(4 + \sqrt{21})$ et $q = a(4 - \sqrt{21})$. Hinc fit $g = 4 + \sqrt{21} + 2\sqrt{(9 + 2\sqrt{21})}$, quia duo reliqui valores fiunt imaginarii. Erit ergo

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}g} = \tfrac{1}{4}\sqrt{14} + \tfrac{1}{4}\sqrt{6} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(3 + \sqrt{21})}$$

ſit $b = 1$ erit $k = \frac{a}{4}(\sqrt{14} + \sqrt{6} + 2\sqrt{(3 + \sqrt{21})})$. Hinc porro irrationalibus debite reductis inuenitur

$$m = \tfrac{a}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{14} - 2\sqrt{(3 + \sqrt{21})}) \text{ et}$$
$$n = \tfrac{a}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{14} - 2\sqrt{(3 + \sqrt{21})}).$$

quibus valoribus inuentis deſcribatur curua inter coordinatas x et y ita, vt ſit

$$x = \tfrac{4}{3}k + 2m - (2m + \tfrac{4}{3}k + \tfrac{2}{3}kz)\sqrt{(1 - z)}$$
$$y = \tfrac{4}{3}k - 2n + (2n - \tfrac{4}{3}k + \tfrac{2}{3}kz)\sqrt{(1 + z)}.$$

Cuius curuae ſi arcus ſinui anguli ECM, qui eſt $= z$ reſpondens ponatur $= s$ erit ſuperficiei conicae portio $EVM = \frac{1}{2} as$.

§. 17. Expeditis conis ſcalenis, qui cum baſes habeant circulares, perpendiculum ex vertice in planum baſis demiſſum extra eius centrum cadit, nunc conos quoscunque conſiderabo, qui formantur, dum linea recta per verticem perpetuo tranſiens circa lineam quamcunque circumducitur. Sit igitur

igitur figura quaecunque AM baſis huiusmodi coni, et punctum V in ſublimi poſitum eius vertex, vnde in baſin demittatur perpendiculum VD. Ex D ad punctum curuae AM quodcunque M ducatur recta DM, et in M ducatur recta tangens curuam MQ, in quam D perpendiculum demittatur DQ: et cum baſis cognita ponatur, relatio aſſignari poterit inter DM et DQ. Sit igitur $DM=x$, $DQ=y$, atque habebitur aequatio inter x et y. Ponatur praeterea huius coni altitudo $VD=b$, ſumto autem huius curuae elemento Mm, ſi ducatur Dm et ex M in Dm perpendiculum demittatur Mn, erit $mn=dx$, et ob $MQ=\sqrt{(xx-yy)}$ ſimilitudo triangulorum DMQ, M mn dabit $Mn=\frac{ydx}{\sqrt{(xx-yy)}}$ et $Mm=\frac{xdx}{\sqrt{(xx-yy)}}$. Fig. 2.

§. 18. His praemiſſis ſi in peripheria baſis punctum fixum A tanquam principium aſſumatur. Superficiei conicae portio AVM erit integrale trianguli elementaris MVm. Ad areolam ergo huius trianguli exprimendam, iungatur recta VQ, quae in tangentem MQ erit normalis, ac propterea area trianguli MVm fiet $=\frac{1}{2}Mm.VQ$. Eſt vero ob triangulum VDQ ad D rectangulum, $VQ=\sqrt{(bb+yy)}$ vnde cum ſit $Mm=\frac{xdx}{\sqrt{(xx-yy)}}$, habebitur area trianguli elementaris $MVm=\frac{xdx\sqrt{(bb+yy)}}{2\sqrt{(xx-yy)}}$. Atque hinc erit ſuperficiei conicae portio quaeſita AVM $=\frac{1}{2}\int\frac{xdx\sqrt{(bb+yy)}}{\sqrt{(xx-yy)}}$.

§. 19. Maxime naturalis via hanc ſuperficiem exprimendi eſt, vt ea in planum explicetur. Concipiatur igitur conus charta ſuperductus, quae ſecundum rectas AV et MV et baſin AM exciſſa in planum explicetur Fig. 3.

VAM; haecque figura mixtilinea VAM aequalis erit portioni superficiei conicae $AVM = \frac{1}{2}\int \frac{xdx\sqrt{(bb+yy)}}{\sqrt{(xx-yy)}}$. Huius figurae explicatae ducatur in M tangens MQ, et in eam ex V demittatur perpendiculum VQ. Cum igitur hoc triangulum VMQ simile et aequale sit triangulo VMQ in fig. 2. erit $VM = \sqrt{(bb+xx)}$ $VQ = \sqrt{(bb+yy)}$ et $MQ = \sqrt{(xx-yy)}$. Constituto autem triangulo elementari MVm, ductaque Mr ad Vm perpendiculari, erit vt ante $Mm = \frac{xdx}{\sqrt{(xx-yy)}}$, at $mr = \frac{xdx}{\sqrt{(bb+xx)}}$, et $Mr = \frac{xdx\sqrt{(bb+yy)}}{\sqrt{(bb+xx)(xx-yy)}}$.

§. 20. Inquiramus nunc in constructionem huius curvae ex data basi coni in fig. 2. Ponamus in hunc finem angulum $AVM = v$ et distantiam $VM = z$, erit statim $z = \sqrt{(bb+xx)}$. Tum vero erit $dv = \frac{Mr}{VM} = \frac{xdx\sqrt{(bb+yy)}}{(bb+xx)\sqrt{(xx-yy)}}$. Vocemus simili modo in fig. 2. angulum $ADM = u$ erit $du = \frac{Mn}{DM} = \frac{ydx}{x\sqrt{(xx-yy)}}$; Hinc fit $x^4du^2 - xxyydu^2 = y^2dx^2$ et $y^2 = \frac{x^4du^2}{dx^2+x^2du^2}$ ideoque erit $\sqrt{(bb+yy)} = \frac{\sqrt{(bbdx^2+(bb+xx)x^2du^2)}}{\sqrt{(dx^2+x^2du^2)}}$ et $\sqrt{(xx-yy)} = \frac{xdx}{\sqrt{(dx^2+x^2du^2)}}$: vnde oritur $dv = \frac{\sqrt{(bbdx^2+(bb+xx)xxdu^2)}}{bb+xx}$. Quia igitur vel u vel y per x datur, inueniri poterit angulus v, quo cognito curua AM circa V in plano describetur, cuius area AVM aequalis erit superficiei conicae quaesitae.

§. 21. Quoniam assignatio superficiei conicae pendet ab integratione formulae $\int \frac{xdx\sqrt{(bb+yy)}}{\sqrt{(xx-yy)}}$, hoc negotium tam per quadraturas quam rectificationes curuarum algebraicarum innumerabilibus modis facile expediri potest. Vt

Vt autem conſtructionem Leibnizianam, quae eſt elegantiſſima, emendemus, peculiari modo nobis erit procedendum. Perſpicuum autem eſt Virum ſummum ſuam conſtructionem ex conſideratione rectarum ad datam curvam ſub angulis quibuscunque ductarum deduxiſſe; hae enim rectae ſuis concurſibus formant nouam curuam, cuius rectificatio tam ſimpliciter exprimitur, vt quaeuis quadratura eo facile reducatur. Atque ex hoc ipſo fonte Celeb. Hermannus methodum ſuam ingenioſiſſimam quadraturas curuarum quascunque ad rectificationes curuarum algebraicarum reducendi hauſit, quam methodum poſtea Celeb. Ioh. Bernoulli ex geometria in analyſin puram translatam dilucide propoſuit.

§. 22. Sumamus pro curua data AM illam ipſam figuram, quae ante baſin coni conſtituerat, atque in eius ſingulis punctis M. *m* in datis cum hac curua angulis ductae concipiantur rectae MS, *ms* quae ſuis contactibus formant nouam curuam FS*s*; per cuius rectificationem ſuperficiem conicam exprimi oporteat. Ponatur arcus curuae cognitae AM $= s$. ſitque angulus SM*m* $= v$, quem recta SM cum curua AM in puncto M conſtituit, et ſumto elemento M*m* $= ds$, erit angulus *sm*N $= v + dv$. Quo hinc concurſus rectarum MS et *ms* ſeu punctum S determinetur, conſideretur centrum circuli oſculatoris in M*m*, quod ſit in R, et vocetur radius oſculi MR $= mR = r$, erit angulus MR*m* $= \frac{ds}{r}$: atque ob rectas RM, R*m* ad curuam AM normales, erit angulus RMS $= 90° - v$ et angulus RMS $= 90° - v - dv$. Vnde cum ſit RoS $=$ MR*m* $+$ RMS $=$ MS*m* $+$ R*ms*, fiet ang. MS*m* $=$ MR*m* $+$ Fig. 4.

$m+\mathrm{R}\,\mathrm{MS}-\mathrm{R}\,ms=\frac{ds}{r}+dv$. Nunc in triangulo MS m ob datos angulos et latusculum $\mathrm{M}m=ds$, fiet $\frac{ds}{r}+dv : ds=$ ſin. $v : m\mathrm{S}$ vel MS, eritque igitur $\mathrm{MS}=\frac{r\,ds\,\text{ſin.}\,v}{ds+r\,dv}$; ex qua formula conſtructio curuae FS conſequitur.

§. 23. Ponatur haec recta $\mathrm{MS}=z$, vt ſit $z=\frac{r\,ds\,\text{ſin.}\,v}{ds+r\,dv}$; eritque $ms=z+dz$. Ex m in MS ducatur normalis mk, ob angulum $m\mathrm{M}k=v$, erit $mk=ds$ ſin. v et $\mathrm{M}k=ds$ coſ. v. Cum igitur ſit $\mathrm{S}s=ms-k\mathrm{S}=ms-\mathrm{MS}+\mathrm{M}k$, fiet $\mathrm{S}s=ds$ coſ. $v+dz$. At eſt Ss elementum curuae FS, ex quo erit longitudo huius curvae $\mathrm{FS}=\int ds$ coſ. $v+z+$ Conſt. Ad hanc conſtantem definiendam reſpondeat curuae FS, punctum F curuae datae AM puncto A, ita vt recta AF ſit tangens curuae quaeſitae FS in puncto F. Hinc cum ſit $\mathrm{MS}=z$, prodibit $\mathrm{FS}=\int ds$ coſ. $v+\mathrm{MS}-\mathrm{AF}$, ſi quidem integrale $\int ds$ coſ. v ita capiatur, vt euaneſcat poſito $s=0$. Quo facto viciſſim integrale formulae $\int ds$ coſ. v per rectificationem curvae FS exhiberi poterit, erit ſcilicet $\int ds$ coſ. $v=\mathrm{FS}+\mathrm{AF}-\mathrm{MS}$.

§. 24. His praemiſſis ſit D veſtigium verticis coni in plano baſis, ſeu punctum, in quod perpendiculum ex vertice coni in planum baſis demiſſum incidit, cuius perpendiculi altitudo VD ſupra poſita eſt $=b$. Ducta porro ad M tangente MQ, in eamque ex D demiſſo perpendiculo DQ, vocauimus $\mathrm{DM}=x$ et $\mathrm{DQ}=y$, eratque elementum $\mathrm{M}m=\frac{x\,dx}{\sqrt{(xx-yy)}}$, quod nunc appellamus $=ds$. Quare cum inuenerimus ſuperficiem conicam arcui baſis AM reſpondentem $=\frac{1}{2}\int\frac{x\,dx\sqrt{(bb+yy)}}{\sqrt{(xx-yy)}}$, erit iſta ſuper-

superficies $= \frac{1}{2}\int ds\sqrt{(bb+yy)}$. Quo igitur haec superficies per rectificationem curuae FS exprimatur, angulus v vbique ita constitui debet, vt formulae $\int ds \cos. v$ integratio ad integrationem formulae $\int ds\sqrt{(bb+yy)}$ perducatur.

§. 25. Ponamus in hunc finem $\cos. v = \frac{\sqrt{(bb+yy)}}{k}$: et cum cosinus ipsius v vltra radii magnitudinem, quam vnitate metimur nunquam excrescere possit, quantitas k tanta assumi debet, vt $\sqrt{(bb+yy)}$ eam nunquam superare queat. Quare notetur maximus valor, quem formula $\sqrt{(bb+yy)}$ vsquam in cono induere potest, eique k vel aequalis vel etiam maior assumatur. Hoc igitur modo si angulus v fuerit definitus, obtinebitur superficies conica arcui basis AM insistens $\frac{1}{2}\int ds\sqrt{(bb+yy)} = \frac{1}{2}k\int ds \cos. v$; ideoque exprimetur rectangulo $\frac{1}{2}k$(FS + AF − MS) si scilicet rectae MS vbique ita constituantur, vt fit $\cos. SMm = \frac{\sqrt{(bb+yy)}}{k}$ seu $\sin. RMS = \frac{\sqrt{(bb+yy)}}{k}$ hincque construatur curua FS, rectanguli $\frac{1}{2}k$(AF + FS − MS) area aequabitur superficiei conicae quaesitae, quae igitur per rectificationem curuae algebraicae FS exhibebitur. Cum enim vbique tam angulus RMS quam longitudo MS algebraice assignari queant, ipsa curua FS erit algebraica.

§. 26. Sumto autem $\cos. v = \frac{\sqrt{(bb+yy)}}{k}$ erit $\sin. v = \frac{\sqrt{(kk-bb-yy)}}{k}$ et differentiando $dv \cos. v = \frac{-yky}{k\sqrt{(kk-bb-yy)}} = \frac{-ydy}{kk\sin. v}$. vnde fit $dv = \frac{-ydy}{kk\sin. v \cos. v}$. Cum autem natura curuae AM aequatione inter variabiles $DM = x$ et $DQ = y$ exprimatur, erit radius osculi $MR = r = \frac{xdx}{dy} =$

$\frac{ds\sqrt{(xx-yy)}}{dy}$, vnde fit $dy = \frac{ds\sqrt{(xx-yy)}}{r}$ ideoque $dv = \frac{-yds\sqrt{(xx-yy)}}{kkr\,sin.v\,cos.v}$. Quia ergo ſupra inuenimus $MS = z = \frac{rds\,sin.v}{ds+rdv}$, nunc habebimus $MS = z = \frac{kkr\,sin.v^2\,cos.v}{kk\,sin.v\,cos.v - y\sqrt{(xx-yy)}}$ Quam expreſſionem ſequenti modo geometrice conſtruere conabimur.

Fig. 4. et 5. §. 27. Sit iterum curua AM baſis coni, D veſtigium verticis, et M punctum huius curuae quodcunque in quo ducatur tangens MQ et normalis MK. Ductaque recta DM ex D in tangentem demittatur perpendiculum DQ, ſimulque tangenti agatur recta indefinita DC, in qua capiatur DC = altitudini coni $= b$, ductaque CQ erit $CQ = \sqrt{(bb+yy)}$. Tum in normali ad curuam capiatur $MK = k$, ſuper qua tanquam diametro deſcripto ſemicirculo KPM applicetur chorda $KP = CQ$, ſi ducatur MP, erit ſinus anguli $KMP = \frac{KP}{k} = cos.\,v$, vnde recta MP erit poſitio rectae MS, ſumatur in normali ad curuam $MR = r$, et cum ſit $DQ = y$, et $MQ = \sqrt{(xx-yy)}$, fiet $MS = \frac{MK \cdot MR\,sin.v}{MK - DQ \cdot MQ : MK\,sin.v\,cos.v}$ ſeu $MS = \frac{MK\,cos.v \cdot MR\,sin.v}{MK\,cos.v - DQ \cdot MQ : MK\,sin.v}$. Cum vero ſit $MK\,cos.v = KP$ et $MK\,sin.v = MP$, ex R in MP demittatur perpendiculum RT, et erit $MR\,sin.v = MT$ fietque $MS = \frac{KP \cdot MT}{KP - DQ \cdot MQ : MP}$. Capiatur $PX = \frac{DQ \cdot MQ}{MP}$, erit $MS = \frac{KP \cdot MT}{KX}$, vnde longitudo rectae MS facile definitur. Quae operatio ſi in ſingulis punctis M inſtituatur, ſingula puncta S determinabunt curuam quaeſitam FS; qua inuenta erit portio ſuperficiei conicae arcui AM inſiſtentis aequalis areae parallelogrammi rectanguli $\frac{1}{2}MK(AF+FS-MS)$.

§. 28.

§. 28. Si curua AM ſtatuatur circulus, extra cuius centrum cadat punctum D, vt conus abeat in conum ſcalenum ordinarium qualem primo ſumus contemplati, atque curua FS ſecundum praecepta hic data conſtruatur, tum eadem prodibit curua, quam Illuſtr. Leibnizius loco ſupra allegato inuenire docuit Ex quo manifeſtum eſt non ipſam hanc curuam FS in rectam elongatam, ſi in rectam quampiam conſtantem ducatur, praebere ſuperficiem conicam quaeſitam, ſed arcum illum FS recta AF auctum longitudine rectae MS minui debere. Hoc ergo modo non ſolum conſtructionem Leibnizianam, quae tantum ad conos ſcalenos erat accommodata, emendauimus, ſed etiam ad conos, quorum baſes ſint figurae quaecunque extendimus.

THEOREMATA
CIRCA DIVISORES NVMERORVM.

AVCTORE
L. EVLERO.

Quouis tempore ſummi Geometrae agnouerunt in natura numerorum plurimas praeclariſſimas proprietates eſſe abſconditas, quarum cognitio fines matheſeos non mediocriter eſſet amplificatura. Primo quidem intuitu doctrina numerorum ad arithmeticae elementa referenda videtur, atque vix quicquam in ea ineſſe putatur, quod yllam ſagacitatem aut vim analyſeos requirat. Qui autem diligentius in hoc genere ſunt verſati, non ſolum veritates demonſtratu difficillimas detexerunt, ſed etiam eiusmodi, quarum certitudo percipiatur, etiamſi demonſtrari nequeat. Plurima huiusmodi theoremata ſunt prolata ab inſigni Geometra Fermatio, quorum veritas quamuis demonſtratio lateat, non minus euicta videtur. Atque hoc imprimis omnem attentionem meretur, in matheſi adeo pura eiusmodi dari veritates, quas nobis cognoscere liceat, cum tamen eas demonſtrare non valeamus; atque hoc adeo in arithmetica vſu venit, quae tamen prae reliquis matheſeos partibus maxime pertractata ac perſpecta haberi ſolet: neque facile affirmare auſim, an ſimiles veritates in reliquis partibus reperiantur. In Geometria certe nulla occurit propoſitio cuius vel veritas vel falſitas firmiſſimis rationibus euinci nequeat. Cum igitur quaeuis veritas eo magis abſtruſa cenſeatur, quo minus ad eius demonſtrationem

onem aditus pateat, in arithmetica certe, vbi natura numerorum perpenditur, omnium abſtruſiſſimas contineri negare non poterimus. Non deſunt quidem inter ſummos mathematicos Viri, qui huiusmodi veritates prorſus ſteriles, ideoque non dignas iudicant, in quarum inueſtigatione vlla opera collocetur; at praeterquam quod cognitio omnis veritatis per ſe ſit excellens, etiamſi ab vſu populari abhorere videatur, omnes veritates, quas nobis cognoſcere licet, tantopere inter ſe connexae deprehenduntur, vt nulla ſine temeritate tanquam prorſus inutilis repudiari poſſit. Deinde etſi quaepiam propoſitio ita comparata videatur, vt ſiue vera ſit ſiue falſa, nihil inde ad noſtram vtilitatem redundet, tamen ipſa methodus, qua eius veritas vel falſitas euincitur, plerumque nobis viam ad alias vtiliores veritates cognoſcendas patefacere ſolet. Hanc obrem non inuiliter me operam ac ſtudium in indagatione demonſtrationum quarumdam propoſitionum impendiſſe confido, quibus inſignes circa diuiſores numerorum proprietates continentur. Neque vero haec de diuiſoribus doctrina omni caret vſu, ſed nonnunquam in analyſi non contemnendam praeſtat vtilitatem. Imprimis vero non dubito, quin methodus ratiocinandi, qua ſum vſus, in aliis grauioribus inueſtigationibus aliquando non parum ſubſidii afferre poſſit. Propoſitiones autem, quas hic demonſtratas exhibeo, reſpiciunt diuiſores numerorum in hac formula $a^n \pm b^n$ contentorum, quarum nonnullae iam ab ante memorato Fermatio, ſed ſine demonſtratione, ſunt publicatae. Quoniam igitur hic perpetuo de numeris integris ſermo inſtituetur, omnes alphabeti litterae hic conſtanter numeros integros indicabunt. Theo-

Theorema 1.

1. Si p fuerit numerus primus, omnis numerus in hac forma $(a+b)^p - a^p - b^p$ contentus diuiſibilis erit per p.

Demonſtratio.

Si binomium $(a+b)^p$ modo conſueto euoluatur, erit $(a+b)^p = a^p + \frac{p}{1}a^{p-1}b + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}a^{p-2}b^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{p-3}b^3 + \ldots + \frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3b^{p-3} + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}a^2b^{p-2} + \frac{p}{1}ab^{p-1} + b^p$. qua expreſſione ſubſtituta, binisque terminis, qui easdem habent vncias, coniunctis, erit $(a+b)^p - a^p - b^p = \frac{p}{1}ab(a^{p-2}+b^{p-2}) + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}a^2b^2(a^{p-4}+b^{p-4}) + \frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3b^3(a^{p-6}+b^{p-6}) + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(a^{p-8}+b^{p-8})a^4b^4 +$ etc. Hic primo notandum eſt omnes vncias, quamquam ſub forma fractionum apparent, nihilominus eſſe numeros integros, cum exhibeant, vti conſtat numeros figuratos. Quaelibet ergo vncia cum factorem habeat p, diuiſibilis erit per p, niſi is alicubi per factorem denominatoris vel prorſus tollatur, vel diuidatur. At vbique omnes factores denominatorum minores ſunt quam p quia adeo non vltra $\frac{1}{2}p$ creſcunt, ideoque factor numeratorum p nusquam per diuiſionem tollitur. Deinde cum p ſit per hypoth. numerus primus, is nusquam per diuiſionem minuetur. Quocirca ſingulae vnciae $\frac{p}{1}$; $\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}$; $\frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$; etc. hincque tota expreſſio $(a+b)^p - a^p - b^p$ perpetuo per numerum p ſiquidem fuerit numerus primus, erit diuiſibilis Q. E. D.

Coroll.

Coroll. 1.

2. Si ergo ponatur $a=1$, et $b=1$, erit 2^p-2 semper diuisibilis per p, si quidem fuerit p numerus primus. Cum igitur sit $2^p-2=2(2^{p-1}-1)$: alterum horum factorum per p diuisibilem esse oportet. At nisi sit $p=2$, prior factor 2 per p non est diuisibilis: vnde sequitur formam $2^{p-1}-1$ perpetuo per p esse diuisibilem, si p fuerit numerus primus praeter binarium.

Coroll. 2.

3. Ponendis ergo pro p successiue numeris primis, erit 2^2-1 diuisibile per 3; 2^4-1 per 5; 2^6-1 per 7; $2^{10}-1$ per 11 etc. quod in minoribus numeris per se fit perspicuum, in maximis autem aeque erit certum. Sic cum 641 sit numerus primus, iste numerus $2^{640}-1$ necessario per 641 erit diuisibilis. Seu si potestas 2^{640} per 641 diuidatur, post diuisionem supererit residuum $=1$.

Theorema 2.

4. Si vtraque harum formularum a^p-a et b^p-b fuerit diuisibilis per numerum primum p, tum quoque ista formula $(a+b)^p-a-b$ diuisibilis erit per eundem numerum primum p.

Demonstratio.

Cum per §. 1. $(a+b)^p-a^p-b^p$ sit diuisibilis per numerum p, si fuerit primus, atque hic formulae a^p-a et b^p-b per p diuisibiles assumantur, erit quoque summa istarum trium formularum nempe $(a+b)^p-a-b$ per p, si fuerit numerus primus diuisibilis Q. E. D.

Coroll.

Coroll. 1.

5. Si ponatur $b=1$, cum $1^p-1=0$ sit diuisibile per p; sequitur, si formula a^p-a fuerit diuisibilis per p, tum quoque formulam $(a+1)^p-a-1$ fore per p diuisibilem.

Coroll. 2.

6. Cum igitur assumta formula a^p-a per p diuisibili, sit quoque formula $(a+1)^p-a-1$ per p diuisibilis; simili modo in eadem hypothesi erit haec quoque formula $(a+2)^p-a-2$, hincque porro haec $(a+3)^p-a-3$, etc. atque generaliter haec c^p-c diuisibilis per p.

Theorema 3.

7. Si p fuerit numerus primus, omnis numerus huius formae c^p-c per p erit diuisibilis.

Demonstratio.

Si in §. 6 ponatur $a=1$, cum sit $a^p-a=0$ per p diuisibilis, sequitur has quoque formulas 2^p-2; 3^p-3; 4^p-4; etc. et generatim hanc c^p-c fore per numerum primum p diuisibilem. Q. E. D.

Coroll. 1.

8. Quicunque ergo numerus integer pro c assumatur, denotante p numerum primum, omnes numeri in hac forma c^p-c contenti erunt diuisibiles per p.

Coroll. 2.

9. Cum autem sit $c^p-c=c(c^{p-1}-1)$, vel ipse numerus c vel $c^{p-1}-1$ diuisibilis erit per p. vtrumque autem

autem simul per p diuisibilem esse non posse manifestum est. Quare si numerus c non fuerit diuisibilis per p, haec forma $c^{p-1}-1$ certe per p erit diuisibilis.

Coroll. 3.

10. Si ergo p fuerit numerus primus, omnes numeri in hac forma contenti $a^{p-1}-1$ erunt diuisibiles per p exceptis iis casibus, quibus ipse numerus a per p est diuisibilis.

Theorema 4.

11. Si neuter numerorum a et b diuisibilis fuerit per numerum primum p, tum omnis numerus huius formae $a^{p-1}-b^{p-1}$ erit diuisibilis per p.

Demonstratio.

Cum neque a neque b sit diuisibilis per p, atque p denotet numerum primum, tam haec forma $a^{p-1}-1$, quam haec $b^{p-1}-1$ erit diuisibilis per p. Hinc ergo quoque differentia istarum formularum $a^{p-1}-b^{p-1}$ erit diuisibilis per p. Q. E. D.

Coroll. 1.

12. Cum omnis numerus primus praeter binarium, cuius ratio diuidendi per se est manifesta, sit impar, ponatur $2m+1$ pro p, atque perspicuum erit, omnes numeros in hac forma $a^{2m}-b^{2m}$ contentos esse diuisibiles per p $2m+1$, siquidem neque a neque b seorsim fuerit per $2m+1$ diuisibilis.

Coroll. 2.

13. Quia b non est diuisibilis per $2m+1$, etiam

b^{2m} et $2b^{2m}$ non diuisibile erit per $2m+1$. Quare si $2b^{2m}$ addatur ad formulam $a^{2m}-b^{2m}$, quae est diuisibilis per $2m+1$, prodibit formula $a^{2m}+b^{2m}$, quae per $2m+1$ non erit diuisibilis; nisi vterque numerus $\underline{a}$ et $\underline{b}$ seorsim per $2m+1$ sit diuisibilis.

Coroll. 3.

14. Quoniam ob $2m$ numerum parem formula $a^{2m}-b^{2m}$ factores habet $(a^m-b^m)(a^m+b^m)$, necesse est vt horum factorum alter sit diuisibilis per $2m+1$: ambo autem simul per numerum $2m+1$ diuisibiles esse nequeunt. Quare si $2m+1$ fuerit numerus primus, et neque $\underline{a}$ neque $\underline{b}$ diuisibile sit per $2m+1$, tum vel a^m-b^m vel a^m+b^m erit diuisibile per $2m+1$.

Coroll. 4.

15. Si m sit numerus par puta $=2n$, atque a^m-b^m seu $a^{2n}-b^{2n}$ diuisibilis per $2m+1=4n+1$, tum ob eandem rationem vel a^n-b^n vel a^n+b^n diuisibile erit per numerum primum $4n+1$.

Theorema 5.

16. Summa duorum quadratorum $aa+bb$ per nullum numerum primum huius formae $4n-1$ vnquam diuidi potest, nisi vtriusque radix seorsim $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sit diuisibilis per $4n-1$.

Demonstratio.

Si $4n-1$ fuerit numerus primus, neque $\underline{a}$ et $\underline{b}$ per illum sint diuisibiles, tum $a^{4n-2}-b^{4n-2}$ erit diuisibile per $4n-1$ (11), hincque ista formula $a^{4n-2}+b^{4n-2}$ non erit diuisi-

diuiſibilis per $4n-1$, neque propterea vllus eius factor. At cum $4n-2=2(2n-1)$ ſit numerus impariter par, formula $a^{4n-2}+b^{4n-2}$ factorem habet $aa+bb$; quare fieri nequit, vt iſte factor $aa+bb$, hoc eſt vlla duorum quadratorum ſumma ſit diuiſibilis per $4n-1$. Q. E. D.

Coroll. 1.

17. Cum omnes numeri primi vel ad hanc formam $4n+1$ vel ad hanc $4n-1$ reuocentur, ſi $4n-1$ non fuerit numerus primus, diuiſorem habebit formae $4n-1$; namque ex meris numeris formae $4n+1$ nunquam numerus formae $4n-1$ reſultare poteſt. Quare cum ſumma duorum quadratorum per nullum numerum primum formae $4n-1$ diuidi poſſit, per nullum quoque numerum eiusdem formae $4n-1$, etiamſi non ſit primus dividi poterit.

Coroll. 2.

18. Summa ergo duorum quadratorum $aa+bb$, per nullum numerum huius ſeriei:

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, etc.

eſt diuiſibilis. Omnes ergo numeri primi praeter binarium, qui vnquam diuiſores eſſe poſſunt ſummae duorum quadratorum, continentur in hac forma $4n+1$; ſiquidem numeri $\underline{a}$ et $\underline{b}$ inter ſe communem diuiſorem non habent.

Coroll. 3.

19. Cum omnis numerus ſit vel primus vel productum ex primis, ſumma duorum quadratorum nullum numerum primum pro diuiſore habebit, niſi qui continea-

tur in hac forma $4n+1$. Diuiſores ergo primi ſummae duorum quadratorum continebuntur in hac ſerie:
2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, etc.

Scholion.

20. Quod numerus huius formae $4n-1$ nunquam poſſit eſſe ſumma duorum quadratorum, facile intelligitur. Numeri enim quadrati vel ſunt pares vel impares, illi in hac forma $4a$, hi vero in hac $4b+1$ continentur. Quare vt ſumma duorum quadratorum ſit numerus impar, alterum par alterum impar eſſe oportet, hinc oritur forma $4a+4b+1$ ſeu $4n+1$, ideoque nullus numerus huius formae $4n-1$ ſumma duorum quadratorum eſſe poteſt. Quod vero ſumma duorum quadratorum ne diuiſorem quidem formae $4n-1$ admittat, ab omnibus ſcriptoribus methodi Diophanteae ſemper eſt affirmatum: nemo autem vnquam, quantum mihi conſtat, id demonſtrauit, excepto Fermatio, qui autem ſuam demonſtrationem nunquam publicauit, ita vt mihi quidem videar primus hanc veritatem publice demonſtraſſe; nullum numerum vel huius formae $4n-1$ vel per numerum eiusdem formae diuiſibilem vnquam eſſe poſſe ſummam duorum quadratorum. Hinc ergo ſequitur omnem ſummam duorum quadratorum inter ſe primorum vel eſſe numerum primum, vel binario excepto alios diuiſores non habere, niſi qui in forma $4n+1$ contineantur.

Theorema 6.

21. Omnes diuiſores ſummae duorum biquadratorum inter ſe primorum ſunt vel 2, vel numeri huius formae $8n+1$. Demon-

Demonſtratio.

Sint a^4 et b^4 duo biquadrata inter ſe prima, erit vel vtrumque impar, vel alterum par et alterum impar; priori caſu ſummae a^4+b^4 diuiſor erit 2; vtroque vero caſu diuiſores impares, ſi qui fuerint, in hac forma $4n+1$ continebuntur. Cum enim biquadrata ſimul ſint quadrata, nullus diuiſor formae $4n-1$ locum invenit (16). At numeri $4n+1$ vel ad hanc formam $8n+1$ vel ad hanc $8n-3$ reuocantur. Dico autem nullum numerum formae $8n-3$ eſſe poſſe diuiſorem ſummae duorum biquadratorum. Ad hoc demonſtrandum ſit primo $8n-3$ numerus primus, atque per eum diuiſibilis erit haec forma $a^{4n-4}-b^{4n-4}$, vnde haec forma $a^{4n-4}+b^{4n-4}$ per numerum $8n-3$ prorſus non erit diuiſibilis, niſi vterque numerus a et b ſeorſim diuiſionem admittat, qui caſus autem aſſumtione, quod ambo numeri a et b ſint inter ſe primi excluditur. Cum igitur forma $a^{4n-4}+b^{4n-4}=a^{4(2n-1)}+b^{4(2n-1)}$ diuidi nequeat per $8n-3$, nullus quoque eius factor per $8n-3$ diuidi poterit. At ob $2n-1$ numerum imparem, illius formae factor erit a^4+b^4, qui ergo per nullum numerum primum formae $8n-3$ diuidi poteſt. Hinc omnes numeri primi praeter binarium, qui vnquam formam a^4+b^4 diuident, erunt huiusmodi $8n+1$. Ex multiplicatione autem duorum pluriumue talium diuiſorum nunquam numerus formae $8n-3$ oritur: ex quo ſequitur nullum prorſus numerum huius formae $8n-3$ ſiue ſit primus ſiue compoſitus, ſummam duorum biquadratorum inter ſe primorum dividere. Q. E. D.

Coroll. 1.

22. Cum omnes numeri impares in vna harum quatuor formarum contineantur: $8n \pm 1$ et $8n \pm 3$: praeter numeros in forma prima $8n \pm 1$ contentos nullus alius poterit esse diuisor summae duorum biquadratorum.

Coroll. 2.

23. Omnes ergo diuisores primi summae duorum biquadratorum inter se primorum erunt vel 2 vel in hac serie contenti. 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137, 193, etc. quae complectitur omnes numeros primos formae $8n+1$.

Coroll. 3.

24. Si quis ergo numerus puta N fuerit summa duorum biquadratorum, tum is vel erit primus, vel alios non habebit diuisores, nisi qui in forma $8n+1$ contineantur; vnde inuestigatio diuisorum mirum in modum contrahitur.

Coroll. 4.

25. Nullus igitur numerus, qui diuisorem habet non in forma $8n+1$ contentum, erit summa duorum biquadratorum; nisi forte habeat quatuor diuisores aequales, qui autem in consideratione biquadratorum reiici solent.

Theorema 7.

26. Omnes diuisores huiusmodi numerorum a^4+b^4 si quidem a et b sunt numeri inter se primi, sunt vel 2 vel in hac forma $16n+1$ continentur.

Demon-

Demonſtratio.

Quia a^8 et b^8 ſimul ſunt biquadrata, eorum ſumma $a^8 + b^8$ alios non admittet diuiſores, niſi qui in forma $8n+1$ contineantur. At numeri in hac forma $8n+1$ contenti ſunt vel $16n+1$ vel $16n-7$. Sit $16n-7$ numerus primus, ac per eum diuidi non poterit forma $a^{16n-8} + b^{16n-8}$ (13). ſeu $a^{8(2n-1)} + b^{8(2n-1)}$, neque propterea vllus eius factor. Verum ob $2n-1$ numerum imparem haec forma diuiſorem habet $a^8 + b^8$, quae ergo per nullum numerum primum $16n-7$ erit diuiſibilis, ac propterea alios diuiſores primos habere nequit, niſi qui in forma $16n+1$ contineantur. Ex multiplicatione autem duorum pluriumue huiusmodi numerorum $16n+1$, perpetuo productum eiusdem formae naſcitur, neque vnquam numerus formae $16n-7$ reſultare poteſt. Vnde cum nullus numerus formae $16n-7$ diviſor ipſius $a^8 + b^8$ exiſtere poſſit, neceſſe eſt vt omnes huius formae $a^8 + b^8$ diuiſores, ſi quos habet, ſiue ſint primi ſiue compoſiti, perpetuo in hac formula $16n+1$ contineantur. Q. E. D.

Coroll. 1.

27. Nullus igitur numerus, qui in hac forma $16n+1$ non includitur, vnquam eſſe poteſt diuiſor ſummae duarum poteſtatum octani gradus inter ſe primarum.

Coroll. 2.

28 Si quis ergo voluerit numeri cuiuspiam huius formae $a^8 + b^8$ diuiſores inueſtigare, is diuiſionem per nullos alios numeros primos niſi in hac forma $16n+1$ con-

contentos, tentet, cum demonſtratum ſit omnes reliquos numeros primos huius formae diuiſores eſſe non poſſe.

Theorema 8.

29. Summa duarum huiusmodi poteſtatum $a^{2^m}+b^{2^m}$ quarum exponens eſt dignitas binarii alios diuiſores non admittit, niſi qui contineantur in hac forma $2^{m+1}n+1$.

Demonſtratio.

Quemadmodum demonſtrauimus omnes diuiſores formae a^2+b^2 in hac forma $4n+1$ contineri, hincque vlterius diuiſores omnes formae a^4+b^4 in $8n+1$ et formae a^8+b^8 in $16n+1$ contineri euicimus; ita ſimili modo oſtendi poteſt formam $a^{16}+b^{16}$ nullos alios diuiſores admittere niſi in formula $32n+1$ contentos. Dehinc porro intelligemus formas $a^{32}+b^{32}$; $a^{64}+b^{64}$ etc. alios diuiſores habere non poſſe, niſi qui in formulis $64n+1$, $128n+1$ etc. includantur. Sicque in genere patebit formae $a^{2^m}+b^{2^m}$ alios non dari diuiſores, niſi qui in formula $2^{m+1}n+1$ contineantur. Q. E. D.

Coroll. 1.

30. Nullus ergo numerus primus, qui in hac forma $2^{m+1}n+1$ non includitur, vnquam eſſe poteſt diuiſor vllius numeri in hac forma $a^{2^m}+b^{2^m}$ contenti.

Coroll. 2.

31. Diuiſores ergo huiusmodi numeri $a^{2^m}+b^{2^m}$ inquiſiturus inutiliter operam ſuam conſumeret, ſi aliis numeris primis praeter eos, quas forma $2^{m+1}n+1$ ſuppeditat, diuiſionem tentare vellet.

Scholion

Scholion 1.

32. Fermatius affirmauerant, etiamſi id ſe demonſtrare non poſſe ingenue eſſet confeſſus, omnes numeros ex hac forma $2^{2^m}+1$ ortos eſſe primos; hincque problema alias difficillimum, quo quaerebatur numerus primus dato numero maior, reſoluere eſt conatus. Ex vltimo theoremate autem perſpicuum eſt, niſi numerus $2^{2^m}+1$ ſit primus eum alios diuiſores habere non poſſe praeter tales, qui in forma $2^{m+1}n+1$ contineantur. Cum igitur veritatem huius effati Fermatiani pro caſu $2^{32}+1$ examinare voluiſſem, ingens hinc compendium ſum nactus, dum diuiſionem aliis numeris primis, praeter eos, quos formula $64n+1$ ſuppeditat, tentare non opus habebam. Huc igitur inquiſitione reducta mox deprehendi ponendo $n=10$ numerum primum 641 eſſe diuiſorem numeri $2^{32}+1$, vnde problema memoratum, quo numerus primus dato numero maior requiritur, etiamnum manet inſolutum.

Scholion 2.

33. Summa duarum poteſtatum eiusdem gradus vti a^m+b^m ſemper habet diuiſores algebraice aſſignabiles, niſi m ſit dignitas binarii. Nam ſi m ſit numerus impar, tum a^m+b^m ſemper diuiſorem habet $a+b$, atque ſi p fuerit diuiſor ipſius m, tum quoque a^p+b^p formam a^m+b^m diuidet. Sin autem m ſit numerus par, in hac formula $2^n p$ continebitur, ita vt p ſit numerus impar, hocque caſu $a^{2^n}+b^{2^n}$ diuiſor erit formae a^m+b^m exiſtente $m=2^n p$. Atque ſi p habeat diuiſorem q, tum

etiam $a^{2n}q+b^{2n}q$ erit diuiſor formae a^m+b^m. Quo circa a^m+b^m numerus primus eſſe nequit niſi m ſit dignitas binarii. Hoc igitur caſu, ſi a^m+b^m, non fuerit numerus primus, alios diuiſores habere nequit, niſi qui formula $2mn+1$ contineantur. Contra autem ſi differentia duarum poteſtatum eiusdem gradus proponatur a^m-b^m, ea ſemper diuiſorem habet $a-b$; praeterea vero ſi exponens m diuiſorem habeat p, erit quoque a^p-b^p diuiſor formae a^m-b^m. Hinc ſi m ſit numerus primus forma a^m-b^m praeter $a-b$ alium diuiſorem algebraice aſſignabilem non habebit, quare ſi a^m-b^m fuerit numerus primus, neceſſe eſt vt m ſit numerus primus et $a-b=1$. Interim tamen ne his quidem caſibus forma a^m-b^m ſemper eſt numerus primus; ſed quoties $2m+1$ eſt numerus primus, per eum erit diuiſibilis. Praeterea vero etiam alios diuiſores habere poteſt, quos hic ſum inueſtigaturus.

Theorema 9.

34. Si differentia poteſtatum a^m-b^m fuerit diuiſibilis per numerum primum $2n+1$, atque p ſit maximus communis diuiſor numerorum m et $2n$, tum quoque a^p-b^p erit diuiſibilis per $2n+1$.

Demonſtratio.

Quia $2n+1$ eſt numerus primus, erit $a^{2n}-b^{2n}$ diuiſibilis per $2n+1$, et cum per hypotheſin a^m-b^m ſit quoque diuiſibilis per $2n+1$. Sit $2n=\alpha m+q$, ſeu q ſit reſiduum in diuiſione ipſius $2n$ per m remanens; et cum $a^{\alpha m}-b^{\alpha m}$ ſit quoque per $2n+1$ diuiſibilis, multiplicetur haec forma per a^q, erit $a^{\alpha m+q}-a^q b^{\alpha m}$ per

$2n+1$ diuiſibilis: at poſito $\alpha m+q$ pro $2n$ eſt quoque $a^{\alpha m+q}-b^{\alpha m+q}$ per $2n+1$ diuiſibilis: a qua formula ſi prior ſubtrahatur, reſiduum $a^q b^{\alpha m}-b^{\alpha m+q} = b^{\alpha m}(a^q-b^q)$ quoque per $2n+1$ erit diuiſibile. Hinc cum b per hypotheſin diuiſorem $2n+1$ non habeat, neceſſe eſt vt a^q-b^q per $2n+1$ ſit diuiſibile. Ponatur porro $m=\varepsilon q+r$, et cum vtraque haec formula $a^{\varepsilon q+r}-b^{\varepsilon q+r}$ et $a^{\varepsilon q}-b^{\varepsilon q}$ ſit per $2n+1$ diuiſibilis, multiplicetur poſterior per a^r et a priori ſubtrahatur, atque reſiduum $b^{\varepsilon q}(a^r-b^r)$ ſeu a^r-b^r pariter per $2n+1$ erit diuiſibile. Simili modo patebit, ſi fuerit $q=\gamma r+s$ tam formulam a^s-b^s per $2n+1$ fore diuiſibilem; atque ſi per huiusmodi continuam diuiſionem valores litterarum q, r, s, t etc. inueſtigentur, tandem peruenietur ad maximum communem diuiſorem numerorum m et $2n$, qui ergo ſi ponatur $=p$, erit a^p-b^p diuiſibile per $2n+1$. Q. E. D.

Coroll. 1.

35. Si igitur m fuerit numerus ad $2n$ primus, maximus eorum communis diuiſor erit vnitas, ac propterea ſi a^m-b^m fuerit diuiſibile per numerum primum $2n+1$, tum quoque $a-b$ per $2n+1$ erit diuiſibile.

Coroll. 2.

36. Si ergo differentia numerorum $a-b$ non fuerit diuiſibilis per $2n+1$, tum quoque nulla huiusmodi forma a^m-b^m, vbi m eſt ad $2n$ numerus primus, per $2n+1$ diuiſibilis eſſe poteſt.

Coroll. 1.

37. Quodſi ergo m fuerit numerus primus, forma

$a^m - b^m$ per numerum primum $2n+1$ diuidi non poteſt niſi m ſit diuiſor ipſius $2n$; poſito quod $a-b$ non ſit diuiſibile per $2n+1$.

Coroll. 4.

38. Exiſtente ergo m numero primo, haec forma $a^m - b^m$ praeter diuiſorem $a-b$ alios diuiſores habere nequit, niſi qui includantur in hac formula $mn+1$. Vnde diuiſores numeri cuiuspiam in hac forma $a^m - b^m$ contenti inueſtigaturus diuiſionem tantum per numeros primos in forma $mn+1$ contentos tentabit.

Coroll. 5.

39. Niſi ergo numerus $2^m - 1$ ſit primus, exiſtente m numero primo, alios diuiſores habere non poterit, niſi qui includantur in hac forma $mn+1$.

Coroll. 6.

40. Si ergo m ſit numerus primus, diuiſores formulae $a^m - b^m$ praeter $a-b$, ſi quidem a et b fuerint numeri inter ſe primi, continebuntur in hac ſerie:
$2m+1$; $4m+1$; $6m+1$; $8m+1$; $10m+1$; etc.
ſi hinc numeri non primi expungantur.

Theorema 10.

41. Si formula $a^m \pm b^m$ diuiſorem habeat p, tum quoque haec expreſſio $(a \pm \alpha p)^m \pm (b \pm \beta p)^m$ per p erit diuiſibilis.

Demonſtratio.

Si poteſtates $(a \pm \alpha p)^m$ et $(b \pm \beta p)^m$ methodo conſueta euoluantur, in vtraque ſerie omnes termini praeter

ter primum diuiſibiles erunt per p. Scilicet formula $(a \pm \alpha p)^m \pm (b \pm \beta p)^m$ abibit in hanc formam:

$$+a^m \pm ma^{m-1}\alpha p + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} a^{m-2}\alpha^2 p^2 \pm \text{etc.}$$
$$\pm (b^m \pm mb^{m-1}\beta p - \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} b^{m-2}\beta^2 p^2 \pm \text{etc.})$$

Vnde perſpicuum eſt ſi $a^m - b^m$ fuerit diuiſibile, tum quoque haec forma $(a \pm \alpha p)^m - (b \pm \beta p)^m$ per p erit diuiſibilis. Q. E. D.

Coroll. 1.

42. Si igitur $a^m \pm 1$ fuerit diuiſibile per p, tum quoque haec formula $(a \pm \alpha p)^m \pm 1$ per p erit diuiſibilis.

Coroll. 2.

43. Si $a^m \pm b^m$ fuerit diuiſibile per p, tum quoque haec formula $(a \pm \alpha p)^m \pm b^m$, vel haec $a^m \pm (b \pm \beta p)^m$ per p erit diuiſibilis.

Scholion.

44. Eodem quoque modo generaliter demonſtrari poteſt, ſi fuerit $Aa^m \pm Bb^m$ diuiſibile per p, tum quoque hanc formam $A(a \pm \alpha p)^m \pm B(b \pm \beta p)^m$ fore per p diuiſibilem. Haecque veritas aeque locum inuenit, ſive p ſit numerus primus ſiue ſecus. Quin etiam non opus eſt, vt vtriusque poteſtatis idem ſit exponens m, ſed etiamſi eſſent inaequales, concluſio perinde valebit. Tum vero quoque ſi m fuerit numerus par ex diuiſibilitate formulae $a^m \pm b^m$ per numerum p, diuiſibilitas etiam huius formulae $(\alpha p \pm a)^m \pm (\beta p \pm b)^m$ ſequitur. Verum haec aliaque ſimilia ex algebrae elementis ſponte patent.

Theorema 11.

45. Si fuerit $a = ff \pm (2m+1)\alpha$, et $2m+1$ numerus primus, tum iſta expreſſio $a^m - 1$ erit diuiſibilis per $2m+1$.

Demonſtratio.

Cum ſit $2m+1$ numerus primus, per eum dividi poterit haec formula $f^{2m}-1$, ſeu haec $(ff)^m - 1$. Hinc per theorema praecedens quoque iſta formula $(ff \pm (2m+1)\alpha)^m - 1$ erit diuiſibilis per $2m+1$. Quare ſi fuerit $a = ff \pm (2m+1)\alpha$, formula $a^m - 1$ per numerum primum $2m+1$ diuidi poterit. Q. E. D.

Coroll. 1.

46. Si ergo fuerit vel $a = (2m+1)\alpha + 1$ vel $a = (2m+1)\alpha + 4$, vel $a = (2m+1)\alpha + 9$; vel $a = (2m+1)\alpha + 16$ vel etc. tum formula $a^m - 1$ ſemper erit diuiſibilis per $2m+1$, ſi quidem $2m+1$ fuerit numerus primus.

Coroll. 2.

46. Cum caſus, quibus ipſe numerus a eſt diuiſibilis per $2m+1$ excludantur, manifeſtum eſt in formula $ff \pm (2m+1)\alpha$ numerum f per $2m+1$ diuiſibilem eſſe non poſſe. Hinc pro f omnes numeri aſſumi poſſunt qui per $2m+1$ non ſint diuiſibiles.

Coroll. 3.

47. Numeri ergo pro f aſſumendi ſunt $(2m+1)k \pm 1$; $(2m+1)k \pm 2$; $(2m+1)k \pm 3$; ..... $(2m+1)k \pm m$: in his enim formulis omnes numeri per $2m+1$ non diuiſibiles continentur. Hinc ſumendis quadratis

dratis formae ipsius $\underline{a}$, si quidem partes per $2m+1$ diuisibiles in vnum colligantur, erunt sequentes: $(2m+1)p+1$; $(2m+1)p+4$; $(2m+1)p+q$; ..... $(2m+1)p+mm$ quarum numerus est m.

Coroll. 4.

48. Ad valores igitur ipsius $\underline{a}$ inueniendos, vt a^m-1 per numerum primum $2m+1$ fiat diuisibile, inuestigari oportet residua, quae in diuisione cuiusque numeri quadrati per $2m+1$ remanent. Si enim $\underline{r}$ fuerit huiusmodi residuum, erit $(2m+1)p+r$ idoneus valor pro a.

Coroll. 5.

49. Omnia haec residua $\underline{r}$ erunt autem minora quam $2m+1$, neque tamen omnes numeri minores quam $2m+1$ erunt valores ipsius $\underline{r}$; quia numerus valorum ipsius $\underline{r}$ maior esse nequit quam $\underline{m}$. Dabuntur ergo semper $\underline{m}$ numeri, qui pro $\underline{r}$ adhiberi non poterunt.

Coroll. 6.

50. Valores vero ipsius $\underline{r}$ erunt primo omnes numeri quadrati ipso $2m+1$ minores, tum vero residua, quae in diuisione maiorum quadratorum per $2m+1$ remanent, neque tamen vnquam numerus omnium diuersorum valorum ipsius r. maior esse poterit numero $\underline{m}$.

Scholion.

51. Vt vsus huius theorematis clarius appareat, atque per exempla numerica illustrari possit, sequentia problemata adiicere visum est, ex quibus non solum veritas theorematis luculentius perspicietur, sed etiam viciſſim patebit

tebit, quoties a non habuerit valorem hic assignatum, toties formulam $a^m - 1$ non esse diuisibilem per $2m+1$. Cum igitur haec formula $a^{2m}-1$ semper sit diuisibilis per $2m+1$, quoties a^m-1 diuisionem per $2m+1$ non admittit, toties a^m+1 per $2m+1$ diuisibile esse oportebit.

Exempl. 1.

52. *Inuenire valores ipsius* $\underline{a}$, *vt* a^2-1 *fiat diuisibile per* 5.

Residua, quae ex diuisione quadratorum per 5 remanent sunt 1 et 4; hinc necesse est vt sit vel $a=5p+1$ vel $a=5p+4$, siue $a=5p+1$. Priori casu fit $aa-1$ seu $(a-1)(a+1)=5p(5p+2)$ posteriori autem $=(5p-2)5p$. vtroque ergo diuisibilitas per 5 perspicitur. Sin autem fuerit vel $a=5p+2$, vel vel $a=5p+3$ neutro casu formula $aa-1$ per 5 erit diuisibilis.

Exempl. 2.

53. *Inuenire valores ipsius* $\underline{a}$, *vt haec forma* a^6-1 *fiat per* 7 *diuisibilis.*

Tria residua, quae in diuisione omnium quadratorum per 7 remanent sunt, 1, 2, 4. Hinc valores ipsius $\underline{a}$ sunt: $7p+1$; $7p+2$, et $7p+4$, sin autem fuerit vel $a=7p+3$ vel $7p+5$ vel $7p+6$, tum non formula proposita a^6-1 sed haec a^3+1 per 7 fiet diuisibilis.

Exempl. 3.

54. *Inuenire valores ipsius* a *vt haec forma* a^5-1 *fiat per* 11 *diuisibilis.*

Nu-

Numeri quadrati per 11 diuiſi dabunt 5 diuerſa reſidua quae ſunt: 1, 3, 4, 5, 9. Hinc formula $a^5 - 1$ per 11 erit diuiſibilis, ſi fuerit $a = 11p + r$ denotante r vnumquemque ex numeris 1, 3, 4, 5, 9. Sin autem pro a ſumatur quidam ex his numeris 2, 6, 7, 8, 10 multiplo quocunque ipſius 11 auctus, tum $a^5 + 1$ per 11 erit diuiſibile.

Theorema 12.

55. Si fuerit $a = f^3 \pm (3m+1)\alpha$, exiſtente $3m+1$ numero primo, tum haec forma $a^m - 1$ ſemper erit per $3m+1$ diuiſibilis.

Demonſtratio.

Ob $3m+1$ numerum primum erit $f^{3m} - 1$ diuiſibile per $3m+1$. At eſt $f^{3m} - 1 = (f^3)^m - 1$, vnde quoque haec formula $(f^3 \pm (3m+1)\alpha)^m - 1$ erit diuiſibilis per $3m+1$. Quare ſi ſumatur $a = f^3 \pm (3m+1)\alpha$, tum haec formula $a^m - 1$ erit per $3m+1$ diuiſibilis. Q. E. D.

Coroll. 1.

56. Ad valores ergo ipſius a inueniendos, omnia reſidua quae oriuntur, ſi cubi per $3m+1$ diuidantur, notari debent. Vnumquodque enim horum reſiduorum multiplo ipſius $3m+1$ quocunque auctum dabit valorem idoneum pro a.

Coroll. 2.

57. Cum $3m+1$ eſſe debeat numerus primus, neceſſe eſt vt m ſit numerus par, ſicque numerus primus $3m+1$ vnitate ſuperabit multiplum ſenarii. Hinc erunt numeri pro m et $3m+1$ adhibendi ſequentes:

m 2, 4, 6, 10, 12, 14, 20, 22, 24, 26, 32 etc.
$3m+1$; 7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97, etc.

Coroll. 3.

58. Si ergo numeri cubici per hos numeros primos $3m+1$ diuidantur, sequentia residua remanebunt:

Diuisores	Residua
7	1, 6
13	1, 5, 8, 12
19	1, 7, 8, 11, 12, 18
31	1, 2, 4, 8, 15, 16, 23, 27, 29, 30
37	1, 6, 8, 10, 11, 14, 23, 26, 27, 29, 31, 36
	etc.

In his residuis primo occurrunt omnes cubi diuisoribus minores, deinde si quodpiam residuum fuerit r pro diuisore $3m+1$, tum quoque aliud dabitur residuum $=3m+1-r$. si enim cubus f^3 dederit residuum r, cubus $(3m+1-f)^3$ dabit residuum $-r$ seu $3m+1-r$.

Scholion.

59. Notatu hic dignum est numerum residuorum perpetuo esse $=m$, si diuisor fuerit $=3m+1$. Semper ergo dantur tres cubi, quorum radices sint $<3m+1$, ex quibus idem residuum resultat. Scilicet hi tres cubi 1^3, 2^3, 4^3 per 7 diuisi idem dant residuum $=1$, et hi tres cubi 2^3, 5^3, et 6^3 per 13 diuisi idem dant residuum 8. Praeterea hic notari conuenit, si pro a alii valores praeter hos assignatos capiantur, tum a^m-1 non esse per $3m+1$ diuisibile, quod etsi verum esse facile de-

pre-

prehenditur, tamen eius demonſtratio ex praecedentibus non ſequitur, pertinetque haec veritas ad id genus, quod nobis noſſe, non autem demonſtrare licet. His ergo caſibus, quibus $a^m - 1$ per $3m + 1$ non eſt diuiſibile, haec formula $a^{2m} + a^m + 1$ diuiſionem admittet.

Theorema 13.

60. Si fuerit $a = f^n \pm (mn+1)\alpha$ exiſtente $mn+1$ numero primo, tum haec forma $a^m - 1$ erit diuiſibilis per $mn+1$.

Demonſtratio.

Ob $mn+1$ numerum primum erit $f^{mn} - 1$ diuiſibile per $mn+1$. At eſt $f^{mn} - 1 = (f^n)^m - 1$, vnde quoque haec forma $(f^n \pm (mn+1)\alpha)^m - 1$ erit diuiſibilis per $mn+1$. Quare ſi ponatur $a = f^n \pm (mn+1)\alpha$, haec formula $a^m - 1$ per $mn+1$ diuidi poterit. Q. E. D.

Coroll. 1.

61. Si ergo poteſtates exponentis n per numerum primum $mn+1$ diuidantur, ſingula reſidua vel ipſa vel multiplo ipſius $mn+1$ quocunque aucta idoneos praebebunt valores pro α, vt $a^m - 1$ fiat per $mn+1$ diuiſibile.

Coroll. 2.

62. Hinc ſi $a^m - 1$ non fuerit per $mn+1$ diuiſibile, tum valor ipſius α in hac expreſſione $f^n \pm (mn+1)\alpha$ non continebitur, ſeu nulla dabitur poteſtas exponentis n quae per $mn+1$ diuiſa relinquat α.

Scholion.

63. Propoſitionis huius conuerſa, ſi omni modo examinetur, quoque vera deprehenditur; ita vt quoties a^m-1 ſit diuiſibile per $mn+1$. toties quoque valor ipſius a in formula $f^n \pm (mn+1)\alpha$ contineatur; ſeu toties dabitur poteſtas f^n quae per $mn+1$ diuiſa relinquat $\underline{a}$ pro reſiduo. Ita cum obſeruaſſem formulam $2^{64}-1$ eſſe per 641 diuiſibilem, ob $m=64$ fiet $n=10$, dabitur quoque poteſtas dignitatis decimae, quae per 641 diuiſa relinquat 2. Atque reuera huiusmodi poteſtatem deprehendi eſſe 96^{10}. Praeterea vero cum $2^{32}-1$ non ſit diuiſibile per 641, hoc caſu fit $m=32$ et $n=20$; nulla igitur datur poteſtas dignitatis viceſimae, quae per 641 diuiſa relinquat 2. Veritas huius poſterioris aſſerti rigoroſe eſt euicta, ſed adhuc deſideratur demonſtratio harum propoſitionum conuerſarum: ſcilicet ſi a^m-1 fuerit diuiſibile per numerum primum $mn+1$, tum quoque ſemper $\underline{a}$ eſſe numerum in hac formula $f^n \pm (mn+1)\alpha$ comprehenſum. Atque ſi a non contineatur in formula $f^n \pm (mn+1)\alpha$ tum quoque a^m-1 per $mn+1$ diuiſionem non admittere. Quarum propoſitionum ſi altera demonſtrari poſſet, ſimul veritas alterius eſſet euicta. Ceterum theorema hic demonſtratum huc redit, vt quoties f^n-a fuerit diuiſibile per $mn+1$, toties quoque formula a^m-1 ſit per $mn+1$ diuiſibilis. In hoc genere latius patet theorema ſequens.

Theorema 14.

64. Si fuerit f^n-ag^n diuiſibile per numerum primum $mn+1$, tum quoque a^m-1 erit diuiſibile per $mn+1$.

De-

Demonſtratio.

Cum ponatur formula $f^n - ag^n$ diuiſibilis per $mn+1$, erit quoque haec formula $f^{mn} - a^m g^{mn}$, quippe quae per illam diuidi poteſt, diuiſibilis per $mn+1$. At cum $mn+1$ ſit numerus primus, per eum diuiſibilis erit haec forma $f^{mn} - g^{mn}$; vnde quoque differentia $g^{mn}(a^m - 1)$ ſeu ipſa formula $a^m - 1$ per $mn+1$ erit diuiſibilis, propterea quod g per $mn+1$ diuiſionem admittere nequeat, niſi ſimul f per eundem eſſet diuiſibile, qui caſus in noſtro ratiocinio perpetuo excluditur. Q. E. D.

Coroll. 1.

65. Si ergo $a^m - 1$ per $mn+1$ non fuerit diuiſibile, tum quoque nulli dantur numeri f et g vt haec formula $f^n - ag^n$ per $mn+1$ fiat diuiſibilis.

Coroll. 2.

66. Si ſuperioris propoſitionis conuerſa demonſtrari poſſet, tum quoque euictum foret: quoties $f^n - a$ per $mn+1$ diuidi nequeat, tum ne hanc quidem formulam $f^n - ag^n$ diuiſionem per $mn+1$ admittere poſſe, ſimul vero etiam pateret, ſi $f^n - ag^n$ ſit diuiſibile per $mn+1$, tum quoque dari huiusmodi formulam $f^n - a$, quae ſit per $mn+1$ diuiſibilis.

Theorema 15.

67. Si huiusmodi formula $af^n - bg^n$ fuerit diuiſibilis per numerum primum $mn+1$, tum quoque haec formula $a^m - b^m$ erit per $mn+1$ diuiſibilis.

Demonſtratio.

Si fuerit $af^n - bg^n$ diuiſibile per $mn+1$, tum quoque haec formula $a^m f^{mn} - b^m g^{mn}$ erit per $mn+1$ diuiſibilis. At ob $mn+1$ numerum primum erit quoque haec formula $f^{mn} - g^{mn}$, ideoque et haec $a^m f^{mn} - a^m g^{mn}$ per $mn+1$ diuiſibilis, ſubtrahatur haec ab illa $a^m f^{mn} - b^m g^{mn}$ atque reſiduum $g^{mn}(a^m - b^m)$ ſeu $a^m - b^m$ per $mn+1$ erit diuiſibile. Q. E. D.

Coroll. 1.

68. Si itaque $a^m - b^m$ non fuerit per $mn+1$ diviſibile, tum nulli dabuntur numeri pro f et g ſubſtituendi, vt huiusmodi formula $af^n - bg^n$ ſit per $mn+1$ diuiſibilis.

Coroll. 2.

69. Huius propoſitionis conuerſa, quod, ſi fuerit formula $a^m - b^m$ diuiſibilis per $mn+1$, ſimul dentur numeri f et g, vt $af^n - bg^n$ fiat diuiſibilis per $mn+1$ vtcunque examinetur, vera deprehenditur. Interim tamen eius demonſtratio etiamnum deſideratur.

Scholion.

70. Caſus huius propoſitionis inuerſae demonſtrari poteſt, quo numeri m et n ſunt inter ſe primi: hoc enim caſu ſemper eiusmodi numeri μ et ν exhiberi poſſunt, vt ſit $\mu n \pm 1 = \nu m$. Namque ſi inter numeros m et n ea operatio inſtituatur, quae pro maximo communi diviſore inſtitui ſolet, atque quoti notentur, ex iiſque fractiones ad $\frac{m}{n}$ appropinquantes quaerantur, vltima erit $\frac{m}{n}$, et ſi penultima fuerit $\frac{\mu}{\nu}$ erit $\mu n \pm 1 = \nu m$. Hoc ergo lem-

lemmate praemisso demonstratio propositionis conuersae, qua m et n sunt numeri inter se primi ita se habebit.

Theorema 16.

71. Si m et n fuerint numeri primi inter se, atque ista formula $a^m - b^m$ diuisibilis sit per numerum $mn + 1$, tum dabitur formula $af^n - bg^n$ diuisibilis per $mn + 1$.

Demonstratio.

Ponatur $f = a^\mu$ et $g = b^\mu$, atque formula $af^n - bg^n$ abibit in hanc $a^{\mu n+1} - b^{\mu n+1}$, quare si μ ita capiatur, vt sit $\mu n + 1 = \nu m$, habebitur $a^{\nu m} - b^{\nu m}$, quae cum sit diuisibis per $a^m - b^m$, quoque per $mn + 1$ diuisibilis erit, sicque dabitur casus, quo $af^n - bg^n$ diuisibile erit per $mn + 1$. Sin autem fuerit $\mu n - 1 = \nu m$, tum sumatur $f = b^\mu$ et $g = a^\mu$ fietque $af^n - bg^n = ab^{\mu n} - ba^{\mu n} = ab\left(b^{\mu n-1} - a^{\mu n-1}\right) = -ab\left(a^{\nu m} - b^{\nu m}\right)$ ideoque erit per $mn + 1$ diuisibilis. Q. E. D.

Coroll. 1.

72. Si ergo m et n fuerint numeri inter se primi, atque $mn + 1$ numerus primus, tum istae propositiones sunt demonstratae. I. Si $af^n - bg^n$ fuerit diuisibile per $mn + 1$, tum quoque $a^m - b^m$ erit per $mn + 1$ diuisibile, et si illa formula nullo modo sit diuisibilis per $mn + 1$, tum etiam haec non erit diuisibilis. II. Si $a^m - b^m$ fuerit diuisibile per $mn + 1$, tum dabitur numerus huius formae $af^n - bg^n$ per $mn + 1$ diuisibilis, atque si $a^m - b^m$ per $mn + 1$ diuisionem non admittat, tum nullus dabitur numerus formae $af^n - bg^n$ per $mn + 1$ diuisibilis.

Coroll.

Coroll. 2.

73. Si m sit numerus par, tum b aeque negatiue atque affirmatiue accipi potest, hoc ergo casu si $a^m - b^m$ fuerit diuisibile per $mn+1$, tum etiam eiusmodi formula $af^n + bg^n$ per $mn+1$ diuisibilis assignari poterit; id quod etiam inde patet, quod n sit numerus impar, ideoque potestas g^n negatiua fieri queat.

Coroll. 3.

74. Simili modo demonstrabitur, si fuerint vt ante m et n numeri inter se primi, atque haec formula $a^m - b^m$ sit diuisibilis per $mp+1$, tum quoque exhiberi posse formulam huiusmodi $af^n - bg^n$ diuisibilem per $mp+1$.

VARIAE DEMONSTRATIONES GEOMETRIAE.

AVCTORE
L. EVLERO.

§. 1.

Reperitur in commercio epistolico Fermatii propositio quaedam geometrica, quam Geometris demonstrandam proposuit. Quae etsi ad naturam circuli spectat, nihilque difficultatis primo intuitu inuoluere videtur, tamen a pluribus Geometris frustra est suscepta, neque vsquam adhuc eius demonstratio est tradita. Per Analysin quidem non difficulter eius veritas agnoscitur, indeque demonstrationem deriuare non admodum foret arduum, sed huiusmodi demonstrationes plerumque ita analysin olent, vt ab huius artis expertibus vix intelligi queant. Requiritur igitur huius propositionis a Fermatio allatae eiusmodi demonstratio geometrica, quae more veterum Geometrarum sit adornata, et quae etiam ab iis, qui analysi non sint assueti, intelligi possit. Talem igitur demonstrationem hic tradam, quae sequenti lemmate innititur. Tab. II.

Lemmata.

§. 2. Si linea recta AB vtcunque secetur in duobus punctis R et S, erit rectangulum ex tota AB in partem mediam RS vna cum rectangulo ex partibus extremis AR et BS aequale rectangulo ex partibus AS et BR, seu erit: $AB \cdot RS + AR \cdot BS = AS \cdot BR$. Fig. 1.

Demonſtratio.

Cum ſit $AB=AS+BS$, erit vtrumque ducendo in RS,

$$AB.RS=AS.RS+BS.RS$$

addatur $AR.BS$ $AR.BS$ vtrinque, et erit

$$AB.RS+AR.BS=AS.RS+BS.RS+AR.BS$$

At eſt $BS.RS+AR.BS=BS(RS+AR)=BS.AS$,
vnde fit $AB.RS+AR.BS=AS.RS+BS.AS$
Verum eſt $AS.RS+BS.AS=AS(RS+BS)=AS.BR$
Conſequenter habebitur: $AB.RS+AR.BS=AS.BR$

Q. E. D.

Scholion.

Fig. 2. §. 3. Hocce lemma etiam ſequenti modo per ſolam figuram geometricam demonſtrari poteſt. Super data recta AB in punctis R et S vtcunque diuiſa conſtituatur quadratum, $ABab$ et latus Ba ſimili modo ſecetur in punctis r et s, vt ſit $Bs=BS$; $sr=SR$ et $ar=AR$: tum ductis rectis Rb, Sg item sc, rd lateribus quadrati parallelis, erunt partes Ss, cg quadrata circa diagonalem Bb ſita, ideoque erit $\square Ae=\square ae$. Addatur vtrique rectangulum cf, fietque $\square Ae+\square cf=\square ae+\square cf$ ſeu $\square Af=\square ae+\square cf$, ſed $\square ae=\square af+\square er$, vnde $\square Af=\square af+\square er+\square cf=\square af+\square er$. At eſt $\square Af=AS.Br=AS.BR$; et $\square af=ar.BS=AR.BS$ atque $\square cr=AB.rs=AB.RS$, quibus valoribus ſubſtitutis elicietur: $AS.BR=AR.BS+AB.RS$ ſeu $AB.RS+AR.BS=AS.BR$ prorſus vti lemma habet.

Theorema

Theorema Fermatii.

§. 4. Si ſuper ſemicirculi AMB diametro AB Fig. 3. conſtituatur parallelogrammum rectangulum ABFE, cuius latitudo AE ſeu BF aequetur chordae quadrantis eiusdem circuli ſeu lateri quadrati inſcripti, atque ex punctis E et F ad quoduis peripheriae punctum M ducantur rectae EM, FM; his diameter AB ita ſecabitur in punctis R et S, vt ſit: $AS^2+BR^2=AB^2$.

Demonſtratio.

Ex puncto M per terminos diametri A et B producantur rectae MAP et MBQ donec baſi EF productae occurrant in punctis P et Q. Iam quia angulus AMB eſt rectus, erit $P+Q=$ ang. recto; at eſt etiam $P+\alpha=$ ang. recto et $Q+\mathfrak{G}=$ ang. recto, ob rectas AE et BF ad EF normales; vnde erit $P=\mathfrak{G}$ et $Q=\alpha$, ideoque triangula PEA et BFQ inter ſe ſimilia: ex quo habebitur $PE:AE=BF:QF$ hincque $PE.QF=AE.BF=AE^2$, et propterea $2PE.QF=2AE^2$. At quia AE aequatur chordae quadrantis, erit $2AE^2=AB^2=EF^2$, ita vt futurum ſit $2PE.QF=EF^2$. Quare cum hic recta PQ ita in punctis E et F ſecta habeatur, vt ſit duplum rectangulum partium extremarum PE et QF aequale partis mediae EF quadrato; diameter vero AB in punctis R et S ſimili modo ſit ſecta, ſequitur fore quoque duplum rectangulum partium extremarum AR et BS aequale quadrato partis mediae RS, ſeu erit $2AR.BS=RS^2$. Iam cum ſit $AS+BR=AB+RS$, erit quadratis ſumtis:

$AS^2+BR^2+2AS.BR=AB^2+RS^2+2AB.RS$
Ponatur hic pro RS^2 eius valor $2AR.BS$ fietque
$AS^2+BR^2+2AS.BR=AB^2+2AB.RS+2AR.BS$
At per lemma praemiſſum eſt $AB.RS+AR.BS=AS.BR$ ideoque etiam $2AB.RS+2AR.BS=2AS.BR$, quo valore in illa aequalitate ſubſtituto orietur:
$$AS^2+BR^2+2AS.BR=AB^2+2AS.BR$$
auferatur vtrinque pars communis $2AS.BR$ ac remanebit:
$AS^2+BR^2=AB^2$. Q. E. D.

§. 5. In vulgus deinde nota eſt regula inueniendi aream trianguli ex datis eius tribus lateribus, quae ita ſe habet, vt a ſemiſumma laterum ſingula latera ſeorſim ſubtrahantur et ſolidum ſeu productum ex his tribus reſiduis ortum per ipſam ſemiſummam multiplicetur, tum vero ex iſto producto radix quadrata extrahatur, quae exhibitura ſit aream trianguli propoſiti. Analytice quidem haec regula facile demonſtratur, ac demonſtrationes ex analyſi concinnatae paſſim occurrunt, verum eae a more geometrico non mediocriter diſſident, vt non niſi a lectoribus in Analyſi exercitatis intelligi poſſint. Quocirca iſtius regulae hic demonſtrationem pure geometricam tradam, in qua nullum analyſeos veſtigium percipiatur. Petita eſt ea ex circulo triangulo inſcripto, cuius ſymtomata ab Euclide ſufficienter ſunt expoſita; quibus autem ad demonſtrationem formandam opus habeo, ea in ſequentibus propoſitionibus complectar, quae viam ad memoratae regulae demonſtrationem parabunt.

Theorema

Theorema.

§. 6. Area cuiusque Trianguli ABC aequatur re- Fig. 4.
ctangulo ex semisumma laterum in radium circuli inscripti, seu area $\triangle ABC$ est $\frac{1}{2}(AB+AC+BC)OP$.

Demonstratio.

Ex centro circuli inscripti O in singula latera demittantur perpendicula OPOQ. OR, quae erunt aequalia radio circuli inscripti. Ex O ducantur pariter ad angulos rectae OA. OB. OC quibus triangulum propositum diuidetur in tria triangula AOB, AOC, BOC, eandem altitudinem $OR=OQ=OP$ habentia, et quorum bases sunt latera trianguli AB, AC, BC. Hinc ista triangula iunctim sumta aequantur triangulo cuius basis est summa laterum $AB+AC+BC$, et altitudo radio circuli inscripti OP aequalis, cui cum proinde area ipsius trianguli propositi ABC sit aequalis, haec aequabitur rectangulo ex semisumma laterum in radium circuli inscripti OP, seu erit area $\triangle ABC=\frac{1}{2}(AB+AC+BC)OP$. Q. E. D.

Theorema.

§. 7. Si ex centro O circuli triangulo ABC inscripti in singula latera perpendicula demittantur OP, OQ, OR his latera ita secabuntur, vt posita semisumma laterum $\frac{1}{2}(AB+AC+BC)=S$, futurum sit:
$AR=AQ=S-BC$; $BR=BP=S-AC$ et $CP=CQ=S-AB$.
atque $AR+BP+CQ=S$.

Demonstratio.

Nam ob perpendicula OP, OQ, OR inter se aequalia, statim patet fore $AQ=AR$; $BP=BR$ et $CP=CQ$, vnde

erit ſumma laterum $AB+AC+BC=2AR+2BP+2CQ$, ideoque habebitur $AR+BP+CQ=$ ſemiſummae laterum $=S$. Erit ergo

$AR+BC=S$ ideoque $AR=AQ=S-BC$
$BP+AC=S$ ideoque $BP=BR=S-AC$
$CQ+AB=S$ ideoque $CQ=CP=S-AB$.

Q. E. D.

Theorema.

Fig. 5. §. 8. Si vt ante ex centro O circuli triangulo ABC inſcripti in ſingula latera demittantur perpendicula OP, OQ, OR, erit ſolidum ſub partibus AR.BP.CQ contentum aequale ſolido ex ſemiſumma laterum S et quadrato radii circuli inſcripti OP confecto ſeu erit: $AR.BP.CQ=S.OP^2$.

Demonſtratio.

Ductis ex centro circuli inſcripti O ad ſingulos angulos rectis OA.OB.OC, ad earum aliquam CO ſi opus eſt productam ex altero reliquorum angulorum B ducatur normalis BM, quae radio PO producto occurrat in N. Iam cum anguli A, B, C a rectis OA, OB, OC bifariam ſecentur, erit in triangulo BOC angulus extremus $BOM=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C$, hinc ob $BOM+OBM=$ recto, erit $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C+OBM=$ recto. Verum quia $A+B+C=2$ rect. erit quoque $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}A=$ recto, ideoque $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C+OBM=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}A$ vnde fit $OBM=\frac{1}{2}A=OAR$. Quare cum in triangulis rectangulis BOM et AOR ſit ang. $OBM=$ ang. OAR

et

ea erunt inter se similia, hincque fiet
AR : RO = BM : MO, seu AR : OP = BM : MO
Porro ob triangula rectangula CBM, NBP et NOM inter se similia erit
BM : BC = MO : ON seu BM : MO = BC : ON
vnde colligitur: AR : OP = BC : ON, et aequatis rectangulis mediorum et extremorum erit:
AR . ON = OP . BC; atque ob ON = PN − OP
AR . PN − AR . OP = BC . OP seu AR . PN = AR . OP + BC . OP = (AR + BC) OP. Verum AR + BC = S (§. praec.), ita vt sit AR . PN = S . OP. Denique ob triangula COP et NBP similia est PN : BP = CP : OP, vnde OP . PN = BP . CP, et AR . BP . CP = AR . OP . PN, sed prior aequatio per OP multiplicata dat AR . OP . PN = S . OP^2. Quocirca concluditur AR . BP . CP seu AR . BP . CQ = S . OP^2. Q. E. D.

Theorema.

§. 9. Area trianguli cuiusuis ABC reperitur, si a semisumma laterum (quae sit = S) singula latera seorsim subtrahantur, ac solidum sub his tribus residuis contentum per ipsam semisummam laterum S multiplicetur, atque ex producto radix quadrata extrahatur. Seu erit area trianguli $ABC = \sqrt{S(S-AB)(S-AC)(S-BC)}$.

Demonstratio.

Per §. 6. area trianguli ABC aequatur rectangulo ex semisumma laterum S et radio circuli inscripti OP, sicque erit area trianguli ABC = S . OP. Verum cum ex §. praec. sit S . OP^2 = AR . BP . CQ, erit per S vtrinque

que multiplicando $S^2.OP^2 = S.AR.BP.CQ$, hincque radicem quadratam extrahendo habebitur:

$$S.OP = \sqrt{S.AR.BP.CQ}$$

ideoque area trianguli $ABC = \sqrt{S.AR.BP.CQ}$.

ſed ex §. 7 patet eſſe:

$AR = S - BC$; $BP = S - AC$ et $CQ = S - AB$

quibus valoribus ſubſtitutis erit.

Area $\Delta ABC = \sqrt{S(S-AB)(S-AC)(S-BC)}$.

Q. E. D.

Coroll. 1.

§. 10. Hinc etiam concinna expreſſio pro radio circuli triangulo inſcripti OP exhiberi poteſt. Cum enim ſit $S.OP^2 = AR.BP.CQ$ erit $OP^2 = \frac{AR.BP.CQ}{S}$, ideoque $OP = \sqrt{\frac{AR.BP.CQ}{S}}$. Iam ergo pro AR, BP, CQ ſcriptis valoribus ante indicatis habebitur.

Radius circuli inſcripti $OP = \sqrt{\frac{(S-AB)(S-AC)(S-BC)}{S}}$.

Coroll. 2.

§. 11. Quia S denotat ſemiſummam laterum trianguli; ita vt ſit $S = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$ erit hoc valore ſubſtituto:

$S - AB = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(AC + BC - AB)$

$S - AC = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}(AB + BC - AC)$

$S - BC = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC - \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$

ſic erit: $S(S-AB)(S-AC)(S-BC) =$

$\frac{1}{16}(AB+AC+BC)(AC+BC-AB)(AB+BC-AC)$
$(AB+AC-BC)$

ideoque area trianguli quoque ita exprimetur.

$\frac{1}{4}\sqrt{(AB+AC+BC)(AC+BC-AB)(AB+BC-AC)}$
$(AB+AC-BC)$.

Scho-

Scholion.

§. 12. Vltima haec formula pro inuenienda area cuiusque trianguli est maxime nota, ac plerumque in elementis geometriae tradi solet, etiamsi eius demonstratio difficulter per elementa confici possit. Similis quoque fere regula habetur pro area cuiusque quadrilateri circulo inscripti inuenienda, quippe quae pari modo satis concinne per sola latera exprimi potest. Eius quidem demonstratio, si analysis in subsidium vocetur, non est difficilis, sed qui eam more apud Geometras recepto adornare sunt conati, maximas experti sunt difficultates, Cl: quondam Naudaeus non parum in hoc genere laborauit, et geminam huius quoque regulae demonstrationem protulit in Misc. Berol. verum vtraque non solum maxime est intricata et multitudine linearum in figura ductarum obruta, vt sine summa attentione ne capi quidem possit, sed etiam vbique nimis luculenta vestigia analytici calculi offendunt, Mihi quidem sequentibus propositionibus praemittendis opus est.

Theorema.

§. 13. Si quadrilateri circulo inscripti ABCD duo latera sibi opposita AB, DC ad occursum vsque in E producantur, erit area quadrilateri ABCD ad aream trianguli BCE vt AD^2-BC^2 ad BC^2. Fig. 6.

Demonstratio.

Quia tam angulus BAD quam BCE cum angulo BCD constituit duos rectos, erit BAD=BCE, similiterque ADC=CBE, vnde triangula AED et CEB

erunt similia, eorumque ergo areae se habebunt vt quadrata laterum homologorum, veluti AD et BC: erit itaque $\triangle AED : \triangle CEB = AD^2 : BC^2$ et diuidendo $\triangle AED - \triangle CEB : \triangle CEB = AD^2 - BC^2$ hoc est $\square ABCD : \triangle CEB = AD^2 - BC^2 : BC^2$. Q. E. D.

Coroll. 1.

§. 14. Ex cognita ergo area trianguli CEB inuenietur area quadrilateri ABCD: erit namque

$$\square ABCD = \frac{AD^2 - BC^2}{BC^2} \cdot \triangle BEC$$

seu si area trianguli BEC designetur breuitatis gratia littera T, et area quadrilateri ABCD littera Q, erit $Q = \frac{AD^2 - BC^2}{BC^2} \cdot T$.

Coroll. 2.

§. 15. Tum vero quia est differentia quadratorum $AD^2 - BC^2 = (AD + BC)(AD - BC)$, erit $\frac{AD^2 - BC^2}{BC^2} = \frac{AD - BC}{BC} \cdot \frac{AD + BC}{BC}$ hincque habebitur haec aequatio $Q = \frac{AD - DC}{BC} \cdot \frac{AD + BC}{BC}$, quae sumendis quadratis abit in hanc:

$$QQ = \frac{AD - BC}{BC} \cdot \frac{AD - BC}{BC} \cdot \frac{AD + BC}{BC} \cdot \frac{AD + BC}{BC} \cdot T \cdot T$$

Coroll. 3.

§. 16. Ex superiori autem §. 11. colligitur esse aream trianguli $BEC = T = \frac{1}{4}\sqrt{(BE + CE + BC)(BE + CE - BC)(BE - CE + BC)(CE - BE + BC)}$ vnde $TT = \frac{1}{16}(BE + CE + BC)(BE + CE - BC)(BE - CE + BC)(CE - BE + BC)$. Hinc ergo prodibit valor quadrati areae quadrilateri ABCD seu ipsius QQ combinandis his factoribus ipsius TT cum ante inuentis ita expressus

QQ

$$QQ=\tfrac{1}{16}\cdot\frac{(AD-BC)(BE+CE+BC)}{BC}\cdot\frac{(AD-BC)(BE+CE-BC)}{BC}\cdot\frac{(AD+BC)(BC+BE-CE)}{BC}\cdot\frac{(AD+BC)(BC-BE+CE)}{BC}.$$

Coroll. 4.

§. 17. Quam formam ita enunciare licet, vt dicamus quadratum areae ABCD decies sexies sumtum seu $16QQ$ aequari producto ex his quatuor factoribus.

I. . . . $\frac{(AD-BC)(BE+CE+BC)}{BC}$

II. . . . . $\frac{(AD-BC)(BE+CE-BC)}{BC}$

III. . . . . $\frac{(AD+BC)(BC+BE-CE)}{BC}$

IV. . . . . $\frac{(AD+BC)(BC-BE+CE)}{BC}$.

Theorema.

§. 18. Iisdem positis, quae in theor. praec. sunt assumta erit $BE+CE:BC=AB+CD:AD-BC$.

Demonstratio.

Cum enim triangula BEC et DEA sint similia, erit $BE:DE=BC:AD$ itemque $CE:AE=BC:AD$; vnde ex vtraque prodibit diuidendo

$BE:DE-BE=BC:AD-BC$

$CE:AE-CE=BC:AD-BC$

Cum igitur tam BE ad DE-BE, quam CE ad AE-CE eandem teneat rationem, vt nempe BC ad AD-BC; etiam summa antecedentium $BE+CE$ ad summam consequentium $DE-BE$ vna cum $AE-CE$ eandem seruabit rationem eritque:

$BE+CE:DE-BE+AE-CE=BC:AD-BC$

At est $DE-BE+AE-CE=DE-CE+AE-BE$

 $=CD$

$=CE+AB$ ſicque erit $BE+CE:AB+CD=BC:AD-BC$ et alternando $BE+CE:BC=AB+CD:AD-BC$. Q. E. D.

Coroll. 1.

§. 19. Cum igitur ſit $BE+CE:BC=AB+CD:AD-BC$ erit componendo $BE+CE+BC:BC=AB+CD+AD-BC:AD-BC$ vnde rectangulum extremorum aequale erit rectangulo mediorum, ſcilicet: $(AD-BC)(BE+CE+BC)=BC(AB+CD+AD-BC)$ hincque factorum in §. 17 exhibitorum primus erit I. . $\frac{(AD-BC)(BE+CE+BC)}{BC}=AB+CD+AD-BC$

Coroll. 2.

§. 20. Simili modo ex proportione $BE+CE:BC=AB+CD:AD-BC$ orietur diuidendo: $BE+CE-BC:BC=AB+CD-AD+BC:AD-BC$ vnde ſequentia rectangula inter ſe erunt aequalia: $(AD-BC)(BE+CE-BC)=BC(AB+CD-AD+BC)$ hincque factorum in §. 17 exhibitorum ſecundus erit: II. . . $\frac{(AD-BC)(BE+CE-BC)}{BC}=AB+CD-AD+BC$.

Theorema.

§. 21. Iisdem poſitis, ſcilicet ſi quadrilateri circulo inſcripti ABCD duo latera AB, DC ad concurſum vsque in E producantur, erit:

$$CE-BE:AB-DC=BC:AD+BC$$

Demonſtratio.

Triangula ſimilia BCE et DEA praebent vt ante

te has proportiones: $BE:DE=BC:AD$ et $CE:AE=BC:AD$ ex quarum vtraque elicitur componendo

$$BE:DE+BE=BC:AD+BC$$
$$CE:AE+CE=BC:AD+BC$$

Cum ergo tam BE ad $DE+BE$ quam CE ad $AE+CE$ eandem teneat rationem, etiam differentia antecedentium $CE-BE$ ad differentiam conſequentium $AE+CE$ demto $DE+BE$ eandem habebit rationem vt BC ad $AD+BC$ erit ſcilicet:

$$CE-BE:AE+CE-DE-BE=BC:AD+BC$$

At eſt $AE+CE-DE-BE=AE-BE-DE+CE=AB-CD$ ſicque erit $CE-BE-AB-CD=BC:AD+BC$ et alternando $CE-BE:BC=AB-CD:AD+BC$. Q. E. D.

Coroll. 1.

§. 22. Cum igitur hinc ſit inuertendo $BC:CE-BE=AD+BC:AB-CD$, erit componendo $BC+CE-BE:BC=AD+BC+AB-CD:AD+BC$. Atque aequatis rectangulis extremorum et mediorum fiet $(AD+BC)(BC+CE-BE)=BC(AD+BC+AB-CD)$ vnde factorum §. 17. exhibitorum quartus erit: IV. . . $\frac{(AD+BC)(BC+CE-BE)}{BC}=AB+AD+BC-CD$.

Coroll. 2.

§. 23. Simili modo ex proportione $BC:CE-BE=AD+BC:AB-CD$ orietur diuidendo $BC-CE+BE:BC=AD+BC-AB+CD:AD+BC$ hincque erit $(AD+BC)(BC+BE-CE)=BC$

(AD+BC+CD−AB) vnde factorum §. 17 exhibitorum tertius erit: III. . . $\frac{(AD+BC)(BC+BE-CE)}{BC} = AD+BC+CD-AB$.

Theorema.

§. 24. Quadrilateri circulo inscripti ABCD area inuenitur, si a semisumma omnium eius laterum singula latera seorsim subtrahantur, haec quatuor residua in se invicem multiplicentur, atque ex producto radix quadrata extrahatur.

Demonstratio.

Si duo latera opposita AB, CD ad concursum vsque in E producantur, atque quadrilateri ABCD area ponatur $=Q$, vidimus §. 17 valorem $16QQ$ aequari producto ex quatuor factoribus, quos eosdem factores in §§. 19. 20 et §§. 22. 23 succinctius expressimus, ita vt nunc valor ipsius $16QQ$ aequetur producto ex his quatuor factoribus.

I. $\frac{(AD-BC)(BE+CE+BC)}{BC} = AB+CD+AD-BC$

II. $\frac{(AD+BC)(BE+CE-BC)}{BC} = AB+CD-AD+BC$

III. $\frac{(AD+BC)(BC+BE-CE)}{BC} = AD+BC+CD-AB$

IV. $\frac{(AD+BC)(BC-BE+CE)}{BC} = AB+AD+BC-CD$

Hinc ergo erit $16QQ$ aequale huic producto $(AB+CD+AD-BC)(AB+CD+BC-AD)(AD+BC+CD-AB)(AB+AD+BC-CD)$. Quod si iam ponatur summa omnium laterum $AB+BC+CD+DA = 2S$ vt semisumma sit $=S$. erit:

2 S

$2S-2AB=BC+CD+DA-AB=$ factori III.
$2S-2BC=AB+CD+DA-BC=$ factori I.
$2S-2CD=AB+BC+DA-CD=$ factori IV.
$2S-2DA=AB+BC+CD-DA=$ factori II.
vnde productum ex his quatuor factoribus erit $(2S-2AB)(2S-2BC)(2S-2CD)(2S-2DA)$, quod binariis seorsim sumtis abit in hanc expressionem: $16(S-AB)(S-BC)(S-CD)(S-DA)$ cui propterea valor ipsius $16QQ$ aequatur. Quare vtrinque per 16 diuiso erit $QQ=(S-AB)(S-BC)(S-CD)(S-DA)$ vnde si radix quadrata extrahatur, fiet: $Q=$ Areae $ABCD=\sqrt{(S-AB)(S-BC)(S-CD)(S-DA)}$. Patet ergo aream quadrilateri ABCD inueniri, si a semisumma laterum S seorsim subtrahantur singula latera AB, BC, CD, DA, haecque quatuor residua $S-AB$, $S-BC$, $S-CD$, $S-DA$ in se inuicem multiplicentur, atque ex producto radix quadrata extrahatur. Q. E. D.

Scholion.

§. 25. His Theorematibus de area trianguli et quadrilateri circulo inscripti demonstratis, quae quidem ipsa satis sunt nota, aliud theorema subiungam nusquam adhuc neque prolatum neque demonstratum. Complectitur id singularem proprietatem omnium quadrilaterorum notatu maxime dignam, quae cum cognita parallelogrammorum natura eximiam habet affinitatem. Quemadmodum enim constat in omni parallelogrammo summam quadratorum ambarum diagonalium aequalem esse summae quadratorum quatuor laterum, ita demonstrabo in omni quadrilatero non parallelogrammo summam quadratorum ambarum

barum diagonalium ſemper minorem eſſe ſumma quadratorum quatuor laterum, atque adeo defectum facillime poſſe aſſignari.

Theorema.

Fig. 7. §. 26. Propoſito quocunque trapezio ABCD cum ſuis diagonalibus AC, BD, ſi circa bina latera AB, BC compleatur parallelogrammum ABCE, quod cum trapezio tria puncta A, B, C habebit cummunia, iunganturque reliqua puncta diuerſa D et E recta DE, erit ſumma quadratorum laterum trapezii $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$ maior quam ſumma quadratorum diagonalium AC^2+BD^2, atque exceſſus aequabitur quadrato lineae DE: ſeu erit $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+DE^2$.

Demonſtratio.

Ducatur in parallelogrammo ABCE altera diagonalis BE quae ipſi cum trapezio non eſt communis; tum ponatur CF ipſi AD, et BF ipſi ED parallela et aequalis, et quia BC=AE, iſtae lineae concurrent in puncto F, vt triangulum CBF ſimile ſit et aequale triangulo AED. Quo facto iungantur lineae AF, DF et EF. Hinc manifeſtum eſt fore tam ADCF quam BDEF parallelogrammum, atque diagonales illius eſſe AC et DF, huius uero BE et DF: vnde per proprietatem parallelogrammorum notam erit

ex ADCF . . . $2AD^2+2CD^2=AC^2+DF^2$

ex BDEF . . . $2BD^2+2DE^2=BE^2+DF^2$

vnde ex vtraque aequatione valorem DF^2 definiendo habe-

bebitur: $2AD^2+2CD^2-AC^2=2BD^2+2DE^2-BE^2=DF^2$ et AC^2 vtrinque addendo fiet: $2AD^2+2CD^2=2BD^2+2DE^2+AC^2-BE^2$. Iam vero ex natura parallelogrammi ABCE erit $2AB^2+2BC^2=AC^2+BE^2$ quae aequatio ad illam adiecta dabit $2AD^2+2CD^2+2AB^2+2BC^2=2BD^2+2DE^2+2AC^2$ ac $p2$ diuidendo obtinebitur $AD^2+CD^2+AB^2+BC^2=BD^2+DE^2+AC^2$ seu $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+DE^2$. At AB, BC, CD, DA sunt quatuor latera trapezii propositi AB CD, et AC, BD eius diagonales vnde summa quadratorum laterum aequalis est summae quadratorum ambarum diagonalium et insuper quadrato lineae DE, qua discrimen trapezii a parallelogrammo exponitur. Q. E. D.

Coroll. 1.

§. 27. Quo magis ergo trapezium a parallelogrammo discrepat, seu quo maius euadit interuallum DE, eo magis summa quadratorum laterum trapezii superabit summam quadratorum diagonalium.

Coroll. 2.

§. 28. Quia igitur in omni parallelogrammo summa quadratorum laterum aequalis est summae quadratorum diagonalium, in omni vero quadrilatero non parallelogrammo maior est, sequitur nullum exhiberi posse quadrilaterum, in quo summa quadratorum laterum minor sit quam summa quadratorum diagonalium.

Coroll. 3.

§. 29. Si vtraque diagonalis AC et BD trapezii

propoſiti ABCD biſecetur, illa in P haec vero in Q, erit recta PQ ſemiſſis interualli DE, et DE^2 aequalis erit quadruplo quadrato lineae PQ, vnde exceſſus ſummae quadratorum laterum ſuper ſummam quadratorum diagonalium valebit quadratum lineae PQ quater ſumtum.

Coroll. 4.

Fig. 8. §. 30. Theorema ergo propoſitum ſine mentione vllius parallelogrammi ita enunciari poterit: *In omni quadrilatero* ABCD, *ſi eius diagonales* AC *et* BD *biſecentur in punctis* P *et* Q, *eaque iungantur recta* PQ, *erit ſumma quadratorum laterum* $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$ *aequalis ſummae quadratorum diagonalium* AC^2+BD^2 *vna cum quadruplo quadrati lineae* PQ: *ſeu erit* $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4PQ^2$.

DE PROPAGATIONE PVLSVVM PER MEDIVM ELASTICVM

AVCTORE
L. EVLERO.

§. 1.

Medium elaſticum in ſtatu aequilibrii verſari nequit, Tab. III.
niſi omnes eius particulae aequalibus viribus elaſticis in ſe mutuo agant. Quod ſi autem vna particula adepta fuerit maiorem elaſticitatem, quam reliquae, tum ob ſtatum aequilibrii ſublatum haec ſeſe expandendo, ac reliquas magis comprimendo tamdiu agitabitur, donec per fectum aequilibrium inter omnes vires fuerit reſtitutum. Particularum enim elaſticarum eiusmodi eſt indoles, vt quo magis expanduntur, eo minorem obtineant vim elaſticam, contra vero, quo magis comprimuntur et in minus volumen rediguntur, earum vis elaſtica augeatur. Quanquam autem hoc incrementum ac decrementum elaſticitatis pro ratione aucti et minuti voluminis diuerſiſſimas proportiones ſequi poteſt, tamen ſi mutatio voluminis fuerit quam minima, augmentum vel decrementum vis elaſticae his ipſis mutationibus proportionale deprehenditur.

§. 2. Difficillima autem maximeque ardua videtur quaeſtio, qua commotio ſingularum particularum medii elaſtici, cum aequilibrium ſemel fuerit ſublatum, quaeritur, ſimul autem reſolutio huius quaeſtionis in phyſica maximi eſt momenti, cum formatio et propagatio ſoni

in huiusmodi commotione particularum aeris consistat. Neque etiam amplius dubitare licet, quin ipsum lumen, radiorumque lucidorum propagatio a sublato aequilibrio inter particulas aetheris proficiscatur. Quando enim aeris quaepiam portio in maius minusue spatium compellitur, ob minutam vel auctam eius elasticitatem status aequilibrii cum vicinis aeris particulis turbatur, hincque in istis agitatio oritur, quae sese continuo ad particulas vlteriores extendit, donec vbique tranquillitas fuerit restituta. Hinc igitur sonus, et si in aethere similis agitatio eueniat, inde lumen originem suam trahit.

Fig. 1. §. 3. Cum itaque haec quaestio sit maximi momenti, operam dabo, vt ad eam resoluendam ex primis principiis mechanicae viam sternam. Quo igitur a casu simpliciſſimo ordiar, primum vnicam considerabo particulam A, quae quidem in se spectata nullius mutationis sit capax, sed quae filis elasticis inertiae expertibus AP et AQ intra parietes firmos P et Q detineatur. Sint autem haec fila seu elastra AP et AQ ita comparata, vt quo fiant breuiora, eo maiori vi elastica polleant; dum autem elongantur, eorum elasticitas diminuatur. His positis manifestum est corpus A fore in aequilibrio, si vtriusque elastri AP et AQ eadem fuerit vis: quod euenire ponamus, si vtriusque elastri longitudo AP et AQ fuerit aequalis. Sit taque $AP=AQ=a$; et vtriusque vis elastica $=g$; quoniam corpusculum A vtrinque aequaliter vrgetur, si semel quieuerit, perpetuo quiescere perseuerabit.

Fig. 2. §. 4. Concipiamus nunc hoc corpusculum A ex situ aequilibrii semel fuisse dimotum, ita vt alterum elastrum

ſtrum longius alterum vero breuius ſit factum. Cum igitur hoc modo ex altera parte vis elaſtica ſit minuta, ex altera vero aucta, neceſſe eſt vt corpuſculum A motum conceperit, quem hic determinabo, in hypotheſi quod elongatio et contractio amborum elaſtrorum ſit minima, ita vt augmentum vel decrementum vis elaſticae ipſi contractioni ſeu elongationi proportionale cenſeri poſſit. Elapſo ergo tempore t peruenerit corpus A, cuius maſſa littera A exprimatur, in ſitum quem figura refert. Ponatur longitudo elaſtri $AP = a + x$; erit ob x prae a valde paruum, eius vis elaſtica $= \frac{ag}{a+x} = g(1 - \frac{x}{a})$: alterius elaſtri AQ longitudo conſequenter erit $= a - x$, eiusque vis elaſtica $= \frac{ag}{a-x} = g(1 + \frac{x}{a})$: vnde corpus A ſecundum directionem AP vrgebitur vi $= \frac{2gx}{a}$.

§. 5. Ponamus tempuſculo dt corpus progredi per elementum ſpatii $= dx$, erit eius celeritas $= \frac{dx}{dt}$. Tempus autem t ita exprimatur, vt haec fractio $\frac{dx^2}{dt^2}$ exhibeat altitudinem celeritati, quam corpus in A habet debitam. Sumto ergo elemento dt conſtante, erit vis ſollicitans $= \frac{2Addx}{dt^2}$, cui aequalis poni debet vis qua corpus actu vrgetur $\frac{2gx}{a}$ quae cum motui renitatur, habebimus hanc aequationem:

$\frac{2Addx}{dt^2} = -\frac{2gx}{a}$ ſeu $Aaddx + gxdt^2 = 0$.

Multiplicetur haec aequatio per dx, et integretur, erit $Aadx^2 + gxxdt^2 = gbbdt^2$; vnde fit $dt = \frac{dx\sqrt{Aa}}{\sqrt{g(bb-xx)}}$; et $t = \frac{\sqrt{Aa}}{\sqrt{g}} \text{Aſin.} \frac{x}{b} - C$ hincque $x = b \text{ ſin.} (t + C)\sqrt{\frac{g}{Aa}}$.

§. 6. Vocetur breuitatis gratia $V\frac{g}{\Delta a} = n$, et mutatis conſtantibus valor ipſius x ita exprimetur:

$$x = b \text{ ſin. } nt + c \text{ coſ. } nt$$

quae conſtantes ex primo aequilibrii turbati ſtatu definiri debent. Poſito ſcilicet $t = 0$, habebitur $x = c$; Deinde cum corporis celeritas ſit $= \frac{dx}{dt} = nb \text{ coſ. } nt - nc \text{ ſin. } nt$, initio, quo $t = 0$, eius celeritas erat $= nb$. Quod ſi ergo corpus A ipſo initio quieſcens ponatur, atque intervallum AP tum fuerit $= a + \omega$: fiet $b = 0$, et $c = \omega$; vnde quouis tempore t elapſo erit ſitus corporis A

$$PA = a + x = a + \omega \text{ coſ. } nt$$

eiusque celeritas $= -n\omega \text{ ſin } nt$

vbi ſignum $-$ indicat eius motum verſus parietem P fore directum.

§. 7. Corpus ergo A celeritatem habebit maximam, ſi angulus nt fiat rectus, quo caſu fit $PA = a$ ita vt perpetuo in ipſo ſitu aequilibrii celerrime moueatur. Tum vero cum angulus nt ad duos rectos exſurgit, celeritas iterum fit $= 0$, et interuallum $PA = a - \omega$, quod in altera elongatione maxima a puncto medio euenit. Vnde patet corpus alternis motibus circa punctum medium inſtar penduli motum iri; huncque motum perpetuo eſſe duraturum, niſi quatenus a reſiſtentia diminuatur. Pendulum igitur ſimplex aſſignari poterit, cuius motus oſcillatorius conueniat cum iſto corporis A motu reciproco; reperietur autem longitudo huius penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{\Delta a}{2g} = \frac{1}{2nn}$. Quod ſi ergo fiat $nt = 180^\circ$, vt ſit $t = \frac{180^\circ}{n}$; tum tempus t aequabitur tempori vnius oſcillationis

lationis penduli, cuius longitudo $= \frac{1}{2\pi n}$. Hinc generaliter, si angulus 180° exprimatur per π, reperiaturque tempus $t = \pi m$, tum hoc tempus cognoscetur in mensura consueta, quoniam aequabitur durationi vnius oscillationis penduli cuius longitudo est $= \frac{1}{4}mm$: quae mensura in sequentibus adhiberi poterit.

§. 8. Casu hoc primo eoque facillimo expedito contemplemur duo corpuscula A et B, quae cum inter se tum inter parietes immobiles P et Q elastris PA, AB, BQ detineantur. Sint corpora ambo inter se aequalia, et in aequilibrio constituta, quando tria interualla AP, AB, BQ fuerint aequalia. Ponatur hoc casu vniuscuiusque elastri longitudo $= a$ et vis elastica $= g$: itemque vtriusque corporis massa $= A$. Quodsi iam corpus A ex statu aequilibrii deturbatur, dum propius vel ad P vel ad B impellitur, corpus quoque B mox ad motum concitabitur, hocque vicissim in A aget; vnde motus in vtroque orietur, qui a casu praecedente maxime discrepabit, neque amplius motui oscillatorio similis erit, atque ob hoc ipsum multo difficilius definietur. Ad eum autem resoluendum ponamus elapso tempore $= t$, ambo corpora in punctis A et B versari, esseque: Fig. 2.

$$PA = a + x;\ AB = a + y;\ BQ = a + z$$

ita vt sit $x + y + z = 0$.

§. 9. Erit ergo vis elastica elastri $AP = g\left(1 - \frac{x}{a}\right)$ elastri $AB = g\left(1 - \frac{y}{a}\right)$ et elastri $BQ = g\left(1 - \frac{z}{a}\right)$ vnde corpus A versus Q propelletur vi $= \frac{g(y-x)}{a}$, et corpus B vi $= \frac{g(z-y)}{a}$. Cum iam sit $PA = a + x$, erit corporis

A

A celeritas $= \frac{dx}{dt}$, et vis ad eius motum requisita $= \frac{2Addx}{dt^2}$, quae ipsi vi $\frac{g(y-x)}{a}$ aequalis esse debet. Deinde ob $PB = 2a + x + y$, erit corporis B celeritas $= \frac{dx+dy}{dt}$ et vis ad eius motum requisita $= \frac{2A(ddx+ddy)}{dt^2}$ ipsi $\frac{g(z-y)}{a}$ aequanda; vnde consequimur has binas aequationes: $\frac{2Addx}{dt^2} = \frac{g(y-x)}{a}$; $\frac{2A(ddx+ddy)}{dt^2} = \frac{g(z-y)}{a}$ quarum illa ab hac subtracta relinquit: $\frac{2Addy}{dt^2} = \frac{g(z-2y+x)}{a}$ existente $x+y+z=a$.

§. 10. Haec posterior aequatio ob $x+z=-y$ abibit in hanc: $\frac{2Addy}{dt^2} = -\frac{3gy}{a}$, quae per dy multiplicata et integrata dabit $\frac{2Adyy}{dt^2} = C - \frac{3gyy}{a}$; vnde fit $dt = \frac{dy\sqrt{2Aa}}{\sqrt{3g(bb-yy)}}$, sit vt supra $\sqrt{\frac{g}{Aa}} = n$ erit $ndt\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{dy}{\sqrt{(bb-yy)}}$: vnde integrando obtinebitur $y = b \sin. nt\sqrt{\frac{3}{2}} + c \cos. nt\sqrt{\frac{3}{2}}$. Aequatio vero prior hanc induet formam: $\frac{2ddx}{dt^2} = nn(y-x)$, quae transit in $\frac{2ddx}{nndt^2} + x = b \sin. nt\sqrt{\frac{3}{2}} + c \cos. nt\sqrt{\frac{3}{2}}$. Ad quam integrandam ponatur $x = vu$, et aequatio $\frac{2vddu+4dvdu+2uddv}{nndt^2} + vu = b \sin. nt\sqrt{\frac{3}{2}} + c \cos. nt\sqrt{\frac{3}{2}}$ discerpatur in has duas: $\frac{2ddu}{nndt^2} + u = 0$ et $\frac{2uddv+4dudv}{nndt^2} = b \sin. nt\sqrt{\frac{3}{2}} + c \cos. nt\sqrt{\frac{3}{2}}$, quarum prior integrata dabit $u = \alpha \sin. nt\sqrt{\frac{3}{2}} + \mathfrak{C} \cos. nt\sqrt{\frac{3}{2}}$ vnde et valor ipsius v, hincque porro $x = vu$ inveniri poterit.

§. 11. Ponatur breuitatis gratia $b \sin. nt\sqrt{\frac{3}{2}} + c \cos. nt\sqrt{\frac{3}{2}} = T$, erit $2uddv + 4dudv = nnTdt^2$; quae per u multiplicata et integrata dabit $2uudv = nndt\int Tudt$

et

et $v = \frac{1}{2}nn\int\frac{dt}{uu}\int T\,udt$. At valores u et T seu y in sequentes formas transmutari possunt: vt sit

$T = y = b\sin. nt\sqrt{\frac{3}{2}} + c\cos. nt\sqrt{\frac{3}{2}} = E\cos.(nt\sqrt{\frac{3}{2}} + \mu)$

$u = \alpha\sin. nt\sqrt{\frac{1}{2}} + \mathfrak{C}\cos. nt\sqrt{\frac{1}{2}} = F\cos.(nt\sqrt{\frac{1}{2}} + \nu)$

vnde fit $\int\frac{dt}{uu} = \frac{1}{F}\frac{1}{n\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\sin.(nt\sqrt{\frac{1}{2}}+\nu)}{\cos.(nt\sqrt{\frac{1}{2}}+\nu)}$: atque

$Tu = EF\cos.(nt\sqrt{\frac{3}{2}}+\mu)\cos.(nt\sqrt{\frac{1}{2}}+\nu)$. Ponatur $\int Tu\,dt = P\sin.(nt\sqrt{\frac{3}{2}}+\mu)\cos.(nt\sqrt{\frac{1}{2}}+\nu) + Q\cos.(nt\sqrt{\frac{3}{2}}+\mu)\sin.(nt\sqrt{\frac{1}{2}}+\nu)$ fietque differentiando

$Tu = nP\sqrt{\frac{3}{2}}\cos.(nt\sqrt{\frac{3}{2}}+\mu)\cos.(nt\sqrt{\frac{1}{2}}+\nu) - nP\sqrt{\frac{3}{2}}\sin.(nt\sqrt{\frac{3}{2}}+\mu)\sin.(nt\sqrt{\frac{1}{2}}+\nu)$ vnde est $P = -Q\sqrt{3}$;

$+nQ\sqrt{\frac{1}{2}} - nQ\sqrt{\frac{3}{2}}$

et $\frac{nQ-3nQ}{\sqrt{2}} = EF$. ergo $Q = \frac{-EF}{n\sqrt{2}}$; et $P = \frac{EF\sqrt{3}}{n\sqrt{2}}$.

Ex his porro fiet: $v = \frac{En}{2F\sqrt{2}}$

$$\int\frac{dt(\sqrt{3}\sin(nt\sqrt{\frac{3}{2}}+\mu)\cos(nt\sqrt{\frac{1}{2}}+\nu)-\cos(nt\sqrt{\frac{3}{2}}+\mu)\sin(nt\sqrt{\frac{1}{2}}+\nu))}{\cos(nt\sqrt{\frac{1}{2}}+\nu)^2}$$

seu $v = \frac{-E.\cos.(nt\sqrt{\frac{3}{2}}+\mu)}{2F\cos.(nt\sqrt{\frac{1}{2}}+\nu)} + G$ ideoque $x = Gu - \frac{1}{2}y$; Valoribus ergo pro u et y restitutis erit

$x = \alpha\sin. nt\sqrt{\frac{1}{2}} + \mathfrak{C}\cos. nt\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}b\sin. nt\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}c\cos. nt\sqrt{\frac{3}{2}}$

$y = b\sin. nt\sqrt{\frac{3}{2}} + c\cos. nt\sqrt{\frac{3}{2}}$.

§. 12. Elapso ergo tempore t, erit corpus A in A ita vt sit

$PA = a + \alpha\sin. nt\sqrt{\frac{1}{2}} + \mathfrak{C}\cos. nt\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}b\sin. nt\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}c\cos. nt\sqrt{\frac{3}{2}}$ eiusque celeritas, qua a pariete P recedit erit: $= n\alpha\sqrt{\frac{1}{2}}\cos. nt\sqrt{\frac{1}{2}} - n\mathfrak{C}\sqrt{\frac{1}{2}}\sin nt\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}nb\sqrt{\frac{3}{2}}\cos. nt\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}nc\sqrt{\frac{3}{2}}\sin nt\sqrt{\frac{3}{2}}$. Eodemque momento alterum corpus erit in B vt sit

$PB = 2a + \alpha\sin. nt\sqrt{\frac{1}{2}} + \mathfrak{C}\cos. nt\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}b\sin. nt\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}$

c cos. $nt\sqrt{\frac{3}{5}}$ eiusque celeritas qua pariter a pariete P remouetur, erit $= n\alpha\sqrt{\frac{1}{5}}$ cos. $nt\sqrt{\frac{1}{5}} - n\mathfrak{G}\sqrt{\frac{1}{5}}$ sin. $nt\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5}nb\sqrt{\frac{3}{5}}$ cos. $nt\sqrt{\frac{3}{5}} - \frac{1}{5}nc\sqrt{\frac{3}{5}}$ sin. $nt\sqrt{\frac{3}{5}}$. Corporis ergo A celeritas erit maxima iis temporibus quae ex hac aequatione definientur: $0 = -\alpha$ sin. $nt\sqrt{\frac{1}{5}} - \mathfrak{G}$ cos. $nt\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{3}{5}b$ sin. $nt\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{3}{5}c$ cos. $nt\sqrt{\frac{3}{5}}$ Corporis vero B celeritas erit maxima, quando t habuerit valorem ex hac aequatione

$0 = -\alpha$ sin. $nt\sqrt{\frac{1}{5}} - \mathfrak{G}$ cos. $nt\sqrt{\frac{1}{5}} - \frac{3}{5}b$ sin. $nt\sqrt{\frac{3}{5}} - \frac{3}{5}c$ cos. $nt\sqrt{\frac{3}{5}}$.

§. 13. Ponamus ipso initio, quo erat $t = 0$, ambo corpora quieuisse; alterum B quidem in situ suo naturali alterum vero A versus P retractum fuisse e situ suo aequilibrii, ita vt eius distantia AP fuerit $= a - \omega$. Prior conditio praebet hos valores $a = 0$, et $b = 0$; Deinde ob AP $= a - \omega$ fit $\mathfrak{G} - \frac{1}{5}c = -\omega$, et ob BP $= 2a$ erit $\mathfrak{G} + \frac{1}{5}c = 0$: ideoque $\mathfrak{G} = -\frac{1}{5}\omega$, et $c = \omega$. Hoc ergo casu postquam elapsum fuerit tempus t, erit

PA $= a - \frac{1}{5}\omega$ cos. $nt\sqrt{\frac{1}{5}} - \frac{1}{5}\omega$ cos. $nt\sqrt{\frac{3}{5}}$

PB $= 2a - \frac{1}{5}\omega$ cos. $nt\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5}\omega$ cos. $nt\sqrt{\frac{3}{5}}$

Celeritas ipsius A $= \frac{n}{5}\omega\sqrt{\frac{1}{5}}$ sin. $nt\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{n}{5}\omega\sqrt{\frac{3}{5}}$ sin. $nt\sqrt{\frac{3}{5}}$

Celeritas ipsius B $= \frac{n}{5}\omega\sqrt{\frac{1}{5}}$ sin. $nt\sqrt{\frac{1}{5}} - \frac{n}{5}\omega\sqrt{\frac{3}{5}}$ sin. $nt\sqrt{\frac{3}{5}}$

Quare corpus A maximam acquirit celeritatem cum fuerit cos. $nt\sqrt{\frac{1}{5}} + 3$ cos. $nt\sqrt{\frac{3}{5}} = 0$ corporis vero B celeritas erit maxima, quando fiet cos. $nt\sqrt{\frac{1}{5}} = 3$ cos. $nt\sqrt{\frac{3}{5}}$. Corporis vero A celeritas euanescet, quoties fit sin. $nt\sqrt{\frac{1}{5}} + \sqrt{3}$. sin. $nt\sqrt{\frac{3}{5}} = 0$ et corporis B celeritas ad nihilum redigitur, quando est: sin. $nt\sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{3}$. sin. $nt\sqrt{\frac{3}{5}}$.

§. 14. Circa motus ergo initium, quando angulus nt est adhuc valde paruus, celeritas corporis ita se habebit, vt sit

cele-

celeritas corporis A $= nn\omega t - \frac{5}{24} n^4 \omega t^3$ et
celeritas corporis B $= -\frac{1}{2} nn\omega t + \frac{1}{8} n^4 \omega t^3$
Initio ergo corpus A a pariete P recedit, corpus vero B ad eundem accedit, donec ad quietem redigatur; atque interea habuerit neceſſe eſt maximam celeritatem. Poſtquam autem verſus P accedere deſierit, tum demum verſus Q promouebitur, et cum acquiſierit maximum celeritatis gradum, pulſum acceptum maxima vi in parietem Q exerere erit cenſendum. Cum igitur corpus B, poſtquam corpus A iam habuit maximam celeritatem, motu verſus Q directo maximum velocitatis gradum adipiscatur, hinc iam euidens eſt tempore opus eſſe, antequam pulſus ex corpore A in corpus B transferatur; ſiquidem in quauis medii elaſtici particula pulſum tum ineſſe aſſumamus, cum maximo velocitatis gradu verſus parietem Q mouetur. Si enim in Q organum ſenſus concipiatur, id hoc momento maximam patietur impreſſionem.

§. 15. Patet ergo haec duo corpora A et B diverſiſſimos motus recipere poſſe, prout initio tam eorum ſitus quam motus fuerit diuerſimode comparatus. Quo autem in eam agitationem accuratius inquiramus, cuiusmodi in productione ſoni et luminis oriri ſolet, ponamus initio corpus A ex ſitu ſuo quietis per interuallum valde paruum $= \omega$ verſus P diductum, ibique detentum fuiſſe, quoad alterum corpus B cedendo quieuerit, tum vero corpus A ſubito dimitti. Status ergo iſte initialis ita erit comparatus, vt poſito $t = 0$, vtriusque corporis celeritas ſit nulla: vnde fit $\alpha = 0$ et $b = 0$: Deinde quia

corpus B ipſo initio nulla vi afficitur, erit quoque eius acceleratio nulla, hincque differentiale ipſius celeritatis $=0$; ex quo erit $\mathfrak{C}+\frac{3}{8}c=0$. Denique cum iſto motus initio ſit $PA=a-\omega$ erit $\mathfrak{C}-\frac{1}{8}c=-\omega$; ideoque $c=\frac{1}{3}\omega$ et $\mathfrak{C}=-\frac{3}{4}\omega$. Quibus valoribus ſubſtitutis, poſtquam elapſum fuerit tempus t, erit

$PA=a-\frac{3}{4}\omega\,\text{cof.}\,nt\sqrt{\frac{1}{8}}-\frac{1}{4}\omega\,\text{cof.}\,nt\sqrt{\frac{5}{8}}$

$PB=2a-\frac{3}{4}\omega\,\text{cof.}\,nt\sqrt{\frac{1}{8}}+\frac{1}{4}\omega\,\text{cof.}\,nt\sqrt{\frac{5}{8}}$

Celeritas ipſius $A=\frac{3}{4\sqrt{2}}n\omega\,\text{ſin.}\,nt\sqrt{\frac{1}{8}}+\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}n\omega\,\text{ſin.}\,nt\sqrt{\frac{5}{8}}$

Celeritas ipſius $B=\frac{3}{4\sqrt{2}}n\omega\,\text{ſin.}\,nt\sqrt{\frac{1}{8}}-\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}n\omega\,\text{ſin.}\,nt\sqrt{\frac{5}{8}}$.

§. 16. Si tempus elapſum t adhuc fuerit tam parvum vt anguli $nt\sqrt{\frac{1}{8}}$ et $nt\sqrt{\frac{5}{8}}$ ſit minimi; quia tum erit proxima:

$\text{ſin.}\,nt\sqrt{\frac{1}{8}}=nt\sqrt{\frac{1}{8}}-\frac{1}{128}n^3t^3\sqrt{\frac{5}{8}}$

$\text{ſin.}\,nt\sqrt{\frac{5}{8}}=nt\sqrt{\frac{5}{8}}-\frac{5}{128}n^3t^3\sqrt{\frac{5}{8}}$ erit

Celeritas ipſius $A=\frac{3}{4}nnt\omega-\frac{1}{8}n^4t^3\omega$

Celeritas ipſius $B=\frac{1}{128}n^4t^3\omega$

Statim ergo ab initio corpus B tardiſſime moueri incipit cum eius celeritas ſe habeat ad celeritatem corporis A vt $nntt$ ad 12: nt autem ſit fractio minima. Tempore ergo quopiam opus eſt, antequam corpus B ſenſibiliter moueri incipiat. Inueſtigemus ergo momenta, quibus vtrumque corpus maximam celeritatem attingit. Ac primo quidem corpus A celerrime mouebitur, cum fuerit: $\text{cof.}\,nt\sqrt{\frac{1}{8}}=\text{cof.}\,nt\sqrt{\frac{5}{8}}=0$.

Corpus vero B celeritatem habebit maximam, quando fit $\text{cof.}\,nt\sqrt{\frac{1}{8}}=\text{cof.}\,nt\sqrt{\frac{5}{8}}$.

§. 17.

§. 17. Definiamus primum momenta, quibus corpus A maximo celeritatis gradu concitatur, et quia hoc fit, quando ſumma coſinuum angulorum $ntV\frac{1}{3}$ et $ntV\frac{2}{3}$ euaneſcit: primus caſus habebitur, ſi

$$ntV\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3}\pi - s \text{ et } ntV\tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{3}\pi + s$$

vnde fit $\frac{nt(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}} = \pi$ et $nt = \frac{\pi\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$ ſeu $t = \frac{\pi\sqrt{2}}{(1+\sqrt{3})n}$; quod tempus definitur vna oſcillatione pẽduli, cuius longitudo eſt $= \frac{1}{(1+\sqrt{3})^2 nn} = \frac{Aa}{(1+\sqrt{3})^2 g}$. erit autem hoc caſu $s = \frac{1}{3}\pi - \frac{\pi}{1+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)\pi}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{\pi}{(1+\sqrt{3})^2}$: et celeritas ipſius $A = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\, n\omega \text{ cof. } \frac{\pi}{(1+\sqrt{3})^2}$. Dehinc vero iterum maximum celeritatis gradum acquirit, ſi ſit $ntV\frac{1}{3} = \pi + s$ et $ntV\frac{2}{3} = 2\pi - s$ ſeu $ntV\frac{1}{3} = \frac{3\pi}{1+\sqrt{3}}$ et $s = \frac{(2-\sqrt{3})\pi}{1+\sqrt{3}}$. Tertio quoque maxima celeritas dabitur in corpore A cum fuerit: $ntV\frac{1}{3} = \pi + s$ et $ntV\frac{2}{3} = 2\pi + s$

vnde fit $ntV\frac{2}{3} = \frac{\pi}{\sqrt{3}-1}$, et $s = \frac{(2-\sqrt{3})\pi}{\sqrt{3}-1}$. Generaliter vero corpus A toties habebit maximum celeritatis gradum, quoties fuerit $ntV\frac{1}{3} = \frac{(2i+1)\pi}{\sqrt{3}\pm 1}$ denotante i numerum integrum quemcunque.

§. 18. Corpus autem alterum B maximam celeritatem conſequitur, quando fit:

$$\text{cof. } ntV\tfrac{1}{3} = \text{cof. } ntV\tfrac{2}{3}.$$

primum ergo hoc euenit quando $ntV\frac{1}{3} = \pi - s$ et $ntV\frac{2}{3} = \pi + s$, ſeu $ntV\frac{1}{3} = \frac{2\pi}{1+\sqrt{3}}$, ideoque $t = \frac{2\pi\sqrt{2}}{(1+\sqrt{3})n}$. Cum igitur corpus A primum maximae celeritatis gradum nanciſcatur elapſo tempore $t = \frac{\pi\sqrt{2}}{(1+\sqrt{3})n}$, patet tempus quo corpus B maximam celeritatem acquirit duplo maius eſſe tempore, quo corpori A maximus celeritatis gradus primum

mum inducitur. Si ergo pulſus tum effectum exerere cenſeatur, cum quaeque particula citiſſime mouetur, pulſus a particula A in particulam B hoc eſt per interuallum a transfertur tempore $t = \frac{\pi\sqrt{2}}{(1+\sqrt{3})n} = \frac{\pi\sqrt{2}\Lambda a}{(1+\sqrt{3})\sqrt{g}}$.

§. 19. Quodſi ergo ponamus pulſum eadem celeritate per reliquas vltra Q ſequentes medii elaſtici partes propagari, et ſi multitudo particularum aliam formulam ſit ſuppeditatura, hinc tempus, quo pulſus ad quamuis diſtantiam transfertur definiri poterit. Sit enim a diſtantia propoſita; eritque multitudo particularum ſeu maſſa A ipſi longitudini a proportionalis. Atque ſi vis elaſtica medii per pondus columnae eiusdem medii exprimatur, ita vt g ſit longitudo columnae; cuius pondus aequetur vi elaſticae, pro A ipſa longitudo poni poterit, atque ideo pulſus per ſpatium a propagabitur tempore $t = \frac{\pi a\sqrt{2}}{(1+\sqrt{3})\sqrt{g}}$: quae formula ſi diuidatur per 250, et longitudines a et g in particulis milleſimis pedis Rhenani exprimantur, exhibebit tempus in minutis ſecundis.

§. 20. Si in hac hypotheſi pro medio elaſtico, per quod pulſus propagatur, aerem ſubſtituamus, erit eius elaſticitas $g = 27980$ ped. Rhen. Vnde tempus quo pulſus in aere ſeu ſonus per interuallum $= a$ propagatur erit $= \frac{\pi a\sqrt{2}}{250(1+\sqrt{3})\sqrt{27980000}}$ minutorum ſecundorum. Hinc ergo primum patet tempora ſpatiis eſſe proportionalia, pulſusque motu vniformi propagari. Si ergo ponatur $\frac{\pi a\sqrt{2}}{250(1+\sqrt{3})\sqrt{27980000}} = 1$ prodibit ſpatium a per quod ſonus vno minuto ſecundo propagatur, quod erit in partibus milleſimis pedis rhenani: $a = \frac{250(1+\sqrt{3})\sqrt{13990000}}{\pi}$ ideoque in pedi-

pedibus rhenanis $a = \frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{13990000}}{4\pi} = \frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{874375}}{\pi}$ quae formula euoluta dat $a = 813$ ped. Conſtat autem ſonum minuto ſecundo peragrare ſpatium circiter 1000 pedum; quod accrementum a multitudine particularum oritur.

§. 21. Antequam autem plures particulas contemplemur, operae pretium erit annotaſſe ambobus corporibus A et B initio eiusmodi ſitum tribui poſſe, vt motu regulari ad ſimilitudinem penduli oſcillantis moueantur. Hoc autem duplici modo euenire poteſt, ſi quidem vtrumque corpus ab initio quieſcere ponamus, ita vt ſit $\alpha = 0$, et $b = 0$. Primum ſcilicet huiusmodi motus orietur ſi fuerit $c = 0$, et $\mathfrak{C} = -\omega$, quo caſu fit: $PA = a - \omega$ coſ. $nt\sqrt{\frac{1}{2}}$; $PB = 2a - \omega$ coſ. $nt\sqrt{\frac{1}{2}}$; motusque conformis erit motui penduli, cuius longitudo eſt $= \frac{1}{nn} = \frac{Aa}{g}$. Deinde quoque motus oſcillatorius ſimplex orietur ſi ſit $\mathfrak{C} = c$, et $c = 2\omega$, vt ſit: $PA = a - \omega$ coſ. $nt\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $PB = 2a + \omega$ coſ. $nt\sqrt{\frac{3}{2}}$ hocque caſu longitudo penduli ſimplicis iſochroni erit $= \frac{1}{3nn} = \frac{A\gamma}{3g}$. Ad oſcillationes ſcilicet prioris generis producendas, initio ambo corpora per aequalia interualla ex locis ſuis naturalibus in eandem plagam deduci debent; pro poſteriori vero genere in plagas oppoſitas. Poſteriori autem caſu oſcillationes celeriores erunt, quam priori.

§. 22. Sint nunc tria corpuscula A, B, C aequalia filis elaſticis inuicem connexa, quae in aequilibrio verſentur cum aequalibus interuallis tum inter ſe, tum a parietibus P et Q diſtent. Ponatur vt ante vniuscuiusque maſſa $= A$, diſtantia binorum contiguorum naturalis $= a$, fig. 4.

et

et vis elaſtica in hoc ſtatu $=g$. Agitata autem ſint haec corpuscula vtcunque, ac poſt tempus t peruenerint in ſitum figura exhibitum, in quo ſit:

$PA=a+x$; $AB=a+y$; $BC=a+z$; et $CQ=a+v$

erit $x+y+z+v=0$.

Erit ergo vis elaſtica fili $PA=g\left(1-\frac{x}{a}\right)$; fili $AB=g\left(1-\frac{y}{a}\right)$ fili $BC=g\left(1-\frac{z}{a}\right)$ et fili $CQ=g\left(1-\frac{v}{a}\right)$. Vires autem ad ſingulorum corporum motus conſeruandos requiſitae ſunt:

pro corpore A $= \frac{2Addx}{dt^2}$

pro corpore B $= \frac{2A(ddx+ddy)}{dt^2}$

pro corpore C $= \frac{2A(ddx+ddy+ddz)}{dt^2}$.

§. 23. Ob tenſionem vero ſingulorum elaſtrorum corpus A reuera ſecundum directionem PQ vrgetur vi $=\frac{g(y-x)}{a}$; Corpus B vi $=\frac{g(z-y)}{a}$; Corpus C vi $=\frac{g(v-z)}{a}$ Poſito ergo breuitatis gratia $\sqrt{\frac{g}{2Aa}}=n$ ſeu $\frac{g}{2Aa}=nn$, habebuntur ſequentes aequationes:

$\frac{ddx}{dt^2}=nn(y-x)$

$\frac{ddx+ddy}{dt^2}=nn(z-y)$

$\frac{ddx+ddy+ddz}{dt^2}=nn(v-z)$

ex quibus cum hac $x+y+z+v=0$ coniunctis motus ad quoduis tempus determinabitur.

§. 24. Quoniam ex praecedentibus forma valorum x, y, z, et v iam colligi poteſt, ponamus:

$x=\alpha \cos. npt + \mathfrak{A} \sin. npt$

$y=\mathfrak{b} \cos. npt + \mathfrak{B} \sin. npt$

$z=\gamma \cos. npt + \mathfrak{C} \sin. npt$

$v=\delta \cos. npt + \mathfrak{D} \sin. npt$

erit

erit primo: $\alpha+\mathfrak{E}+\gamma+\delta=0$ et $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D}=0$.
Deinde erit posito dt constante:

$$\frac{ddx}{dt^2}=-\alpha nnpp\cos. npt-\mathfrak{A}nnpp\sin. npt$$
$$\frac{ddy}{dt^2}=-\mathfrak{E}nnpp\cos. npt-\mathfrak{B}nnpp\sin. npt$$
$$\frac{ddz}{dt^2}=-\gamma nnpp\cos. npt-\mathfrak{C}nnpp\sin. npt$$

vnde sequentes orientur aequationes:

$-\alpha pp=\mathfrak{E}-\alpha$	$-\mathfrak{A}pp=\mathfrak{B}-\mathfrak{A}$
$-(\alpha+\mathfrak{E})pp=\gamma-\mathfrak{E}$	$-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})pp=\mathfrak{C}-\mathfrak{B}$
$-(\alpha+\mathfrak{E}+\gamma)pp=\delta-\gamma$	$-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})pp=\mathfrak{D}-\mathfrak{C}$

§. 25. Manifestum ergo est ex similitudine harum aequationum coefficientes $\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C},\mathfrak{D}$ simili modo determinari, quo coefficientes $\alpha,\mathfrak{E},\gamma,\delta$. Hos autem investigantes inueniemus:

$$\mathfrak{E}=\alpha-\alpha pp;\qquad \alpha+\mathfrak{E}=2\alpha-\alpha pp$$
$$\gamma=\mathfrak{E}-(\alpha+\mathfrak{E})pp;\quad =\alpha-3\alpha pp+\alpha p^4$$
$$\alpha+\mathfrak{E}+\gamma=3\alpha-4\alpha pp+\alpha p^4$$
$$\delta=\gamma-(\alpha+\mathfrak{E}+\gamma)pp=\alpha-6\alpha pp+5\alpha p^4-\alpha p^6.$$

Quare cum sit $\alpha+\mathfrak{E}+\gamma+\delta=0$ habebitur

$$0=4-10pp+6p^4-p^6$$

cuius aequationis factores sunt:

$$0=(2-pp)(2-4pp+p^4)$$

vnde pro pp sequentes tres valores reperiuntur:

$$pp=2;\quad pp=2+\sqrt{2};\quad pp=2-\sqrt{2}.$$

§. 26. Triplices hi valores pro pp inuenti ſequentes praebebunt coefficientes:

$pp = 2$	$pp = 2 + \sqrt{2}$	$pp = 2 - \sqrt{2}$
$\alpha = \alpha$	$\alpha = +\alpha$	$\alpha = +\alpha$
$\mathfrak{C} = -\alpha$	$\mathfrak{C} = -(1+\sqrt{2})\alpha$	$\mathfrak{C} = -(1-\sqrt{2})\alpha$
$\gamma = -\alpha$	$\gamma = +(1+\sqrt{2})\alpha$	$\gamma = +(1-\sqrt{2})\alpha$
$\delta = +\alpha$	$\delta = -\alpha$	$\delta = -\alpha$
$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$	$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$	$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$
$\mathfrak{B} = -\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B} = -(1+\sqrt{2})\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B} = -(1-\sqrt{2})\mathfrak{A}$
$\mathfrak{C} = -\mathfrak{A}$	$\mathfrak{C} = +(1+\sqrt{2})\mathfrak{A}$	$\mathfrak{C} = +(1-\sqrt{2})\mathfrak{A}$
$\mathfrak{D} = +\mathfrak{A}$	$\mathfrak{D} = -\mathfrak{A}$	$\mathfrak{D} = -\mathfrak{A}$

Cum igitur pro pp triplicem valorem inuenerimus, in expreſſionibus intergralibus aſſumtis termini ſunt triplicandi; eritque:

$$x = \begin{matrix} +\alpha \cos.nt\sqrt{2} + \alpha' \cos.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + \alpha'' \cos.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} \\ +\mathfrak{A} \sin.nt\sqrt{2} + \mathfrak{A}' \sin.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + \mathfrak{A}'' \sin.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} \end{matrix}$$

$$y = \begin{matrix} -\alpha \cos.nt\sqrt{2} - (1+\sqrt{2})\alpha' \cos.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - (1-\sqrt{2})\alpha'' \cos.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} \\ -\mathfrak{A} \sin.nt\sqrt{2} - (1+\sqrt{2})\mathfrak{A}' \sin.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - (1-\sqrt{2})\mathfrak{A}'' \sin.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} \end{matrix}$$

$$z = \begin{matrix} +\alpha \cos.nt\sqrt{2} + (1+\sqrt{2})\alpha' \cos.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + (1-\sqrt{2})\alpha'' \cos.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} \\ -\mathfrak{A} \sin.nt\sqrt{2} + (1+\sqrt{2})\mathfrak{A}' \sin.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + (1-\sqrt{2})\mathfrak{A}'' \sin.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} \end{matrix}$$

$$v = \begin{matrix} +\alpha \cos.nt\sqrt{2} - \alpha' \cos.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - \alpha'' \cos.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} \\ +\mathfrak{A} \sin.nt\sqrt{2} - \mathfrak{A}' \sin.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - \mathfrak{A}'' \cos.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} \end{matrix}$$

§. 27. Si aſſumamus motus initio, quo erat $t = 0$, ſingula corpora quieuiſſe, coefficientes $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ nulli ſunt ſtatuendi, ſicque poſt elapſum tempus t ſitus corporum ſequenti modo determinabitur:

$$PA = a + \alpha \cos nt\sqrt{2} + \alpha' \cos nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + \alpha'' \cos nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$
$$PB = 2a + * - \alpha'\sqrt{2} \cos.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + \alpha''\sqrt{2} \cos nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$
$$PC = 3a - a \cos.nt\sqrt{2} + \alpha' \cos.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + \alpha'' \cos.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}.$$

Hinc

Hinc porro cognoſcentur ſingulorum corporum celeritates, erit enim celeritas ſecundum directionem PQ corporis

$$A = -n\alpha\sqrt{2}.\sin.nt\sqrt{2} - n\alpha'\sqrt{(2+\sqrt{2})}.\sin.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - n\alpha''\sqrt{(2-\sqrt{2})}.\sin.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$
$$B = +n\alpha'\sqrt{(4+2\sqrt{2})}.\sin.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - n\alpha''\sqrt{(4-2\sqrt{2})}.\sin.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$
$$C = +n\alpha\sqrt{2}.\sin.nt\sqrt{2} - n\alpha'\sqrt{(2+\sqrt{2})}.\sin.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - n\alpha''\sqrt{(2-\sqrt{2})}.\sin.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$

Quae expreſſiones ſi denuo differentientur, prodibunt acceleraciones ſingulorum corporum ſecundum plagam PQ.

$$A = -2nn\alpha\cos.nt\sqrt{2} - (2+\sqrt{2})nn\alpha'\cos.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - (2-\sqrt{2})nn\alpha''\cos.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$
$$B = +(2+\sqrt{2})nn\alpha'\sqrt{2}.\cos.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - (2-\sqrt{2})nn\alpha''\sqrt{2}.\cos.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$
$$C = +2nn\alpha\cos.nt\sqrt{2} - (2+\sqrt{2})nn\alpha'\cos.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - nn\alpha''\cos.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$

§. 28. Ponamus nunc corpus A initio de ſitu ſuo quietis deductum fuiſſe per ſpatiolum $= \omega$ verſus P, ibique tamdiu fuiſſe detentum, donec reliqua corpora ſe ad ſtatum aequilibrii compoſuerint; tum vero corpus A ſubito dimitti, ſicque motum paulatim in corpora B et C transferri. Quo igitur formulas inuentas ad hunc caſum accommodemus, primo erit:

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = -\omega$$

Deinde quia reliqua corpora B et C ipſo motus initio nullam acceleracionem patiuntur, erit:

$$(2+\sqrt{2})\alpha'\sqrt{2} = (2-\sqrt{2})\alpha''\sqrt{2}$$

et $2\alpha = (2+\sqrt{2})\alpha' + (2-\sqrt{2})\alpha'' = 2(2-\sqrt{2})\alpha''$

ergo $\alpha'' = \frac{\alpha}{2-\sqrt{2}}$; et $\alpha' = \frac{\alpha}{2+\sqrt{2}}$

ideoque $\alpha' + \alpha'' = 2\alpha$; et $3\alpha = -\omega$. Quamobrem habebimus:

$\alpha = -\frac{1}{3}\omega$; $\alpha' = -\frac{1}{6}\omega(2-\sqrt{2})$; $\alpha'' = -\frac{1}{6}\omega(2+\sqrt{2})$.

§. 29. His igitur valoribus pro α, α', α'' inuentis, momenta aſſignare licet, quibus ſingula corpora maximum celeritatis gradum adipiſcuntur. Ac primo quidem corpus A celerrime mouebitur, ſi fuerit:

$0 = 2\cos. nt\sqrt{2} + \cos. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + \cos. nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$
Corpus vero B maximum celeritatis gradum habebit si sit: $0 = \cos. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - \cos. nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$ At corpus C maximam acquiret celeritatem, quando fit $0 = -2\cos. nt\sqrt{2}\cos. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + \cos. nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$.
Hinc facillime momenta assignantur, quibus corpus B celerrime concitatur: primum scilicet hoc fiet, quando erit

$$nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} = \pi - s \text{ et } nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} = \pi + s$$

vnde fit $nt\sqrt{(4+2\sqrt{2})} = 2\pi$ et $t = \frac{\pi\sqrt{2}}{n\sqrt{(2+\sqrt{2})}} = \frac{\pi\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{n}$; seu $t = \frac{\pi\sqrt{2(2-\sqrt{2})}\,\Delta\,a}{\sqrt{g}}$. Tanto ergo tempore pulsus in secundum corpus B transfertur: neque vero hoc tempus duplo maius est eo, quo corpus A primum celerrime mouetur, neque pari interuallo pulsus in corpus C progreditur. Haec autem experientiae non aduersantur, qua constat pulsus motu aequabili propagari; (numerus enim particularum hic consideratarum nimis est paruus, quam vt inde conclusio ad numerum quasi infinitum inferri queat.

§. 30. Si has formulas attentius consideremus, iam ordinem in angulis, quorum sinus et cosinus hic occurrunt, obseruare licebit. Hoc enim casu, quo tria corpora A, B, C sumus contemplati, anguli $nt\sqrt{2}$, $nt\sqrt{(2+\sqrt{2})}$ et $nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$ ita se habent, vt posito ϱ angulo recto sit:

$$nt\sqrt{2} = 2nt\cos.\tfrac{1}{2}\varrho\,;\quad nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} = 2nt\cos.\tfrac{1}{4}\varrho\,;$$
$$\text{et}\quad nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} = 2nt\cos.\tfrac{3}{4}\varrho.$$

isti ergo anguli ex quadrisectione anguli recti determinantur. Erat vero hic $n = \sqrt{\frac{g}{2\Delta a}}$. Si pro casu quorum

rum corporum posuissemus pariter $n = V\frac{g}{2Aa}$; tum prodiissent hi anguli nt, et $ntV3$; qui ita exhibebuntur per trisectionem anguli recti:

$nt = 2nt$ cos. $\frac{2}{3}\varrho$; $ntV3 = 2nt$ cos. $\frac{1}{3}\varrho$.

simili modo in casu vnici corporis, posito $n = V\frac{g}{2Aa}$ occurrebat angulus $ntV2 = 2nt$ cos. $\frac{1}{2}\varrho$: ideoque ex bisectione anguli recti ϱ definitur. Ex his iam colligere possumus, si numerus corporum sit $= m-1$ fore angulos solutionem ingredientes:

$2nt$ cos. $\frac{1}{m}\varrho$; $2nt$ cos. $\frac{2}{m}\varrho$; $2nt$ cos. $\frac{3}{m}\varrho$ .... $2nt$ cos. $\frac{m-1}{m}\varrho$.

§. 31. Ponamus nunc intra parietes P et Q corpora quotcunque aequalia A, B, C, D, E, etc. in linea recta esse constituta, quae interpositis elastris aequalibus in se inuicem nitantur. Sit massa cuiusque corporis $= A$, longitudo singulorum elastrorum, cum se mutuo in aequilibrio seruant $= a$, et vis elastica eiusque elastri in hoc statu aequilibrii sit $= g$. Postquam autem ab actione quacunque status aequilibrii fuerit perturbatus, elapso tempore t singula corpora eum situm teneant, qui in figura repraesentatur, sitque numerus corporum $= \lambda - 1$ erit elastrorum PA, AB, BC, etc. numerus vnitate maior $= \lambda$. Vocetur nunc: Fig. 5.

$PA = a + x$
$PB = 2a + x^{I}$
$PC = 3a + x^{II}$
$PD = 4a + x^{III}$
$PE = 5a + x^{IV}$
:

$PG = (\lambda-1)a + x^{(\lambda-2)}$
$PQ = \lambda a + x^{(\lambda-2)}$
eritque $x^{(\lambda-1)} = 0$, $x^{(\lambda)} = 0$, $x^{(\lambda+1)} = 0$ etc.

§. 32. Hinc longitudines ſingulorum elaſtrorum cum ſuis viribus elaſticis ita ſe habebunt

Longitudo	vis elaſtica
$PA = a + x$	$g\left(1 - \frac{x}{a}\right)$
$AB = a + x^{I} - x$	$g\left(1 - \frac{x^{I}}{a} + \frac{x}{a}\right)$
$BC = a + x^{II} - x^{I}$	$g\left(1 - \frac{x^{II}}{a} + \frac{x^{I}}{a}\right)$
$CD = a + x^{III} - x^{II}$	$g\left(1 - \frac{x^{III}}{a} + \frac{x^{II}}{a}\right)$

etc.

Vires ergo quibus ſingula copora ſecundum directionem PQ ſollicitantur erunt:

pro corpore	vis ſollicitans
A	$\frac{g}{a}\left(x^{I} - 2x\right)$
B	$\frac{g}{a}\left(x^{II} - 2x^{I} + x\right)$
C	$\frac{g}{a}\left(x^{III} - 2x^{II} + x^{I}\right)$
D	$\frac{g}{a}\left(x^{IV} - 2x^{III} + x^{II}\right)$
	etc.
G	$\frac{g}{a}\left(x^{(\lambda-1)} - 2x^{(\lambda-2)} + x^{(\lambda-3)}\right)$

§. 33. Celeritates porro ſingulorum corporum ſequenti modo exprimentur, ſecundum directionem PQ:
Celeritas corporis $A = \frac{dx}{dt}$.
- - - - - $B = \frac{dx^{I}}{dt}$ Celeri-

Celeritas corporis C $= \frac{dx^{II}}{dt}$

- - - - - - D $= \frac{dx^{III}}{dt}$

$\vdots$

$\vdots$

Celeritas vltimi G $= \frac{dx^{(\lambda-1)}}{dt}$

Atque vires, quae ad accelerationem singulorum secundum eandem directionem PQ requiruntur, erunt

Corpus	sollicitabitur vi
A	$\frac{2Addx}{dt^2} = \frac{f}{a}(x^{I} - 2x)$
B	$\frac{2Addx^{I}}{dt^2} = \frac{f}{a}(x^{II} - 2x^{I} + x)$
C	$\frac{2Addx^{II}}{dt^2} = \frac{f}{a}(x^{III} - 2x^{II} + x^{I})$
D	$\frac{2Addx^{III}}{dt^2} = \frac{f}{a}(x^{IV} - 2x^{III} + x^{II})$
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$
G	$\frac{2Addx^{(\lambda-1)}}{dt^2} = \frac{f}{a}(x^{(\lambda-1)} - 2x^{(\lambda-2)} + x^{(\lambda-3)})$

§. 34. Ponamus vt ante $\frac{f}{2Aa} = nn$, et habebimus has aequationes:

$$\frac{ddx}{2ndt^2} = x^{I} - 2x$$
$$\frac{ddx^{I}}{2ndt^2} = x^{II} - 2x^{I} + x$$
$$\frac{ddx^{II}}{2ndt^2} = x^{III} - 2x^{II} + x^{I}$$
$$\frac{ddx^{III}}{2ndt^2} = x^{IV} - 2x^{III} + x^{II}$$
$\vdots$

$$\frac{ddx^{(\lambda-1)}}{nndt^2} = x^{(\lambda-1)} - 2x^{(\lambda-2)} + x^{(\lambda-3)}$$

Ad quas aequationes resoluendas ponamus:

$$x = \alpha \text{ cos. } ntp$$
$$x^{I} = \alpha^{I} \text{ cos. } 2ntp$$
$$x^{II} = \alpha^{II} \text{ cos. } 2ntp$$
$$x^{III} = \alpha^{III} \text{ cos. } 2ntp$$

$$x^{(\lambda-2)} = \alpha^{(\lambda-2)} \text{ cos. } 2ntp$$

eritque $\alpha^{(\lambda-1)} = 0$, ob $x^{(\lambda-1)} = 0$. Potuissemus hic quoque sinus eiusdem anguli $2ntp$ adiicere, sed cum eorum coefficientes eandem legem teneant, inuentis coefficientibus α, α^{I}, α^{II}, α^{III} etc. cum valoribus constantis quantitatis p, hi termini nullo negotio adiiciuntur.

§. 35. Cum igitur posito dt constante sit:

$$-\frac{ddx}{nndt^2} = 4\alpha pp \text{ cos. } 2ntp$$
$$-\frac{ddx^{I}}{nndt^2} = 4\alpha^{I} pp \text{ cos. } 2ntp$$
$$-\frac{ddx^{II}}{nndt^2} = 4\alpha^{II} pp \text{ cos. } 2ntp$$
$$-\frac{ddx^{III}}{nndt^2} = 4\alpha^{III} pp \text{ cos. } 2ntp$$

$$-\frac{ddx^{(\lambda-2)}}{nndt^2} = 4\alpha^{(\lambda-2)} pp \text{ cos. } 2ntp$$

se-

sequentes adipiscemur aequationes :

$-4\alpha\ pp = \alpha^{I} - 2\alpha$	$x^{I} = 2(1-2pp)\alpha$
$-4\alpha^{I}\ pp = \alpha^{II} - 2\alpha^{I} + \alpha$	$x^{II} = 2(1-2pp)\alpha^{I} - \alpha$
$-4\alpha^{II}\ pp = \alpha^{III} - 2\alpha^{II} + \alpha^{I}$	$x^{III} = 2(1-2pp)\alpha^{II} - \alpha^{I}$
$-4\alpha^{III}\ pp = \alpha^{IV} - 2\alpha^{III} + \alpha^{II}$	$x^{IV} = 2(1-2pp)\alpha^{III} - \alpha^{II}$
⋮	⋮
$-4\alpha^{(\lambda-2)}pp = \alpha^{(\lambda-1)} - 2\alpha^{(\lambda-2)} + \alpha^{(\lambda-3)}$	$x^{(\lambda-1)} = 2(1-2pp)\alpha^{(\lambda-2)} - \alpha^{(\lambda-3)}$

§. 36. Ponamus nunc esse $p = \text{sin. } \Phi$, erit $1-2pp = \text{cos.}2\Phi$, hincque fiet

$\alpha^{I} = 2\alpha\,\text{cos.}2\Phi$

$\alpha^{II} = 4\alpha\,\text{cos.}2\Phi\,\text{cos.}2\Phi - \alpha = \alpha(1+\text{cos.}4\Phi)$

$\alpha^{III} = \alpha(2\text{cos.}2\Phi + 4\text{cos.}2\Phi\text{cos.}4\Phi - 2\text{cos.}2\Phi) = \alpha(2\text{cos.}2\Phi + 2\text{cos.}6\Phi)$

etc.

quo autem lex harum formularum clarius perspiciatur, ponamus $\alpha = \mathfrak{A}\,\text{sin.}\,2\Phi$ eritque

$\alpha = \mathfrak{A}\,\text{sin.}\,2\Phi$

$\alpha^{I} = \mathfrak{A}\,\text{sin.}\,4\Phi$

$\alpha^{II} = \mathfrak{A}\,\text{sin.}\,6\Phi$

$\alpha^{III} = \mathfrak{A}\,\text{sin.}\,8\Phi$

$\alpha^{(\lambda-1)} = \mathfrak{A}\,\text{sin.}\,2\lambda\Phi = 0.$

Quia ergo $\text{sin.}\,2\lambda\Phi = 0$, sumto ϱ pro angulo recto angulum $2\lambda\Phi$ esse oportet aequalem termino cuipiam huius seriei $0, 2\varrho, 4\varrho, 6\varrho, 8\varrho$, etc. Generaliter ergo erit $2\lambda\Phi = 2m\varrho$ denotante m numerum quemcunque integrum; ynde fit $\Phi = \frac{m}{\lambda}\varrho$; et $p = \text{sin.}\frac{m}{\lambda}\varrho$.

§. 37. Pro p igitur tot inuenimus diuersos valores quot vnitates continentur in numero $\lambda - 1$, seu quot fuerint corpora in serie PQ: totidemque terminis constabunt valores x, x^{I}, x^{II}, etc. Sumto ergo pro m numero quocunque minori quam λ, erit

$$p = \sin. \tfrac{m}{\lambda}\varrho$$
$$\alpha = \mathfrak{A} \sin. \tfrac{2m}{\lambda}\varrho$$
$$\alpha^{I} = \mathfrak{A} \sin. \tfrac{4m}{\lambda}\varrho$$
$$\alpha^{II} = \mathfrak{A} \sin. \tfrac{6m}{\lambda}\varrho$$
$$\alpha^{III} = \mathfrak{A} \sin. \tfrac{8m}{\lambda}\varrho$$
$$\vdots$$
$$\alpha^{(\lambda-1)} = \mathfrak{A} \sin. 2m\varrho = 0$$

vnde sequentes obtinebuntur valores:

$$x = \mathfrak{A}\sin.\tfrac{2}{\lambda}\rho.\cos.2nt\sin.\tfrac{\rho}{\lambda} + \mathfrak{B}\sin.\tfrac{4}{\lambda}\varrho.\cos 2nt\sin\tfrac{2\rho}{\lambda} +$$
$$\mathfrak{C}\sin.\tfrac{6}{\lambda}\varrho.\cos.2nt\sin.\tfrac{3\rho}{\lambda}.....+\mathfrak{D}\sin\tfrac{4(\lambda-1)\rho}{\lambda}.\cos 2nt\sin\tfrac{2(\lambda-1)\rho}{\lambda}$$

$$x^{I} = \mathfrak{A}\sin.\tfrac{4}{\lambda}\varrho.\cos.2nt\sin.\tfrac{\rho}{\lambda} + \mathfrak{B}\sin.\tfrac{8}{\lambda}\varrho\cos 2nt\sin\tfrac{2\rho}{\lambda} +$$
$$\mathfrak{C}\sin.\tfrac{12}{\lambda}\rho.\cos.2nt\sin.\tfrac{3\rho}{\lambda}+.....+\mathfrak{D}\sin\tfrac{4(\lambda-1)\rho}{\lambda}.\cos 2nt\sin\tfrac{(\lambda-1)\rho}{\lambda}$$

$$x^{II} = \mathfrak{A}\sin.\tfrac{6}{\lambda}\rho.\cos.2nt\sin.\tfrac{\rho}{\lambda} + \mathfrak{B}\sin.\tfrac{12}{\lambda}\rho.\cos 2nt\sin\tfrac{2\rho}{\lambda} +$$
$$\mathfrak{C}\sin.\tfrac{18}{\lambda}\rho.\cos.2nt\sin.\tfrac{3\rho}{\lambda}+....+\mathfrak{D}\sin\tfrac{6(\lambda-1)}{\lambda}\varrho.\cos 2nt\sin\tfrac{(\lambda-1)\rho}{\lambda}$$

$$x^{(\lambda-2)} = \mathfrak{A}\sin\tfrac{2(\lambda-1)}{\lambda}\rho.\cos 2nt\sin\tfrac{\rho}{\lambda} + \mathfrak{B}\sin\tfrac{4(\lambda-1)}{\lambda}\rho.\cos 2nt\sin\tfrac{2\rho}{\lambda} +$$
$$\mathfrak{C}\sin\tfrac{6(\lambda-1)}{\lambda}\rho.\cos 2nt\sin\tfrac{3\rho}{\lambda}+....+\mathfrak{D}\sin\tfrac{2(\lambda-1)^2}{\lambda}\rho.\cos 2nt\sin\tfrac{(\lambda-1)\rho}{\lambda}.$$

§. 38. Aequationes istae iam ita sunt comparatae, vt ipso motus initio, quo erat $t = 0$, singulorum corporum

porum celeritates euaneſcant; in quem finem ſinus angulorum $2nt$ data opera omiſimus. Pro vario ergo ſitu cuiusque corporis initiali, reſpectu ſitus aequilibrii, vnde valores litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. pendent, innumerabiles diuerſarum agitationum modi reſultant, quos quidem ſi valores litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. fuerint cogniti, facile determinare licet, cum ex aequationibus inuentis ad quoduis temporis momentum ſingulorum corporum tam ſitus quam motus aſſignari queat. Longe autem difficilius eſt pro quouis ſtatu initiali propoſito, idoneos litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. valores inueſtigare, cum tot prodeant aequationes, quot adeſſe ponuntur corpora: vnde ſi horum corporum numerus fuerit indefinitus, via vix patet, quae ad cognitionem iſtorum valorum perducat.

§. 39. Si ponamus initio omnia corpora praeter primum in ſitu ſuo naturali fuiſſe conſtituta, primum autem interuallo $= \omega$ de loco ſuo naturali fuiſſe dimotum, neceſſe eſt vt poſito $t = 0$ fiat $x = +\omega$, et $x^{I} = 0$, $x^{II} = 0$, $x^{III} = 0$, etc. Hinc ergo ſequentes aequationes reſultabunt.

$$\mathfrak{A}\sin.\tfrac{2}{\lambda}\varrho + \mathfrak{B}\sin.\tfrac{4}{\lambda}\varrho + \mathfrak{C}\sin.\tfrac{6}{\lambda}\varrho + \ldots\ldots + \mathfrak{D}\sin.\tfrac{2(\lambda-1)}{\lambda}\rho = \omega$$
$$\mathfrak{A}\sin.\tfrac{4}{\lambda}\varrho + \mathfrak{B}\sin.\tfrac{8}{\lambda}\varrho + \mathfrak{C}\sin.\tfrac{12}{\lambda}\varrho + \ldots\ldots + \mathfrak{D}\sin.\tfrac{4(\lambda-1)}{\lambda}\varrho = 0$$
$$\mathfrak{A}\sin.\tfrac{6}{\lambda}\varrho + \mathfrak{B}\sin.\tfrac{12}{\lambda}\varrho + \mathfrak{C}\sin.\tfrac{18}{\lambda}\varrho + \ldots\ldots + \mathfrak{D}\sin.\tfrac{6(\lambda-1)}{\lambda}\varrho = 0$$
$$\mathfrak{A}\sin.\tfrac{8}{\lambda}\varrho + \mathfrak{B}\sin.\tfrac{16}{\lambda}\varrho + \mathfrak{C}\sin.\tfrac{24}{\lambda}\rho + \ldots\ldots + \mathfrak{D}\sin.\tfrac{8(\lambda-1)}{\lambda}\varrho = 0$$
$$\vdots$$

$\mathfrak{A}\sin.\frac{2(\lambda-1)}{\lambda}\varrho+\mathfrak{B}\sin.\frac{4(\lambda-1)}{\lambda}\varrho+\mathfrak{C}\sin.\frac{6(\lambda-1)}{\lambda}\varrho+\ldots+\mathfrak{O}\sin\frac{2(\lambda-1)^2}{\lambda}\varrho=0$

quarum aequationum numerus est $=\lambda-1$, ideoque corporum A, B, C, etc. numero aequatur, et vnaquaeque aequatio totidem continet terminos.

§. 40. Videamus ergo, an inductio a casibus facilioribus quicquam ad generalem litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. determinationem conferat. Sit igitur primo vnicum corpus A, et habebitur vnica aequatio, ob $\lambda-1=1$.

$\mathfrak{A}=-\omega$.

Sit $\lambda-1=2$ seu $\lambda=3$, habebimus duas aequationes.

I. $\mathfrak{A}\sin.\frac{2}{3}\varrho+\mathfrak{B}\sin.\frac{2}{3}\varrho=-\omega$; $\mathfrak{A}\sin.\frac{2}{3}\varrho=-\frac{1}{2}\omega$

II. $\mathfrak{A}\sin.\frac{2}{3}\varrho-\mathfrak{B}\sin.\frac{2}{3}\varrho=0$; $\mathfrak{B}\sin.\frac{2}{3}\varrho=-\frac{1}{2}\omega$

Hinc $\mathfrak{A}\sin.\frac{2}{3}\varrho=-\frac{1}{2}\omega$; $\mathfrak{B}\sin.\frac{4}{3}\varrho=-\frac{1}{2}\omega$; $\mathfrak{A}\sin.\frac{4}{3}\varrho=-\frac{1}{2}\omega$ et $\mathfrak{B}\sin.\frac{1}{3}\varrho=+\frac{1}{2}\omega$.

Sit $\lambda-1=3$ seu $\lambda=4$, tres habebuntur aequationes.

I. $\mathfrak{A}\sin.\frac{2}{4}\varrho+\mathfrak{B}\sin.\frac{4}{4}\varrho+\mathfrak{C}\sin.\frac{6}{4}\varrho=-\omega$

II. $\mathfrak{A}\sin.\frac{4}{4}\varrho+\mathfrak{B}\sin.\frac{8}{4}\varrho+\mathfrak{C}\sin.\frac{12}{4}\varrho=0$

III. $\mathfrak{A}\sin.\frac{6}{4}\varrho+\mathfrak{B}\sin.\frac{12}{4}\varrho+\mathfrak{C}\sin.\frac{18}{4}\varrho=0$

sive ergo

I. $\mathfrak{A}\sin.\frac{1}{2}\varrho+\mathfrak{B}\sin.\varrho+\mathfrak{C}\sin.\frac{1}{2}\varrho=-\omega$ $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}$

II. $\mathfrak{A}\sin.\varrho+*-\mathfrak{C}\sin.\varrho=0$ $(\mathfrak{A}+\mathfrak{C})\sin.\frac{1}{2}\varrho=-\frac{1}{2}\omega$ $\mathfrak{A}=-\frac{1}{4}\omega:\sin.\frac{1}{2}\varrho$

III. $\mathfrak{A}\sin.\frac{1}{2}\varrho-\mathfrak{B}\sin.\varrho+\mathfrak{C}\sin.\frac{1}{2}\varrho=0$ $\mathfrak{C}=-\frac{1}{4}\omega:\sin.\frac{1}{2}\varrho$ $\mathfrak{B}=-\frac{1}{2}\omega:\sin.\varrho$

Erit ergo

$\mathfrak{A}\sin.\frac{2}{4}\varrho=-\frac{1}{4}\omega$ | $\mathfrak{A}\sin.\frac{4}{4}\varrho=-\frac{1}{2}\omega\cos.\frac{1}{2}\varrho$ | $\mathfrak{A}\sin.\frac{6}{4}\varrho=-\frac{1}{4}\omega$

$\mathfrak{B}\sin.$

$\mathfrak{B}\sin.\frac{4}{4}\varrho = -\frac{1}{2}\omega \mid \mathfrak{B}\sin.\frac{8}{4}\varrho = 0 \mid \mathfrak{B}\sin.\frac{12}{4}\varrho = +\frac{1}{2}\omega$
$\mathfrak{C}\sin.\frac{6}{4}\varrho = -\frac{1}{4}\omega \mid \mathfrak{C}\sin.\frac{12}{4}\varrho = +\frac{1}{2}\omega\text{cof.}\frac{1}{2}\varrho \mid \mathfrak{C}\sin.\frac{18}{4}\varrho = -\frac{1}{4}\omega$

§. 41. Hos valores iam ſupra eruimus; nunc igitur vlterius progrediamur ac ponamus $\lambda - 1 = 4$, ſeu $\lambda = 5$.

$\mathfrak{A}\sin.\frac{2}{5}\varrho + \mathfrak{B}\sin.\frac{4}{5}\varrho + \mathfrak{C}\sin.\frac{6}{5}\varrho + \mathfrak{D}\sin.\frac{8}{5}\varrho = -\omega$
$\mathfrak{A}\sin.\frac{4}{5}\varrho + \mathfrak{B}\sin.\frac{8}{5}\varrho + \mathfrak{C}\sin.\frac{12}{5}\varrho + \mathfrak{D}\sin.\frac{16}{5}\varrho = 0$
$\mathfrak{A}\sin.\frac{6}{5}\varrho + \mathfrak{B}\sin.\frac{12}{5}\varrho + \mathfrak{C}\sin.\frac{18}{5}\varrho + \mathfrak{D}\sin.\frac{24}{5}\varrho = 0$
$\mathfrak{A}\sin.\frac{8}{5}\varrho + \mathfrak{B}\sin.\frac{16}{5}\varrho + \mathfrak{C}\sin.\frac{24}{5}\varrho + \mathfrak{D}\sin.\frac{32}{5}\varrho = 0$

ſit breuitatis gratia:

$\alpha = \sin.\frac{2}{5}\varrho = \sin.\frac{8}{5}\varrho = -\sin.\frac{12}{5}\varrho = -\sin.\frac{18}{5}\varrho = -\sin.\frac{32}{5}\varrho$
$\mathfrak{E} = \sin.\frac{4}{5}\varrho = \sin.\frac{6}{5}\varrho = -\sin.\frac{16}{5}\varrho = \sin.\frac{24}{5}\varrho$ erit

$\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{B}\mathfrak{E} + \mathfrak{C}\mathfrak{E} + \mathfrak{D}\alpha = -\omega \mid \mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{C}\mathfrak{E} = -\frac{1}{2}\omega$
$\mathfrak{A}\mathfrak{E} + \mathfrak{B}\alpha - \mathfrak{C}\alpha - \mathfrak{D}\mathfrak{E} = 0 \mid \mathfrak{B}\mathfrak{E} + \mathfrak{D}\alpha = -\frac{1}{2}\omega$
$\mathfrak{A}\mathfrak{E} - \mathfrak{B}\alpha - \mathfrak{C}\alpha + \mathfrak{D}\mathfrak{E} = 0 \mid \mathfrak{A}\mathfrak{E} - \mathfrak{C}\alpha = 0$
$\mathfrak{A}\alpha - \mathfrak{B}\mathfrak{E} + \mathfrak{C}\mathfrak{E} - \mathfrak{D}\alpha = 0 \mid \mathfrak{B}\alpha - \mathfrak{D}\mathfrak{E} = 0$

vnde fit $\mathfrak{A}(\alpha^2 + \mathfrak{E}^2) = -\frac{1}{2}\alpha\omega$; $\mathfrak{C}(\alpha\alpha + \mathfrak{E}\mathfrak{E}) = -\frac{1}{2}\mathfrak{E}\omega$
$\mathfrak{B}(\alpha\alpha + \mathfrak{E}\mathfrak{E}) = -\frac{1}{2}\mathfrak{E}\omega$; $\mathfrak{D}(\alpha\alpha + \mathfrak{E}\mathfrak{E}) = -\frac{1}{2}\alpha\omega$ ideoque

$\mathfrak{A} = \mathfrak{D} = \frac{-\alpha\omega}{2(\alpha^2 + \mathfrak{E}^2)}$; $\mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \frac{-\mathfrak{E}\omega}{2(\alpha^2 + \mathfrak{E}^2)}$

et $\mathfrak{A} : \mathfrak{B} = \alpha : \mathfrak{E}$.

§. 41. Ponamus iam eſſe $\lambda - 1 = 5$ ſeu $\lambda = 6$; ſitque

$\alpha = \sin.\frac{2}{6}\varrho = \sin.\frac{10}{6}\varrho = \sin.\frac{50}{6}\varrho$
$\mathfrak{E} = \sin.\frac{4}{6}\varrho = \sin.\frac{8}{6}\varrho = -\sin.\frac{16}{6}\varrho = -\sin.\frac{20}{6}\varrho = \sin.\frac{32}{6}\varrho = -\sin.\frac{40}{6}\varrho$
$\nu = \sin.\frac{6}{6}\varrho = -\sin.\frac{18}{6}\varrho = \sin.\frac{30}{6}\varrho$
$o = \sin.\frac{12}{6}\varrho = \sin.\frac{24}{6}\varrho$

atque habebimus has aequationes:

$\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{B}\mathfrak{E} + \mathfrak{C}\gamma + \mathfrak{D}\mathfrak{E} + \mathfrak{E}\alpha = -\omega$

$\mathfrak{A}\mathfrak{e}+\mathfrak{B}\mathfrak{e}+\mathfrak{C}\mathfrak{o}-\mathfrak{D}\mathfrak{e}-\mathfrak{E}\mathfrak{e}=\mathfrak{o}$
$\mathfrak{A}\gamma+\mathfrak{B}\mathfrak{o}-\mathfrak{C}\gamma+\mathfrak{D}\mathfrak{o}+\mathfrak{E}\gamma=\mathfrak{o}$
$\mathfrak{A}\mathfrak{e}-\mathfrak{B}\mathfrak{e}+\mathfrak{C}\mathfrak{o}+\mathfrak{D}\mathfrak{e}-\mathfrak{E}\mathfrak{e}=\mathfrak{o}$.
$\mathfrak{A}\alpha-\mathfrak{B}\mathfrak{e}+\mathfrak{C}\gamma-\mathfrak{D}\mathfrak{e}+\mathfrak{E}\alpha=\mathfrak{o}$

Harum media dat $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}+\mathfrak{E}$, secunda et quarta vero $\mathfrak{A}-\mathfrak{C}=\mathfrak{o}$; et $\mathfrak{B}-\mathfrak{D}=\mathfrak{o}$; ergo erit $\mathfrak{E}=\mathfrak{A}$; $\mathfrak{D}=\mathfrak{B}$; $\mathfrak{C}=2\mathfrak{A}$. Deinde prima et quinta dat: $\mathfrak{A}\alpha+\mathfrak{C}\gamma+\mathfrak{E}\alpha=-\frac{1}{2}\omega$; $\mathfrak{B}\mathfrak{e}+\mathfrak{D}\mathfrak{e}=-\frac{1}{2}\omega$

Ergo $\mathfrak{A}=\mathfrak{E}=\frac{-\omega}{4(\alpha+\gamma)}$; $\mathfrak{B}=\mathfrak{D}=\frac{-\omega}{4\mathfrak{e}}$; $\mathfrak{C}=\frac{-\omega}{2(\alpha+\gamma)}$

Est vero hic $\alpha=\frac{1}{2}$; $\mathfrak{e}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; et $\gamma=1$: vnde erit $\mathfrak{A}:\mathfrak{B}=\mathfrak{e}:\alpha+\gamma=\sqrt{3}:3=\alpha:\mathfrak{e}$ et ob $\gamma=2\alpha$ fiet $\mathfrak{A}:\mathfrak{B}:\mathfrak{C}=\alpha:\mathfrak{e}.\gamma$.

§. 42. Hinc iam satis tuto per inductionem conclusio colligi posset pro generali coefficientium determinatione; sed quo magis confirmemur, ponamus adhuc $\lambda-1=6$ seu $\lambda=7$; sitque

$\alpha=\sin.\frac{2}{7}\varrho=\sin.\frac{12}{7}\varrho=-\sin.\frac{16}{7}\varrho=\sin.\frac{30}{7}\varrho\sin.\frac{40}{7}\varrho=-\sin.\frac{72}{7}\varrho$
$\mathfrak{e}=\sin.\frac{1}{7}\varrho=\sin.\frac{10}{7}\varrho=-\sin.\frac{24}{7}\varrho=-\sin.\frac{18}{7}\varrho=\sin.\frac{32}{7}\varrho=\sin.\frac{60}{7}\varrho$
$\gamma=\sin.\frac{6}{7}\varrho=\sin.\frac{8}{7}\varrho=-\sin.\frac{20}{7}\varrho=\sin.\frac{26}{7}\varrho=-\sin.\frac{48}{7}\varrho=\sin\frac{50}{7}\varrho$,

atque sequentes obtinebuntur aequationes:

$\mathfrak{A}\alpha+\mathfrak{B}\mathfrak{e}+\mathfrak{C}\gamma+\mathfrak{D}\gamma+\mathfrak{E}\mathfrak{e}+\mathfrak{F}\alpha=-\omega$
$\mathfrak{A}\mathfrak{e}+\mathfrak{B}\gamma+\mathfrak{C}\alpha-\mathfrak{D}\alpha-\mathfrak{E}\gamma-\mathfrak{F}\mathfrak{e}=\mathfrak{o}$
$\mathfrak{A}\gamma+\mathfrak{B}\alpha-\mathfrak{C}\mathfrak{e}-\mathfrak{D}\mathfrak{e}+\mathfrak{E}\alpha+\mathfrak{F}\gamma=\mathfrak{o}$
$\mathfrak{A}\gamma-\mathfrak{B}\alpha-\mathfrak{C}\mathfrak{e}+\mathfrak{D}\mathfrak{e}+\mathfrak{E}\alpha-\mathfrak{F}\gamma=\mathfrak{o}$
$\mathfrak{A}\mathfrak{e}-\mathfrak{B}\gamma+\mathfrak{C}\alpha+\mathfrak{D}\alpha-\mathfrak{E}\gamma+\mathfrak{F}\mathfrak{e}=\mathfrak{o}$
$\mathfrak{A}\alpha-\mathfrak{B}\mathfrak{e}+\mathfrak{C}\gamma-\mathfrak{D}\gamma+\mathfrak{E}\mathfrak{e}-\mathfrak{F}\alpha=\mathfrak{o}$

Harum

Harum aequationum ſecundae, quartae, et ſextae ſatis fit ponendo $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}$; $\mathfrak{E} = \mathfrak{B}$ et $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}$; ex quo tres reliquae abeunt in:

$$\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{B}\varepsilon + \mathfrak{C}\gamma = -\tfrac{1}{2}\omega$$
$$\mathfrak{A}\gamma + \mathfrak{B}\alpha - \mathfrak{C}\varepsilon = 0$$
$$\mathfrak{A}\varepsilon - \mathfrak{B}\gamma + \mathfrak{C}\alpha = 0$$

Duabus poſterioribus autem ſatisfit ponendo:

$$\mathfrak{A} = \alpha k;\ \mathfrak{B} = \varepsilon k, \text{ et } \mathfrak{C} = \gamma k$$

eſt enim $\alpha\gamma + \alpha\varepsilon - \varepsilon\gamma = 0$. Namque cum ſit generaliter ſin. p ſin. $q = \frac{1}{2}$ cof. $(p-q) - \frac{1}{2}$ cof. $(p+q)$ erit

$$\alpha\gamma = \tfrac{1}{2}\text{ cof. }\tfrac{4}{7}\varrho - \tfrac{1}{2}\text{ cof. }\tfrac{2}{7}\varrho = \tfrac{1}{2}\text{ ſin. }\tfrac{3}{7}\varrho + \tfrac{1}{2}\text{ ſin. }\tfrac{1}{7}\varrho$$
$$\alpha\varepsilon = \tfrac{1}{2}\text{ cof. }\tfrac{2}{7}\varrho - \tfrac{1}{2}\text{ cof. }\tfrac{6}{7}\varrho = \tfrac{1}{2}\text{ ſin. }\tfrac{5}{7}\varrho - \tfrac{1}{2}\text{ ſin. }\tfrac{1}{7}\varrho$$
$$\varepsilon\gamma = \tfrac{1}{2}\text{ cof. }\tfrac{2}{7}\varrho - \tfrac{1}{2}\text{ cof. }\tfrac{10}{7}\varrho = \tfrac{1}{2}\text{ ſin. }\tfrac{5}{7}\varrho + \tfrac{1}{2}\text{ ſin. }\tfrac{5}{7}\varrho$$

ideoque $\alpha\gamma + \alpha\varepsilon - \varepsilon\gamma = 0$. Tum vero erit $k = \frac{-\omega}{2(\alpha\alpha+\varepsilon\varepsilon+\gamma\gamma)}$.

§. 43. Si igitur in genere pro caſu quocunque corporum initio omnia corpora quieſcant, ac primum quidem A in diſtantia ω a ſitu naturali, reliqua vero cuncta in ipſo ſitu naturali; aequationibus in §. 39. repertis ſatisfiet ponendo; ſi $\lambda - 1$ indicet numerum corporum:

$$\mathfrak{A} = k\text{ ſin. }\tfrac{2}{\lambda}\varrho;\ \mathfrak{B} = k\text{ ſin. }\tfrac{4}{\lambda}\varrho;\ \mathfrak{C} = k\text{ ſin. }\tfrac{6}{\lambda}\varrho;$$
$$\mathfrak{D} = k\text{ ſin. }\tfrac{8}{\lambda}\varrho;\ \ldots\ldots\ldots\ \mathfrak{O} = k\text{ ſin. }\tfrac{2(\lambda-1)\varrho}{\lambda}$$

Sic enim fiet, vti hic inuenimus $\mathfrak{A} = \mathfrak{O}$; $\mathfrak{B} = \mathfrak{N}$; $\mathfrak{C} = \mathfrak{M}$ etc. Tum vero littera k ita definietur vt ſit:

$$k = \frac{-\omega}{2\left(\text{ſin. }\frac{2}{\lambda}\varrho^2 + \text{ſin. }\frac{4}{\lambda}\varrho^2 + \text{ſin. }\frac{6}{\lambda}\varrho^2 + \ldots + \text{ſin. }\frac{2(\lambda-1)}{\lambda}\varrho^2\right)}$$

Cum

Cum autem sit $2 \sin. p^2 = 1 - \cos. 2p$ erit;
$k = -\omega$; $(\lambda - 1 - \cos.\frac{4}{\lambda}\varphi - \cos.\frac{8}{\lambda}\varphi - \cos.\frac{12}{\lambda}\varphi \ldots\ldots - \cos.\frac{4(\lambda-1)}{\lambda}\varphi)$
Ponamus:
$s = 1 + \cos.\frac{4}{\lambda}\varphi + \cos.\frac{8}{\lambda}\varphi + \cos.\frac{12}{\lambda}\varphi + \ldots\ldots + \cos.\frac{4(\lambda-1)}{\lambda}\varphi$
erit ob $\sin. p \cos. q = \frac{1}{2}\sin.(p+q) - \frac{1}{2}\sin.(q-p)$
$s \sin.\frac{2}{\lambda}\varphi = \sin.\frac{2}{\lambda}\varphi + \frac{1}{2}\sin.\frac{6}{\lambda}\varphi \ldots + \frac{1}{2}\sin.\frac{2(2\lambda-3)}{\lambda}\varphi + \frac{1}{2}\sin.\frac{2(2\lambda-1)}{\lambda}\varphi$
$\quad - \frac{1}{2}\sin.\frac{2}{\lambda}\varphi - \frac{1}{2}\sin.\frac{6}{\lambda}\varphi \quad - \frac{1}{2}\sin.\frac{2(2\lambda-3)}{\lambda}\varphi$
ideoque $s \sin.\frac{2}{\lambda}\varphi = \frac{1}{2}\sin.\frac{2}{\lambda}\varphi + \frac{1}{2}\sin.\frac{2(2\lambda-1)}{\lambda}\rho = 0$
quia est $\sin.\frac{2(2\lambda-1)}{\lambda}\varphi = \sin.(4\varphi - \frac{2}{\lambda}\varphi) = -\sin.\frac{2}{\lambda}\rho$
Hancobrem erit $k = \frac{-\omega}{\lambda}$.

§. 44. Quodsi iam hi valores substituantur, habebitur

$\frac{-\lambda x}{\omega} = \sin.\frac{2}{\lambda}\rho \sin.\frac{2}{\lambda}\rho \cos. 2nt \sin.\frac{\rho}{\lambda} + \sin.\frac{4}{\lambda}\rho \sin.\frac{4}{\lambda}\rho \cos. 2nt \sin.\frac{2\rho}{\lambda} + \text{etc.}$
$\frac{-\lambda x'}{\omega} = \sin.\frac{2}{\lambda}\rho \sin.\frac{4}{\lambda}\rho \cos. 2nt \sin.\frac{\rho}{\lambda} + \sin.\frac{4}{\lambda}\rho \sin.\frac{8}{\lambda}\rho . \cos. 2nt \sin.\frac{2\rho}{\lambda} + \text{etc.}$
$\frac{-\lambda x''}{\omega} = \sin.\frac{2}{\lambda}\rho \sin.\frac{6}{\lambda}\rho \cos. 2nt \sin.\frac{\rho}{\lambda} + \sin.\frac{4}{\lambda}\rho \sin.\frac{12}{\lambda}\rho : \cos. 2nt \sin.\frac{2\rho}{\lambda} + \text{etc.}$

$\vdots$

$\frac{-\lambda x^{(\nu)}}{\omega} = \sin.\frac{2}{\lambda}\rho \sin.\frac{2\nu}{\lambda}\rho . \cos. 2nt \sin.\frac{\rho}{\lambda} + \sin.\frac{4}{\lambda}\rho \sin.\frac{4\nu}{\lambda}\rho . \cos. 2nt \sin.\frac{2\rho}{\lambda} + \text{etc.}$

quae series eo vsque continuari debent, quoad numerus terminorum in vnaquaque fiat $= \lambda - 1$. Hinc ergo vniuscuiusque corporis, cuius index a primo computando sit $= \nu$ ad quoduis tempus assignari poterit tam situs, quam celeritas.

§. 45. Casus autem ad propagationem pulsuum magis erit accommodatus, si ponamus initio, quo omnia cor-

corpora erant in quiete, vires acceleratrices singulorum praeter primum fuisse nullas. Vt igitur superiori modo coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. indagemus, ponamus primo esse $\lambda = 2$; et sin. $\frac{1}{2}\rho = \alpha = \text{cos.}\frac{1}{2}\rho$, erit sin. $\rho = 2\alpha\alpha$, fietque ex acceleratione primi et solius corporis: $2\mathfrak{A}\alpha^4 = \omega$. Ponamus nunc $\lambda = 3$; sitque.

sin. $\frac{1}{3}\rho = \text{cos.}\frac{2}{3}\rho = \alpha$
sin. $\frac{2}{3}\rho = \text{cos.}\frac{7}{3}\rho = \mathfrak{C}$;
erit $\mathfrak{A}\alpha^2.\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}^2.\mathfrak{C} = \omega$
et $\mathfrak{A}\alpha^2.\mathfrak{C} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}^2.\mathfrak{C} = 0$

sicque patet easdem aequationes vt supra resultare, dummodo ibi pro $\mathfrak{A}$ ponatur $\mathfrak{A}$ sin. $\frac{\rho^2}{\lambda}$; $\mathfrak{B}$ sin. $\frac{\rho^2}{\lambda}$ pro $\mathfrak{B}$ et ita porro. Sic igitur his constantibus mutatis, erit acceleratio singulorum corporum iisdem expressionibus, quas supra pro x, x', x'', x''' etc. invenimus proportionalis.

§. 46. Hinc ergo pro $\mathfrak{A}$ sin. $\frac{\rho^2}{\lambda}$, $\mathfrak{B}$ sin. $\frac{2\rho}{\lambda}$, etc. iidem prodibunt valores, quos supra pro litteris $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. inuenimus. Quare elapso tempore t erit corporis, cuius index in ordine a primo computato est $= \phi$, vis acceleratrix huic expressioni proportionalis:

$$\text{sin.}\tfrac{2}{\lambda}\rho.\text{sin.}\tfrac{2v}{\lambda}\rho\ \text{cos.}\ 2nt\,\text{sin.}\tfrac{\rho}{\lambda} + \text{sin.}\tfrac{4}{\lambda}\rho.\text{sin.}\tfrac{4v}{\lambda}\rho.\text{cos.}\,2nt\,\text{sin.}\tfrac{2\rho}{\lambda} + \text{etc.}$$

Quodsi ergo acceleratio corporis vltimi quaeratur, faciendum est $v = \lambda - 1$; eritque sin. $\frac{2v}{\lambda}\rho = \text{sin.}\frac{2}{\lambda}\rho$; sin. $\frac{4v}{\lambda}\rho = -\text{sin.}\frac{4}{\lambda}\rho$; sin. $\frac{6v}{\lambda}\rho = \text{sin.}\frac{6}{\lambda}\rho$, etc. Vnde acceleratio vltimi corporis erit isti expressioni proportionalis;

$$\text{sin.}\tfrac{2}{\lambda}\rho^2\,\text{cos.}\,2nt\,\text{sin.}\tfrac{\rho}{\lambda} - \text{sin.}\tfrac{4}{\lambda}\rho^2.\text{cos.}\,2nt\,\text{sin.}\tfrac{2\rho}{\lambda} + \text{sin.}\tfrac{6}{\lambda}\rho^2.\text{cos.}\,2nt\,\text{sin.}\tfrac{3\rho}{\lambda} + \text{etc.}$$

quae expreſſio poſita $= 0$ ea indicabit temporis momenta, quibus vltimi corporis celeritas eſt maxima ſeu quibus pulſus ipſi ineſſe conſendus erit.

§. 47. Si igitur quaeratur, quantum tempus a motus initio ſit elapſurum, antequam pulſus per totum interuallum PQ propagetur, tempus hoc t definiri debebit ex hac aequatione:

$$0 = \sin\tfrac{2}{\lambda}\rho^2.\cos 2nt \sin\tfrac{\rho}{\lambda} - \sin\tfrac{4}{\lambda}\rho^2.\cos 2nt \sin\tfrac{2\rho}{\lambda} + \sin\tfrac{6}{\lambda}\rho^2.\cos 2nt \sin\tfrac{3\rho}{\lambda}$$
$$- \sin\tfrac{8}{\lambda}\rho^2.\cos 2nt \sin\tfrac{4\rho}{\lambda} + \ldots\ldots\ldots \pm \sin\tfrac{2(\lambda-1)}{\lambda}\rho^2.\cos 2nt \sin\tfrac{(\lambda-1)\rho}{\lambda}$$

Sit tota longitudo $PQ = f$; et g longitudo columnae, cuius pondus ipſi vi elaſticae huius fluidi aequetur, erit $f = \lambda a$; $A = a$; ideoque $n = V\frac{g}{2aa} = \frac{1}{a}V\frac{1}{2}g = \frac{\lambda}{f}V\frac{1}{2}g$. Fingatur nunc tempus quaeſitum $t = mf : V\frac{1}{2}g$: ita vt, ſi f et g in particulis milleſimis pedis rhenani exprimantur, futurum ſit tempus $t = \frac{1}{3\sqrt{10}}mf : V\frac{1}{2}g$ minutis ſecundis. Totum ergo negotium redit ad determinationem numeri abſoluti m, quam ex hac aequatione erui oportet:

$$0 = \sin\tfrac{2}{\lambda}\rho^2.\cos 2\lambda m \sin\tfrac{\rho}{\lambda} - \sin\tfrac{4}{\lambda}\rho^2\cos 2\lambda m \sin\tfrac{2\rho}{\lambda} + \sin\tfrac{6}{\lambda}\rho^2.\cos 2\lambda m \sin\tfrac{3\rho}{\lambda}$$
$$- \sin\tfrac{8}{\lambda}\rho^2.\cos 2\lambda m \sin\tfrac{4\rho}{\lambda} + \ldots\ldots \pm \sin\tfrac{2(\lambda-1)}{\lambda}\rho^2.\cos 2\lambda m \sin\tfrac{(\lambda-1)\rho}{\lambda}$$

§. 48. Pendet ergo determinatio numeri m a numero λ ſeu a numero particularum A, B, C, D, etc. quae in interuallo $PQ = f$ continentur; qui numerus cum in fluidis elaſticis, cuiusmodi ſunt aer et aether cenſeri queat infinite magnus, erit $\lambda = \infty$, et valor numeri m ex aequatione infinita definiri debebit. Cum autem arcus, quorum coſinus hic occurrunt, ſint incommenſurabiles inter ſe, patet hanc inueſtigationem numeri

m esse difficillimam, neque sine insigni artificio institui posse.

§. 49. Quoniam in aequatione inuenta terminus vltimum sequens $\sin.\frac{2\lambda}{\lambda}\rho^2.\cos.2\lambda m\sin.\frac{\lambda\rho}{\lambda}$ per se euanescit, eum adhuc in aequatione adiicere poterimus. Quo igitur resolutionem aequationis propositae tentemus, singulos cosinus methodo consueta in series infinitas convertamus, denotetque signum summatorium $\int$ summam huiusmodi seriei ad λ terminos continuatae, ita vt sit $\int\cos.v = \cos.v - \cos.2v + \cos.3v - 4v + \ldots\ldots \pm \cos.\lambda v$ Signum scilicet $\int$ primo termino huismodi seriei praefixum indicet integrum eiusdem seriei valorem. Facta ergo ante memorata cosinuum resolutione fiet $0 = f$ $\sin.\frac{2}{\lambda}\rho^2 - \frac{4\lambda^2m^2}{1\cdot2}\int\sin.\frac{2}{\lambda}\rho^2\sin.\frac{\rho^2}{\lambda} + \frac{16\lambda^4m^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\int\sin.\frac{2}{\lambda}\rho^2\sin.\frac{\rho^4}{\lambda}$ $- \frac{64\lambda^6m^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\int\sin.\frac{2}{\lambda}\rho^2\sin.\frac{\rho^6}{\lambda} + \text{etc.}$

§. 50. Vt autem has summas definire queamus, ponamus esse λ numerum parem, reperieturque $\int\cos.v = \cos.v - \cos.2v + \cos.3v \ldots\ldots - \cos.\lambda v = \frac{\cos.\frac{1}{2}v - \cos.(\lambda+\frac{1}{2})v}{2\cos.\frac{1}{2}v}$ vbi imprimis notari conuenit, esse casus, quibus haec expressio non veram progressionis summam indicet, qui casus eueniunt; quando est $\frac{1}{2}v$, vel ρ, vel 3ρ, vel 5ρ, etc. his enim fractionis tam numerator quam denominator euanescit. His igitur casibus vera seriei summa reperietur $= \frac{\sin.\frac{1}{2}v - (2\lambda+1)\sin.(\lambda+\frac{1}{2})v}{2\sin.\frac{1}{2}v}$ quae ob $\frac{1}{2}v = \rho$ et λ numerum parem, dat $\sin.(\lambda+\frac{1}{2})v = \sin.\frac{1}{2}v = 1$, transit in $-\lambda$, quod idem contingit si fuerit $\frac{1}{2}v = 3\rho$, vel $\frac{1}{2}v = 5\rho$, etc.

§. 51. Ponamus nunc pro v succeſſiue angulos: $\frac{2}{\lambda}\rho$; $\frac{4}{\lambda}\rho$; $\frac{6}{\lambda}\rho$; $\frac{8}{\lambda}\rho$; et generalitrr $\frac{2\mu}{\lambda}\rho$; erit facto $v = \frac{2\mu}{\lambda}\rho$; $\cos.(\lambda+\frac{1}{2})v = \cos.(2\mu\rho+\frac{\mu}{\lambda}\rho) = \pm\cos.\frac{\mu}{\lambda}\rho$, vbi ſignorum ambiguorum ſuperius valet, ſi ſit μ numerus par, inferius vero ſi μ numerus impar: erit ergo $\int\cos.\frac{\mu}{\lambda}\rho = \frac{1\pm1}{2}$, vnde ſequentes orientur ſummationes:

$\int\cos.\frac{0}{\lambda}\rho = \int 1 = 0$

	excipiuntur caſus
$\int\cos.\frac{2}{\lambda}\rho = 1$	
$\int\cos.\frac{4}{\lambda}\rho = 0$	$\int\cos.\frac{2\lambda}{\lambda}\rho = -\lambda$
$\int\cos.\frac{6}{\lambda}\rho = 1$	
$\int\cos.\frac{8}{\lambda}\rho = 0$	$\int\cos.\frac{6\lambda}{\lambda}\rho = -\lambda$
$\int\cos.\frac{10}{\lambda}\rho = 1$	$\int\cos.\frac{10\lambda}{\lambda}\rho = -\lambda$
$\int\cos.\frac{12}{\lambda}\rho = 0$	$\int\cos.\frac{14\lambda}{\lambda}\rho = -\lambda$
etc.	etc.

§. 52. Cum iam ſit $\sin.\frac{2}{\lambda}\rho^2 = \frac{1}{2}(1-\cos.\frac{4}{\lambda}\rho)$ et ſit $\frac{\rho^2}{\lambda} = \frac{1}{2}(1-\cos.\frac{2}{\lambda}\rho)$, ſummae productorum ſuperiorum ſinuum in ſequentes ſummas cosinuum ſimplicium conuertentur:

$\int\sin.\frac{2}{\lambda}\rho^2 = \frac{1}{2}\int(1-\cos.\frac{4}{\lambda}\rho)$

$\int\sin.\frac{2}{\lambda}\rho^2.\sin.\frac{\rho^2}{\lambda} = \frac{1}{8}\int(2-\cos.\frac{2}{\lambda}\rho-2\cos.\frac{4}{\lambda}\rho+\cos.\frac{6}{\lambda}\rho)$

$\int\sin.\frac{2}{\lambda}\rho^2.\sin.\frac{\rho^4}{\lambda} = \frac{1}{32}\int(5-4\cos.\frac{2}{\lambda}\rho-4\cos.\frac{4}{\lambda}\rho+4\cos.\frac{6}{\lambda}\rho-\cos.\frac{8}{\lambda}\rho)$

$\int\sin.\frac{2}{\lambda}\rho^2.\sin.\frac{\rho^6}{\lambda} = \frac{1}{128}\int(14-14\cos.\frac{2}{\lambda}\rho-8\cos.\frac{4}{\lambda}\rho+13\cos.\frac{6}{\lambda}\rho-6\cos.\frac{8}{\lambda}\rho+\cos.\frac{10}{\lambda}\rho)$

$\int\sin.\frac{2}{\lambda}\rho^2.\sin.\frac{\rho^8}{\lambda} = \frac{1}{512}\int(42-48\cos.\frac{2}{\lambda}\rho-15\cos.\frac{4}{\lambda}\rho+40\cos.\frac{6}{\lambda}\rho-26\cos.\frac{8}{\lambda}\rho+8\cos.\frac{10}{\lambda}\rho-\cos.\frac{12}{\lambda}\rho)$

$\int\sin.\frac{2}{\lambda}\rho^2.\sin.\frac{\rho^{10}}{\lambda} = \frac{1}{2048}\int(132-165\cos.\frac{2}{\lambda}\rho-22\cos.\frac{4}{\lambda}\rho+121\cos.\frac{6}{\lambda}\rho-100\cos.\frac{8}{\lambda}\rho+43\cos.\frac{10}{\lambda}\rho-10\cos.\frac{12}{\lambda}\rho+$

etc.

In

In quibus ſeriebus haec lex obſeruatur, vt quiſque coefficiens numericus bis ſumtus demta ſumma coefficientium adiacentium praebeat coefficientem reſpondentem in ſerie ſequente; in quo computo ſigna coefficientium non ſunt negligenda; ac praeterea termini primi duplo maiores ſunt aeſtimandi, ſic eſt $+2.40+26+15=+121$, et $-2.48+15-2.42=-165$.

§. 53. Omnes hae ſummae igitur fierent $=0$, niſi caſus ante excepti occurrant, vnde ex his ſummis ſoli illi termini relinquuntur, in quibus ineſt vel cof. 2ρ vel cof. 6ρ, vel cof. 10ρ vel etc. quorum loco poni debet $-\lambda$. Primum autem huiusmodi terminus occurrit in ſumma $\int \text{ſin.}\frac{z}{\lambda}\rho^{z}.\text{ſin.}\frac{\rho}{\lambda}^{2\lambda-4}$; eritque ergo haec ſumma $=\frac{\pm\lambda}{2^{2\lambda-3}}$; ſequens autem ſumma $\int \text{ſin.}\frac{z}{\lambda}\rho.\text{ſin.}\frac{\rho}{\lambda}^{2\lambda-2}$ erit $=\frac{-(2\lambda-2)\lambda}{2^{2\lambda-1}}$. Hinc aequatio ita incipiet:

$$0=\frac{2^{2\lambda-4}\lambda^{2\lambda-4}m^{2\lambda-4}}{1.2.3.....(2\lambda-4)}\cdot\frac{\lambda}{2^{2\lambda-3}}-\frac{2^{2\lambda-2}\lambda^{2\lambda-2}m^{2\lambda-2}}{1.2.3.....(2\lambda-2)}\cdot\frac{\lambda(2\lambda-2)}{2^{2\lambda-1}}+\text{etc.}$$

ſeu $0=1-\frac{4\lambda^{2}m^{2}}{(2\lambda-3)(2\lambda-2)}\cdot\frac{2\lambda-2}{4}+\text{etc.}$

ſeu $0=1-\frac{\lambda^{2}m^{2}}{2\lambda-3}+\text{etc.}$

Apparet ergo hanc ſeriem, ſi λ ſtatuatur numerus valde magnus, maxime fore diuergentem, ita vt ex ea etiamſi habeatur, vix quicquam concludi queat.

§. 54. Cum igitur hoc modo pro valore numeri m cognoſcendo nihil colligere liceat, videamus cuiusmodi formas aequatio reſoluenda §. 47. induat, ſi loco λ ſucceſſiue ſubſtituantur numeri 2, 3, 4, 5, etc. Ac primo quidem ſi ſit $\lambda=2$ habebitur haec aequatio:

$0 = \text{sin.}\,\rho^2\,\text{cos.}\,4m\,\text{sin.}\,\frac{\rho}{2}$, ergo $\frac{4m}{\sqrt{2}} = \rho$ et $m = \frac{\rho}{2\sqrt{2}}$, existente $\rho = \frac{1}{2}\pi = 1$, 57079632. Atque tempus, quo spatium f a pulsu percurretur erit $= \frac{f}{3\sqrt{10}} \cdot \frac{\rho}{2\sqrt{g}}$. Sit porro $\lambda = 3$ et orietur haec aequatio:

$0 = \text{sin.}\,\frac{3}{2}\rho^2\,\text{cos.}\,6m\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\rho - \text{sin.}\,\frac{3}{2}\rho^2\,\text{cos.}\,6m\,\text{sin.}\,\frac{3}{2}\rho$

seu $\text{cos.}\,3m = \text{cos.}\,3m\sqrt{3}$. Sit ergo $3m = 2\rho - s$ et $3m\sqrt{3} = 2\rho + s$ erit $3m(1+\sqrt{3}) = 4\rho$ et $m = \frac{4\rho}{3(1+\sqrt{3})}$

Ponatur $\lambda = 4$ et prodibit:

$0 = \text{sin.}\,\frac{1}{2}\rho^2\,\text{cos.}\,8m\,\text{sin.}\,\frac{1}{4}\rho - \text{sin.}\,\rho^2\,\text{cos.}\,8m\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\rho + \text{sin.}\,\frac{1}{2}\rho^2\,\text{cos.}\,8m\,\text{sin.}\,\frac{3}{4}\rho$

quae ob $\text{sin.}\,\rho = 1$; $\text{sin.}\,\frac{1}{2}\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\text{sin.}\,\frac{1}{4}\rho = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})}$ et $\text{sin.}\,\frac{3}{4}\rho = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})}$, transibit in hunc:

$0 = \text{cos.}\,4m\sqrt{(2-\sqrt{2})} - 2\,\text{cos.}\,4m\sqrt{2} + \text{cos.}\,4m\sqrt{(2+\sqrt{2})}$.

§. 55. Ascendamus hinc secundum rationem duplam, sitque $\lambda = 8$, erit:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \text{sin.}\,\tfrac{1}{4}\rho^2.\,\text{cos.}\,16m\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{8}\rho - \text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\rho^2\,\text{cos.}\,16m\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{4}\rho \\ & + \text{sin.}\,\tfrac{3}{4}\rho^2.\,\text{cos.}\,16m\,\text{sin.}\,\tfrac{3}{8}\rho - \text{sin.}\,\rho^2.\,\text{cos.}\,16m\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\rho \\ & + \text{sin.}\,\tfrac{5}{4}\rho^2.\,\text{cos.}\,16m\,\text{sin.}\,\tfrac{5}{8}\rho - \text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\rho^2.\,\text{cos.}\,16m\,\text{sin.}\,\tfrac{4}{3}\rho \\ & + \text{sin.}\,\tfrac{7}{4}\rho^2.\,\text{cos.}\,16m\,\text{sin.}\,\tfrac{7}{8}\rho. \end{aligned}$$

quae reducitur ad hanc formam magis ordinatam

$$0 = \begin{array}{l} +\text{sin.}\,\frac{1}{4}\rho^2.\text{cos.}\,16m\text{sin.}\,\frac{1}{8}\rho - \text{sin.}\,\frac{1}{2}\rho^2.\text{cos.}\,16m\text{sin.}\,\frac{1}{4}\rho + \text{sin.}\,\frac{3}{4}\rho^2.\text{cos.}\,16m\text{sin.}\,\frac{3}{8}\rho \\ +\text{sin.}\,\frac{1}{4}\rho^2.\text{cos.}\,16m\text{cos.}\,\frac{1}{8}\rho - \text{sin.}\,\frac{1}{2}\rho^2.\text{cos.}\,16m\text{cos.}\,\frac{1}{4}\rho + \text{sin.}\,\frac{3}{4}\rho^2.\text{cos.}\,16m\text{cos.}\,\frac{3}{8}\rho \end{array} - \text{sin.}\,\rho^2.\text{cos.}\,16m\text{sin.}\,\tfrac{1}{8}\rho$$

Simili modo si ponamus $\lambda = 16$, aequatio resultabit, quae sequentem formam induet.

$$\begin{array}{l} \text{sin.}\,\frac{1}{8}\rho^2.\,\text{cos.}\,32m\,\text{sin.}\,\frac{1}{16}\rho - \text{sin.}\,\frac{1}{4}\rho^2.\,\text{cos.}\,32m\,\text{sin.}\,\frac{1}{8}\rho + \text{sin.}\,\frac{3}{8}\rho^2.\,\text{cos.}\,32m\text{sin.}\,\frac{3}{16}\rho \\ \text{sin.}\,\frac{1}{8}\rho^2.\,\text{cos.}\,32m\,\text{cos.}\,\frac{1}{16}\rho - \text{sin.}\,\frac{1}{4}\rho^2.\,\text{cos.}\,32m\text{cos.}\,\frac{1}{8}\rho + \text{sin.}\,\frac{3}{8}\rho^2.\,\text{cos.}\,32m\text{cos.}\,\frac{3}{16}\rho \end{array}$$

$$-\text{fin.}\tfrac{1}{3}\rho^2.\text{cof.}\,32m\,\text{fin.}\tfrac{1}{4}\rho+\text{fin.}\tfrac{3}{8}\rho^2.\text{cof.}\,32m\,\text{fin.}\tfrac{5}{16}\rho-\text{fin.}\tfrac{3}{11}\rho^2.\text{cof.}\,32m\,\text{fin.}\tfrac{3}{8}\rho$$
$$-\text{fin.}\tfrac{1}{2}\rho^2.\text{cof.}\,32m\,\text{cof.}\tfrac{1}{4}\rho+\text{fin.}\tfrac{5}{8}\rho^2.\text{cof.}\,32m\,\text{cof.}\tfrac{5}{16}\rho-\text{fin.}\tfrac{3}{4}\rho^2.\text{cof.}\,32m\,\text{cof.}\tfrac{3}{8}\rho$$

$$+\text{fin.}\tfrac{7}{8}\rho^2.\text{cof.}\,32m\,\text{fin.}\tfrac{7}{16}\rho$$
$$+\text{fin.}\tfrac{7}{8}\rho^2.\text{cof.}\,32m\,\text{cof.}\tfrac{7}{16}\rho-\text{fin.}\,\rho^2\,\text{cof.}\,32m\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}\rho=0$$

§. 56. Huiusmodi ergo aequatio formari debebit in qua sit λ numerus infinitus seu $\lambda=2^{\infty}$, ab eiusque resolutione pendebit valor numeri m. Inuentio igitur numeri m accurata, quo celeritas propagationis pulsuum per quoduis medium elasticum definitur, maxime est ardua, neque sine insigni amplificatione doctrinae serierum expectari potest. Interim tamen methodus, qua Celeb. Newtonus ad propagationem pulsuum inuestigandam vsus est, non parum est elegans, et pro idonea approximatione haberi potest, quamuis a rigore geometrico valde abhorreat. Per experientiam autem verus valor ipsius m satis prope cognosci poterit. Cum enim in aere sit $g=27980{,}000$ ped. Rhen. sonusque vno minuto secundo per interuallum 1100 ped. propagetur, hinc proxime reperietur $m=\frac{5\sqrt{14}}{22}=0,8504$, neque multum differt a sinu anguli 60°. Ad hunc autem valorem satis celeriter conuergere videntur valores ipsius m pro casibus $\lambda=2$ et $\lambda=3$ inuenti, ex quorum priori prodit $m=0,554$, ex posteriori vero $m=0,766$, vnde iam tuto colligere licet esse $m>0,766$ id quod per experientiam mirifice comprobatur.

§. 57. Quanquam autem hinc verum valorem litterae m elicere non valemus, tamen modum, quo pulsus per medium elasticum propagantur, satis clare perspicimus

mus. Primum enim, cum tempus, quo pulſus per interuallum $=f$ propagatur, inuentum ſit $= \frac{mf}{250\sqrt{\frac{1}{2}g}}$ videmus in eodem medio tempus ipſi ſpatio eſſe proportionale, ſicque pulſus motu vniformi propagari vti experientia teſtatur. Deinde celeritas iſtius motus, quo pulſus progrediuntur, erit vt $\frac{f}{t}$ hoc eſt vt $\sqrt{g}$. Eſt vero g longitudo columnae eiusdem fluidi, cuius pondus ipſius vi elaſticae aequatur. Vnde ſi vis elaſtica deſignetur per E et denſitas per D, erit pondus columnae g vt Dg, et cum ſit E vt Dg, erit g vt $\frac{E}{D}$. Quare in diuerſis fluidis elaſticis erunt celeritates, quibus pulſus per ea propagantur in ratione ſubduplicata compoſita ex directa elaſticitatum et inuerſa denſitatum, ſeu vt $\sqrt{\frac{E}{D}}$.

§. 58. Haec autem aliunde iam ſatis conſtant, atque a Newtono firmiter ſunt demonſtrata: quoniam ad hoc non eſt opus, vt ipſa ſingularum particularum fluidi elaſtici agitatio ſit perſpecta. Ex hactenus allatis autem ſimul modum, quo ſingulae fluidi elaſtici particulae, dum ipſi in vno loco impulſus infligitur, ſingulis momentis agitantur. Vidimus ſcilicet, ſi vnica particula intra parietes P et Q conſtituatur, eius motum ab impulſu acceptum ſimilem fore motui oſcillatorio penduli, atque ideo perinde vibrationes peragere, ac cordam impulſam. Cum autem duo pluraue corpuſcula intra parietes P et Q collocata concipiuntur, quorum vnum duntaxat impellatur, tum nullum corpuſculum ad ſimilitudinem penduli amplius agitatur, ſed ſingulorum motus ab

hac

hac lege eo magis recedent, quo maior fuerit eorum numerus. Ex quo intelligimus ſonum neutiquam eo modo, quo nonnulli eximii Viri volunt, per aerem propagari, qui ſtatuunt, cum corda vel aliud inſtrumentum ſonorum impellitur, dari in aere eiusmodi particulas, quae ſimilem motum oſcillatorium recipiant, eoque organum auditus excitent. Quae ſententia, cum pluribus aliis incommodis laboret, vti in tractatu meo de lumine et coloribus oſtendi, nunc etiam nequidem cum vera theoria pulſuum per medium elaſticum propagatorum conſiſtere poteſt: atque hinc eo magis corroboratur ea propagationis pulſuum ratio, quam in eodem ſcripto fuſius expoſui.

EXAMEN ARTIFICII NAVIS A PRINCIPIO MOTVS INTERNO PROPELLENDI QVOD QVONDAM AB ACVTISSIMO VIRO IACOBO BERNOVLLI EST PROPOSITVM

AVCTORE
L. EVLERO.

§. 1.

In operibus *Iacobi Bernoullii*, quae praeterito Anno Geneuae ſunt edita, pag. 1109 reperitur inſertum ſchediaſma, cui hic titulus eſt praefixus: *Artificium impellendi nauem a principio motus intra ipſam nauem concluſo*; in quo Vir Celeberrimus oſtendere conatur, etiamſi vulgo naues non niſi a viribus extrinſecus petitis propelli poſſe putentur, tamen fieri poſſe, vt nauis a ſola vi interna ad motum incitetur. Quod artificium vt maxime paradoxon videtur, ita ſi quidem optatum effectum praeſtaret, pleriſque aliis modis, quibus naues promoueri ſolent, merito longe eſſet praeferendum. Cum igitur non conſtet, vtrum periculum vnquam ſit factum atque experimentum ex voto ſucceſſerit, operae pretium fore videtur, hunc mechaniſmum diligentius expendere atque ad leges motus examinare.

§. 2. Cum nauta ſtans in littore firmo nauem poſſit conto propellere, in ipſa autem naui conſtitutus idem praeſtare nequeat, propterea quod quantum nauem prorſum impellat, tantumdem eam pedibus carinae innixus retrorſum vrgeat; recte quidem concludi videtur, naui non

non poſſe motum induci a vi, quae tota intra nauem exiſtat. Quantumuis ſcilicet homines aliaeue machinae in naui conſtitutae eandem propellere annituntur, tamen quia reactio actioni perpetuo eſt aequalis, et vtraque a naui aeque ſuſtinetur, nullum inde motum adipiſcitur. Hinc omnes eorum, qui in naui verſantur, conatus ad nauem promouendam ſunt irriti, niſi ſeſe littori aliiue corpori extra nauem ſito applicare queant.

§. 3. Hanc veritatem Bernoullius minime ignoravit, eam vero non ad omnis generis vires patere exiſtimauit, ſed putauit eam ad illas tantum vires, quae vulgo mortuae vocari ſolent, reſtringi oportere, quae ſolis preſſionibus contineantur; alterum autem virium genus quae viuae appellentur atque a percuſſone oriantur, ab hac lege eſſe excipiendum. Hinc non dubitat, quin in naui eiusmodi ictus et percuſſiones effici queant, a quarum impetu naui motus inducatur. Quae opinio, ſi ad mentem plerorumque recentiorum philoſophorum, qui inter vires viuas et mortuas ſummum diſcrimen ſtatuunt, explicetur, firmiſſimo fundamento inniti videatur; cum autem oſtendiſſem hoc diſcrimen omni fundamento carere, nihilque per vires viuas effici poſſe, quod non idem viribus mortuis praeſtari queat, maxime erit verendum, ne omnis motus, quem Bernoullius ope percuſſionum nauibus imprimere conatur, euaneſcat.

§. 4. Machina autem, quam Iac. Bernoulli in hunc finem propoſuit, ita ſe habet: in naui DEFG conſtitui iubet tabulatum firmum AF in ſitu ad horizontem perpendiculari, quod ſit perfecte elaſticum puta chalybeum aut reticulatum, eo ſaltem in loco C vbi ictus recipit. Tab IV. fig. 1.

recipit. Huic tabulato in A appenſum ſit pendulum AB cum annexo pondere B itidem perfecte elaſtico, quod, dum per quadrantem BC deſcendit impellet tabulatum, et ſimul totum nauigium proram G verſus promouebit. Poſt ictum autem ob elaſticitatem reſiliet, iterumque deſcendendo ſimiles ictus continuo repetet; ſicque naui motum perennem inducet. Ne autem iſte penduli motus ob reſiſtentiam aeris ſenſim langueſcat, ſed pendulum conſtanter ad quadrantis initium B aſcendendo pertingat, hoc ope automati, quemadmodum in horologiis pendulis fieri ſolet, obtineri poſſe indicat.

§. 5. Si ad hos ictus ſucceſſiuos, quibus tabulatum A F continuo percutitur, ſolum reſpiciamus, dubium prorſus eſt nullum, quin iis nauis ad motum incitetur, moleſque penduli facile eousque augeri poſſet, vt nauis ſuperata aquae reſiſtentia, quantumuis magnam conſequatur celeritatem. Verum hic quoque animaduertendum eſt pendulum, dum alternatim aſcendit et deſcendit vim contrariam in nauem exerere, qua ea puppim D verſus ſollicitetur. Quoniam enim pendulum in quouis ſitu AM tam a pondere, quam a vi centrifuga tenditur, hanc vim punctum ſuſpenſionis A ſuſtinet, ab eaque ſecundum directionem AM trahitur, quae vis cum perpetuo retrorſum dirigatur, nauis ab ea retrorſum impelletur. Hinc impulſio nauis proram G verſus efficietur tantum exceſſu, quo vires percuſſionis ſuperant has continuas ſollicitationes retro directas, ſiquidem huiusmodi exceſſus detur.

§. 6.

§. 6. Hic quidem maxima philoſophorum pars, qui Leinbizii ideas de viribus fortaſſe male expoſitas ſequuntur, vireſque viuas mortuis quaſi infinities maiores putant, aſſeuerare non dubitabunt, quin nauis hoc modo notabilem motum ſit impetratura, neque admodum neceſſarium putabunt, vt virium illarum nauem retro pellentium ratio habeatur, cum vis percuſſionis nauem propellens ipſis incomparabiliter maior videatur. Interim tamen Vir ſagaciſſimus Iacobus Bernoullius longe aliter exiſtimauit; atque effectum ab iſtis viribus mortuis oriundum ſtudioſe inueſtigauit, eumque ab effectu, quem quilibet ictus producit, ſubduxit, vt veram nauis propulſionem adipiſceretur. Inuenit autem calculo ſubducto, vires percuſſionum aliquantum praeualere viribus pendulum continuo tendentibus, hincque demum concluſit, nauem ope huiusmodi penduli propelli debere.

§. 7. Quamquam autem vim, qua nauis a penduli percuſſionibus propellitur, non multo maiorem deprehendit altera vi a tenſionibus orta, tamen naui ab ea non mediocrem motum imprimi exiſtimat, vt etiam aquae reſiſtentiae ratione habita, nauis non contemnendam celeritatem acquirere poſſet. Euoluto enim caſu, quo penduli pondus centeſimae totius nauis parti aequale aſſumitur, collegit nauem ſingulis minutis primis per ſpatium 82 $\frac{1}{2}$ pedum propelli debere, vbi quidem diminutionis reſiſtentiae ab idonea prorae figura oriundae nullam habuit rationem. Accommodato autem hoc caſu ad nauem roſtratam, cuius reſiſtentiam decuplo minorem aſſumit, celeritatem ipſi impreſſam vltra 260 pe-

des ſingulis minutis primis, 15649 pedes vna hora confecturam eſſe contendit, quae celeritas certe tanta eſt, vt conſueta remigatione vix maior obtineri poſſit.

§. 8. Quod ſi ergo iſte naues propellendi modus tantum valeret, dubium certe eſſet nullum, quin is non ſolum remigationi longe eſſet anteferendus, ſed etiam ſaepe maximo cum fructu loco venti adhiberi poſſet. Cum enim pro ratione molis nauis ſatis magna vis ad remos vibrandos requiratur, ita in praeſente mechaniſmo nulla fere vi eſt opus. Poſtquam enim pendulum ſemel ad ſitum ſummum eſt eleuatum, poſt primum ictum ſponte ad eandem fere altitudinem aſcendit, ob maximam cum ipſius corporis tum tabulati elaſticitatem; et, quantum aſcenſus in quaque vibratione tam a reſiſtentia aeris, quam a defectu perfectae elaſticitatis imminuitur, id ab exigua vi facile reparatur, ita vt continuus penduli motus vel a puero conſeruari poſſet. Quin etiam loco vnius penduli, ne nimia eius maſſa impedimento eſſet, plura minora adhiberi poſſent, quae parem vel maiorem effectum praeſtarent; neque difficile foret modum excogitare, quo huiusmodi mechaniſmus ſine vllo nauigationis incommodo ad vſum accommodaretur.

§. 9. Verum haec vtilitas in re nautica nimis eſt magna, quam ut eam tamdiu latere potuiſſe veriſimile ſit, praeſertim cum non admodum abſcondito mechanismo contineatur, atque adeo ob ipſam commodorum magnitudinem merito in ſuſpicionem incurrit. Neque etiam mediocriter haec ſuſpicio augetur, quod deſcriptio huius artificii tantum in opuſculis poſthumis Iacobi Bernoulli repe-

reperiatur, eoque viuente nunquam ſit diuulgata. Minime autem probabile videtur, Virum beate defunctum tantum inuentum quod certe omnibus reliquis ipſius inventis, etiamſi ſint maxima, palmam longe praeriperet, celaturum fuiſſe, niſi de felici ſucceſſu ipſe dubitauiſſet. Quamobrem ſi demonſtrauero huiusmodi penduli ictibus naui nullum prorſus motum imprimi, nihil quicquam de laude ac meritis ſummi huius Viri detrahetur, cum ipſe quoad vixerit, probe cauerit, ne meditatio nondum ſatis polita in publicum protruderetur.

§. 10. Si igitur effectum huiusmodi penduli ictuum inueſtigare velimus, primum dum pendulum per quadrantem BMC deſcendit, quantum nauis ab eo retro vrgeatur, definire debebimus, deinde ipſe ictus erit conſiderandus, quo nauis propellitur motumque qui naui proram verſus inde imprimitur exacte determinari oportebit. Denique cum hic motus a ſequente poſt reflexionem ascenſu iterum retardetur, videndum erit, vtrum nauis, poſtquam pendulum ad B vsque eſt reuerſum motum habeat reliquum antrorſum directum, nec ne, et quantus is ſit futurus. Quodſi enim nauis, cum initio deſcenſus quieuiſſet, poſt finitum ascenſum iterum in ſtatum quietis redigatur, ſicque initio ſecundi deſcenſus denuo in quiete verſetur, dubium erit nullum, quin nauis perpetuo in eodem fere loco ſit permanſura, ita vt totus penduli effectus in alternis progreſſionibus et regreſſionibus, quae ſe mutuo exacte deſtruant, conſumatur. Determinatio autem huius motus reciproci, ſi reſiſtentiae aquae rationem habere voluerimus, maxime fieret difficilis, neque ſine calculo moleſtiſſimo expediri poſſet.

§. 11.

§. 11. Hancobrem aliam viam faciliorem inire ſtudebo qua effectus a ſucceſſiuis huius modi penduli percuſſionibus oriundus non minus diſtincte cognoſci et diiudicari queat. Nauim ſcilicet in loco ſuo penitus fixam contemplabor, atque ſollicitationum momentanearum, quibus nauis durante quouis penduli deſcenſu et aſcenſu retro pellitur, ſummam inueſtigabo, deinde ſimili ratione vim ictus, qua nauis propelleretur, ſeorſim exprimam, vt hoc modo tam tota vis, qua nauis a qualibet penduli actione retro impellitur, quam vis propellens innoteſcat. Abſoluitur autem quaelibet penduli actio primum deſcenſu, ſecundo ictu, ac tertio aſcenſu. Quodſi ergo ſumma virium pellentium ex deſcenſu et ſubſequenti aſcenſu natarum aequalis fuerit vi ictus ad nauem propellendam directae, tuto concludere poterimus, naui, etiamſi eſſet libera, nullum motum progreſſiuum induci, ſin autem vel vis percuſſionis vel ſumma virium retrahentium praeualeat, naui liberae quoque vel motus antrorſum vel retrorſum imprimetur.

§. 12. Cum igitur nauis quouis deſcenſus penduli momento puppim verſus ſollicitetur, quaeratur huius vis magnitudo pro quouis penduli ſitu AM, eaque per elementum temporis multiplicetur. Haec expreſſio differentialis deinceps integretur, quae ad totum deſcenſum adaptata praebebit ſummam omnium virium retrahentium, ſimilique modo haec virium ſumma pro aſcenſu colligatur. Conſtat autem ſi nauis actioni harum virium libere obſequi poſſet, tum ab iis ipſi motum inductum iri, cuius quantitas, ſeu productum ex maſſa in celeritatem geni-

genitam illi ipſi integrali exacte futurum ſit aequale. Deinde quaeratur quantitas motus quae naui, ſi libera eſſet, ab ictu penduli imprimeretur, haecque cum illa comparetur, vt pateat vtrum altera ſit maior, an vtraque aequalis. Hocque modo tutiſſime concludere poterimus, vtrum nauis ab his viribus vllum conſecutura ſit motum, nec ne?

§. 13. Cum igitur in hac inueſtigatione multum interſit, vtrum pendulum ſit ſimplex an compoſitum, ponamus primo pendulum eſſe ſimplex, ita vt tota eius maſſa in ipſius centro grauitatis M collecta concipi queat. Deſcribat itaque hoc pendulum in quolibet aſcenſu et deſcenſu integrum quadrantem BMC. Sit longitudo penduli $AM=AC=a$, eius pondus $=M$: atque deſcendendo ex B elapſo tempore t iam peruenerit in ſitum AM, in quo a recta verticali AC etiamnum diſtet angulo $CAM=\Phi$: erit celeritas eius in M debita altitudini $LM=a\cos.\Phi$: hincque ipſa celeritas $=\sqrt{a}\cos.\Phi$, qua cum tempusculo dt abſoluat arculum $=-ad\Phi$ erit $dt=-\frac{ad\Phi}{\sqrt{a}\cos.\Phi}$. Hanc enim legem conſtanter obſeruabo, vt celeritates per radices quadratas ex altitudinibus ipſis debitis, et temporis elementa per ſpatiola interea percurſa ad celeritates applicata exprimam. Fig. 6.

§. 14. Inuenta altitudine celeritati penduli in M debita $=a\cos.\Phi$, erit vis centrifuga $=\frac{2Ma\cos.\Phi}{a}=2M\cos.\Phi$, qua filum AM tendetur. Deinde cum pendulum a grauitate $=M$ deorſum vrgeatur ſecundum directionem verticalem MP, haec vis ſecundum directiones MQ ad AM normalem, et MR reſoluta dabit pro directione MQ vim $=M\sin.\Phi$, et pro directione MR vim $M\cos.\Phi$;

Φ; quarum illa ita tota ad penduli motum accelerandum impenditur, vt filum AM prorsus non tendat. Contra vero altera vis $MR = M\cos.\Phi$ tota in filo AM tendendo insumetur. Hinc ergo et a vi centrifuga coniunctim filum AM tendetur vi $= 3M\cos.\Phi$, a qua punctum suspensionis A in directione AM sollicitabitur. Quare ex huius resolutione nascetur vis nauem retro vrgens $= 3M\cos.\Phi\sin.\Phi$.

§. 15. Multiplicetur ergo haec vis $3M\cos.\Phi\sin.\Phi$, qua nauis puppim versus impellitur, per elementum temporis $dt = \frac{-ad\Phi}{\sqrt{a}\cos.\Phi} = \frac{-d\Phi\sqrt{a}\cos.\Phi}{\cos.\Phi}$; ac prodibit sollicitatio momentanea $= -3Md\Phi\sin.\Phi\sqrt{a}\cos.\Phi$, cui elementum motus geniti est aequale. Quoniam ergo est $-d\Phi\sin.\Phi = d.\cos.\Phi$, si ponatur $\cos.\Phi = z$ erit sollicitatio momentanea $= 3Mdz\sqrt{az}$ cuius integrale est $2Mz\sqrt{a}z = 2M\cos.\Phi\sqrt{a}\cos.\Phi$. Haecque expressio praebet summam omnium sollicitationum, quibus nauis retro vrgetur, dum pendulum per arcum BM descendit. Fiat ergo $\Phi = 0$, et prodibit summa sollicitationum momentanearum ex descensu penduli integro ortarum $= 2M\sqrt{a}$, cui cum aequalis sit summa similium sollicitationum ex subsequente ascensu resultans, in qualibet penduli actione nauis retro impelletur a viribus, quarum summa est $= 4M\sqrt{a}$; ab hisque naui, si libera esset motus imprimeretur, cuius quantitas futura esset $= 4M\sqrt{a}$.

§. 16. Quaeramus nunc etiam quantam vim pendulum exerat in nauem, dum in tabulatum elasticum AF impingit; vbi quidem tabulatum tanquam immobile spectabimus. Incurrit autem in hoc tabulatum corpus penduli, cuius massa seu pondus est $= M$, cum celeri-

Fig. 3.

tate

tate debita altitudini a, quippe ex qua in descensu est delapsum. Quo autem effectum collisionis distinctius intueri queamus, tabulato in C annexum statuamus elastrum CD, in quod corpus incurrat, cuius quidem longitudinem quantumuis exiguam concipere licet. Tempore iam $= t$, postquam collisionis initium in D erat factum, pertigerit corpus in M, et elastrum in statum MC compresserit. Ponatur spatium $DM = x$, celeritas corporis in M residua debita altitudini $= v$, et vis elastri CM, qua se expandere conatur $= P$.

§. 17. His positis, dum pendulum vlterius per spatiolum $= dx$ penetrabit, erit per leges sollicitationum $M\,dv = -P\,dx$. Sed quoniam tabulatum AF indeque ipsa nauis in hoc statu antrorsum impellitur vi $= P$, valorem $\int P\,dt$, quamdiu conflictus durat, scrutari debemus. Cum autem sit $dt = \frac{dx}{V v}$; superior aequatio abibit in hanc $\frac{M\,dv}{V v} = -P\,dt$, vnde fit $\int P\,dt = -\int \frac{M\,dv}{V v} = C - 2M V v$: quae quantitas, cum initio conflictus euanescere debeat, erit $C = 2M V a$, ideoque $\int P\,dt = 2M V a - 2M V v$. Cum iam ambo corpora ponantur perfecte elastica, finito conflictu corpus habebit celeritatem aequalem illi, qua incurrerat, et quae erat $= V a$, sed contrarie directam, fietque propterea $V v = + V a$. Quo valore substituto prodibit summa virium momentanearum, ex conflictu ortarum nauemque propellentium $= 4M V a$.

§. 18. Motus ergo, quem percussio penduli naui imprimere conatur priorem versus praecise aequalis est illi, quem vires pendulum tendentes, quamdiu descensus et ascensus vnus absoluitur, in contrariam directionem generare valent. Ex quo manifestum est, etiamsi na-

vis ab ictu penduli propulsionem proram versus accipiat, tamen hunc totum motum deinceps ab ascensu penduli subsequenteque descensu omnino sublatum iri, quae destructio cum post singulos ictus eueniat, nauis nullum motum progressiuum consequi poterit, vti Celeb. Iacobus Bernoulli est suspicatus. Quanquam enim idem fere raciocinium, quo hic vsus sum instituit, viresque nauem retrahentes simili modo aestimauit, tamen in determinatione vis propellentis a percussione oriundae, errorem quendam commisit, quem Cl. Cramerus eius Commentator probe animaduertit, neque tamen ob calculi, qui ipsi subeundus videbatur, molestiam correxit.

§. 19. Neque vero haec perfecta virium propellentium et repellentium compensatio tantum locum habet, cum pendulum per integrum quadrantem mouetur; sed etiamsi minores arcus oscillando absoluat, perinde obseruabitur, id quod ostendisse operae erit pretium. Descendat ergo pendulum ante consideratum simplex AM per arcum quadrante minorem HMC, sitque positis vt ante longitudi-
Fig. 4. ne $AM=a$, et pondere corporis $M=M$, angulus $HAC=\theta$: et elapso tempore $=t$ descripserit arcum HM, sitque angulus $MAC=\Phi$; erit ductis horizontalibus HI et MK, altitudo $AI=a\cos.\theta$ et $AK=a\cos.\Phi$. Hinc ergo erit $IK=a(\cos.\Phi-\cos.\theta)$ quae est altitudo celeritati corporis in M debita: quare eius vis centrifuga erit $=2M(\cos.\Phi-\cos.\theta)$, qua filum penduli AM tendetur. Cum autem tempusculo dt pendulum per arculum $=-ad\Phi$ descendat cum celeritate $=V a(\cos.\Phi-\cos.\theta)$, erit $dt=\frac{-d\Phi\sqrt{a}}{\sqrt{(\cos.\Phi-\cos.\theta)}}$

§. 20.

§. 20. Confideretur nunc etiam vis grauitatis, qua pendulum in M fecundum MP deorſum vrgetur vi $=M$; hinc per reſolutionem naſcetur vis pendulum tendens M R $=M\cos.\Phi$. Quamobrem filum AM omnino tendetur vi $=3M\cos.\Phi-2M\cos.\theta$; quae cum habeat directionem obliquam, pro directione horizontali dabit vim $=3M\cos.\Phi\sin.\Phi-2M\cos.\theta\sin.\Phi$. Haec ergo per elementum temporis $dt=\frac{-d\Phi\sqrt{a}}{\sqrt{(\cos.\Phi-\cos.\theta)}}$ multiplicetur, vt prodeat ſollicitatio momentanea $=\frac{-Md\Phi\sin.\Phi(3\cos.\Phi-2\cos.\theta)\sqrt{a}}{\sqrt{(\cos.\Phi-\cos.\theta)}}$. Ponatur $\cos.\Phi=z$, et $\cos.\theta=b$ erit $-d\Phi\sin.\Phi=dz$, et ſollicitatio momentanea erit $=\frac{+Mdz(3z-2b)\sqrt{a}}{\sqrt{(z-v)}}$; cuius integrale eſt $=(+2Mz\sqrt{a}(z-b)=(+2M\cos.\Phi\sqrt{a}$ $(\cos.\Phi-\cos.\theta)$; quod quia initio vbi $\Phi=\theta$ euaneſcere debet, erit $C=0$, ita vt ſumma omnium virium momentanearum deſcenſui per arcum HM reſpondentium ſit $=2M\cos.\Phi\sqrt{a}(\cos.\Phi-\cos.\theta)$.

§. 21. Ponatur iam $\Phi=0$, ac pro toto penduli deſcenſu erit ſumma ſollicitationum momentanearum $=2M\sqrt{a}(1-\cos.\theta)=2M\sqrt{CI}$: ſeu cum $\sqrt{CI}$ exprimat celeritatem penduli in imo puncto C, iſta ſumma aequabitur duplae quantitati motus, quem pendulum in C acquirit. Cum iam aſcenſus ſimilis ſit deſcenſui, ſumma virium nauem retro pellentium, quae tam ex aſcenſu quam deſcenſu originem trahunt, erit $=4M\sqrt{CI}$. Ex §. 17 autem obtinebimus vim, quae ex ictu reſultat, ſi loco celeritatis ibi conſideratae $\sqrt{a}$ ſubſtituamus hanc, qua pendulum in tabulatum incurret, quae eſt $=\sqrt{CI}$. Quo facto reperietur quoque vis ex percuſſione orta $=4M\sqrt{CI}$: atque adeo etiam hoc caſu vires in deſcenſu

et aſcenſu retro pellentes ſimul ſumtae aequales erunt vi, qua nauis ab ictu antrorſum propellitur. Neque ergo hoc quoque caſu ab impulſionibus penduli naui motus progreſſiuus induci poterit.

§. 22. Quae hactenus de pendulis ſimplicibus ſunt demonſtrata, ita cum lege quadam conſtantiſſima naturae coniuncta videntur, vt iam pro certo affirmare poſſimus, in pendulis quoque quibusuis compoſitis eandem perfectam aequalitatem inter vires propellentes ac repellentes deprehenſum iri. Quod etſi ex natura centri oſcillationis facile oſtendi poſſet, tamen ceteris naturae legibus tam videtur conſentaneum, vt primis mechanicae principiis merito ſit annumerandum. Quemadmodum ergo in preſſionibus, ſeu viribus mortuis actioni ſemper aequalis et contraria reactio, ita quoque in percuſſionibus ſimilis aequalitas locum habet, quod eo minus eſt mirandum, cum quaelibet percuſſio ad preſſiones reuocari queat. Plus itaque virium quilibet ictus praeſtare nequit, quam ad motum corporum collidentium generandum requiritur, atque hancobrem naues non ſolum hoc modo Bernoulliano propelli non poſſunt, ſed quaecunque aliae machinationes, quae totae naui ſunt incluſae nullique principo externo innituntur, aeque erunt inutiles, neque nauibus vllum motum imprimere valebunt.

§. 23. Stabilito igitur hoc principio vicißim eiusmodi problemata reſoluere poterimus, quae alias ſolutu longe futura eſſent difficillima. Vti ſi pendulum ſuperius praeterea fuerit flexile, atque non in circulo ſed alia quacunque linea curua moueatur, praetereaque reſiſtentia aliaque motus impedimenta affuerint, quae res calculum inſuperabilem redderent; vel ſi alia quaecunque machina in naui con-

conſtituatur, quae partim preſſionibus partim percuſſionibus in nauim agat; nihilominus certiſſime affirmare poterimus, perfectam continuo exiſtere aequalitatem inter vires nauem propellentes et eas, quae in regionem oppoſitam effectum exerant. Ac ſi vires quidem ſint omnes prementes ſeu mortuae, iſtud aequilibrium quolibet inſtanti exiſtit, ſin autem machina inſuper percuſſiones complectatur, tum quidem non quouis momento aequilibrium cernetur, ſed fieri poteſt vt nauis per aliquod temporis interuallum a viribus prementibus propellatur; qui autem effectus deinceps ſubito ab inſequente percuſſione penitus deſtruatur. Quamdiu ſcilicet ipſa machina in motu verſatur, et extra aequilibrii ſtatum eſt poſita, naui motus imprimetur, quam primum autem machina in priſtinum ſtatum reſtituitur, ſimul nauis in ſitum primum redigetur.

§. 24. Ratio autem huius principii multo clarius perſpicietur, ſi primum aquam omni reſiſtentia carentem aſſumamus, ita vt nauis perpetuo motum impreſſum ſine vllo impedimento proſequi poſſit. In hac hypotheſi, ſi ſuper naui huiusmodi pendulum aliaue quaecunque machina agitetur, quae nullum recipiat motus principium externum, ex legibus motus manifeſtum eſt commune grauitatis centrum ipſius nauis ac machinae quieſcere debere; niſi quatenus verticaliter vel aſcenditvel deſcendit. Haec enim lex non ſolum obſeruatur, cum machina per preſſiones in nauem agit, quo caſu tam in nauem quam in machinam aequales vires exeruntur: ſed etiam ſi ictus ſeu percuſſiones peraguntur, centri grauitatis ſtatus non ſecus perturbabitur. Quomodocunque ergo machina intra nauem exiſtens fuerit comparata, eiusque actio tam ex

preſſio-

preſſionibus quam percuſſionibus compoſita, centrum commune grauitatis ſecundum horizontem nullum motum conſequi poterit, neque idcirco vlla huiusmodi machina apta erit ad nauem promouendam.

§. 25. Quodſi vero reſiſtentia aquae ſimul conſideretur, tum lex ante memorata de centro grauitatis aliquantum infringitur, dum nauis a machina ſollicitata tantum non cedit, quantum per illam legem cedere deberet, ſimilique modo in colliſionibus ob reſiſtentiam aquae commune centrum grauitatis non perfecte quieſcet. Difficillimo etiam calculo opus eſſet, ſi quis ſingulos hos effectus ſecundum praecepta mechanica euoluere vellet. Cum autem totus reſiſtentiae effectus in motu minuendo conſumatur, neque ab ea vllus motus produci poſſit: reſiſtentia aquae certe in cauſa eſſe non poterit, vt navi motus imprimatur, cum eadem nauis reſiſtentia ſublata quieſcere deberet. Vnde ſummo iure concludimus, quemadmodum nauis remota aquae reſiſtentia a viribus internis nullum motum progreſſiuum adipiſci poteſt, ei multo minus, ſi reſiſtentia aquae accedat, ab huiusmodi viribus vllum motum imprimi poſſe.

Fig. 1. §. 26. Quamquam hoc ratiocinium omni exceptione maius videtur, tamen dantur caſus, quibus ob ipſam reſiſtentiam motus producitur, cum nullus ea remota oriretur. Si enim nauis DEFG baſi ſua EF in plano aſpero incumberet, ſuper quo ſine ſenſibili frictione promoueri nequeat, perſpicuum eſt frictionem tantum eſſe poſſe, vt a viribus pendulum tendentibus ſuperari nequeat, ſicque ab iis naui nullus motus retrorſum imprimatur. Nihilo tamen minus ab ictu penduli contra tabel-

bellatum AF frictio vinci poterit, quo fiet vt nauis a ſingulis percuſſionibus penduli aliquantum prorſum protrudatur, quae promotio cum a viribus contrariis non deſtruatur, nauis vtique promouebitur, qui effectus nullo modo obtineretur, ſi nulla frictio adeſſet. In quo memorabile paradoxon mechanicum continetur, quod ipſa frictio motus cuiuspiam cauſa eſſe queat, ita vt frictione ſublata nullus plane motus ſequeretur.

§. 27. Eo maior igitur hinc cauſa dubitandi ſuboritur, vtrum ob aquae reſiſtentiam naui ab huiusmodi penduli ictibus nullus motus induci queat, etiamſi certum ſit, ſi reſiſtentia abeſſet, ipſi hoc modo nullum motum imprimi poſſe. Quod dubium vt tollamus, conſideremus nauem alternatim a duabus viribus; p et P ſollicitari, a quarum altera p tempore $= t$ proram verſus, ab altera autem P tempore $=$ T puppim verſus vrgeatur, hae autem vires p et P ratione temporum t et T ita ſint comparatae, vt ſit $pt = PT$, quam aequalitatem determinatio virium tam propellentium quam repellentium ante inſtituta ſuppeditauit. Quamuis autem neque vis p neque P, quamdiu vtraque agit, inuenta ſit conſtans, tamen commoditatis calculi gratia vtramque conſtantem ſine errore aſſumere poterimus, cum leuis inaequalitas nullius motus cauſa eſſe queat, qui ex aequalitate non aeque ſequeretur.

§. 28. Ponamus igitur vim p prius agere, qua nauis propellatur, atque initio nauem fuiſſe in A, vbi celeritatem habuerit proram verſus $= v b$, iamque confeciſſe ſpatium $AP = x$ atque in P celeritatem habere debitam Fig. 5.

bitam altitudini $= v$. Cum igitur reſiſtentia ſit vt quadratum celeritatis, ponatur ea $= \frac{v}{k}$; fietque $dv = pdx - \frac{vdx}{k}$. Ponatur tempus quo ex A in P peruenerit $= t$, erit $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}$ et $dx = dt\sqrt{v}$ quo valore loco dx ſubſtituto habebimus $k\,dv = (kp - v)\,dt\sqrt{v}$. Sit $\sqrt{b} = c$ et $\sqrt{v} = u$, vt irrationalitas tollatur, erit $2kdu = (kp - uu)dt$. Quia igitur ſi $t = 0$ fit $u = c$, integrale huius aequationis etiamſi per logarithmos exhiberi poſſet, tamen expediet per ſeriem ſequenti modo exprimere:

$u = c + At + Btt + Ct^3 + Dt^4 + \text{etc.}$

ex qua fit:

$\frac{2kdu}{dt} = 2Ak + 4Bkt + 6Cktt + 8Dkt^3 + \text{etc.}$

$kp - uu = kp - 2Act - 2Bctt - 2Ct^3 - cc - AAtt - 2ABt^3 \text{ etc.}$

Coaequatio coefficientium igitur dabit:

$A = \frac{1}{2}p - \frac{cc}{2k}$. $B = \frac{-cp}{4k} + \frac{c^3}{4k^2}$:

$6Ck = \frac{ccp}{2k} - \frac{c^4}{2kk} - \frac{1}{4}pp + \frac{ccp}{2k} - \frac{c^4}{4kk} = -\frac{1}{4}pp + \frac{ccp}{k} - \frac{3c^4}{4kk}$

Ergo $C = \frac{-3pp}{24k} + \frac{ccp}{6kk} - \frac{c^4}{8k^3}$

$8Dk = \frac{cpp}{12k} - \frac{c^3p}{8kk} + \frac{c^5}{4k^3} + \frac{cpp}{4k} - \frac{c^3p}{2kk} + \frac{c^5}{4k^3}$

ſeu $D = \frac{cpp}{24kk} - \frac{5c^3p}{48k^3} + \frac{c^5}{16k^4}$ etc.

Ex his ergo oritur celeritas nauis quaeſita finito tempore t:

$u = c + \frac{1}{2}t(p - \frac{cc}{k}) - \frac{ctt}{4k}(p - \frac{cc}{k}) - \frac{t^3}{24k}(pp - \frac{4ccp}{k} + \frac{3c^4}{kk})$

$+ \frac{ct^4}{48kk}(2pp - \frac{5ccp}{k} + \frac{3c^4}{kk}) + \text{etc.}$

§. 29. Simili modo ſi finito hoc tempore t celeritas nauis antrorſum ponatur $= C$ vt ſit $C = u$, tumque vis P nauem retrahat tempore T, ſi elapſo hoc tempore T celeritas nauis reſidua ponatur $= U$, reperietur

U

$$U = C - \tfrac{1}{2} T \left(P + \tfrac{CC}{k} + \tfrac{CTT}{4k}\left(P + \tfrac{CC}{k}\right) - \tfrac{T^4}{24k}\right.$$
$$\left.\left(PP + \tfrac{4CCP}{k} + \tfrac{3C^4}{kk} + \tfrac{CT^4}{40kk}\left(2PP + \tfrac{5CCP}{k} + \tfrac{5C^4}{kk}\right) - \text{etc.}\right.\right.$$

Quia vero eſt $pt = PT$ ponamus $pt = PT = Q$ erit $p = \frac{Q}{t}$ et $P = \frac{Q}{T}$, quibus valoribus loco p et P ſubſtitutis, erit

$$u = c + \tfrac{1}{2} Q - \tfrac{cct}{2k} - \tfrac{cQt}{4k} - \tfrac{QQt}{24k} + \tfrac{c^3tt}{4kk} + \tfrac{ccQtt}{6kk} + \tfrac{cQQtt}{24kk} - \text{etc.}$$
$$U = C - \tfrac{1}{2} Q - \tfrac{CCT}{2k} + \tfrac{CQT}{4k} - \tfrac{QQT}{24k} + \tfrac{C^3T^2}{4kk} - \tfrac{CCQT^2}{6kk} + \tfrac{CQQT^2}{24kk} \text{ etc.}$$

Cum autem tempus percuſſionis t ſit quaſi infinite parvum poſito $t = 0$, erit $u = c + \frac{1}{2} Q = C$, vnde ab ſubſequente penduli actione ab eius tenſione oriunda fiet:

$$U = c - \tfrac{T}{24k}(12cc + 6cQ + QQ) + \text{etc.}$$

vbi reliquos terminos negligimus, quia prae his duobus ſunt valde parui.

§. 30. Hinc ergo manifeſtum eſt fore $U < c$, ideoque celeritatem nauis a quauis penduli actione, quae primum ex ictu tum vero ex tenſione penduli componitur, diminui debere. Etiamſi ergo nauis iam habeat celeritatem quamquiam antrorſum directam, eam tamen ab actione penduli mox amittet, vnde multo minus cum quieuerit, a pendulo vllum motum adipiſci poterit. Quod ſi vero obiiciatur nauem forte a pendulo retrorſum repelli permutandis velocitatibus u et U, ſimili modo oſtendetur, celeritatem quoque retrorſum directam, ſi quam nauis habuerit, ab actione penduli continuo imminui debere, atque adeo nullo modo naui ab huiusmodi pendulo imprimi poſſe.

DISSERTATIO GEOMETRICA, DE PROBLEMATIBVS ALIQVOT CONICIS PER ANALYSIN CONCINNE SOLVENDIS.

AVCTORE
GEORG. WOLFFG. KRAFFT.

Theorema.

§. 1.

Tab. V. Fig. 1. Si fuerint, in Ellipſi AMB, axis AB, tangens puncti M cuiuslibet MT; centrum C, ordinatim applicata ad axem PM: erunt CP, CA, CT, proportionales continue.

Demonſtratio.

Poſitis $AC=CB=m$, ſemiaxe coniugato $CD=n$. Abſciſſa e centro computata $CP=x$, ordinatim applicata $PM=y$; erit ex natura Ellipſeos $PM^2(y^2):CD^2(n^2)=AP\times PB(m^2-x^2):AC\times CB(m^2)$; adeoque aequatio naturam Ellipſeos exprimens haec, $y^2=n^2-\frac{n^2x^2}{m^2}$. Ducta ordinatim applicata priori infinite vicina pm, et recta MN ad axem AB parallela, erit, ex natura trianguli characteriſtici MNm infinite parui, $mN(dy):MN(-dx)=PM(y):PT(\frac{-ydx}{dy})$. Eſt adeoque, ſubſtituendo pro dy valorem ipſius ex aequatione Ellipſeos deſumtum $-\frac{n^2xdx}{m^2y}$, ſubtangens $PT=\frac{m^2y^2}{n^2x}$; et rurſus ſubſtituendo valorem ipſius y^2, fit eadem ſubtangens $PT=\frac{m^2}{x}-x$; ergo $CT=x+PT=\frac{m^2}{x}$; vnde oritur analogia

analogia $x:m=m:CT$; vel $CP:CA=CA:CT$. Q. E. D. Eſt haec propoſitio *Appollonii*, *Conicorum* 37, lib. I. quam vero ſic telae demonſtrationis noſtrae intexere volui.

Theorema.

§. 2. In Ellipſi ſumma quadratorum ex ſemidiametris quibuscunque coniugatis, aequalis eſt ſummae quadratorum ex ſemiaxibus eiusdem Ellipſeos.

Demonſtratio.

Sint axis maior AB, et ſemiaxis coniugatus CD; puncti M cuiuslibet tangens MT, ordinatim applicata MP; ſemidiametri coniugatae MC et CH; et puncti H ordinatim applicata ad axem HQ. Quibus ita poſitis ſtatuantur $CP=x$, $PM=y$, $CQ=t$; $CA=CB=m$, $CD=n$. Atque habebuntur, ex theoremate praemiſſo, $PM=y=\frac{n\sqrt{(m^2-x^2)}}{m}$; $PT=\frac{m^2-x^2}{x}$. Iam, quoniam ſemidiameter CH parallela eſt tangenti TM; erunt triangula PMT et QHC ſimilia. Igitur $PT\left(\frac{m^2-x^2}{x}\right)$; $PM\left(\frac{n\sqrt{(m^2-x^2)}}{m}\right)=QC(t):QH\left(\frac{ntx}{m\sqrt{(m^2-x^2)}}\right)$. Erit porro, ex natura Ellipſeos, $PM^2\left(\frac{n^2m^2-n^2x^2}{m^2}\right):QH^2=AP\times PB\,(m^2-x^2):AQ\times QB\,(m^2-t^2)$, vnde conficitur $QH=\frac{n\sqrt{(m^2-t^2)}}{m}$. His itaque duobus valoribus inuentis ipſius QH inter ſe aequatis, oritur facili calculo $t=CQ=\sqrt{(m^2-x^2)}$, et ſubſtituto hoc valore, $QH=\frac{nx}{m}$. Hinc porro deducuntur $CM^2=PM^2+CP^2=\frac{n^2m^2-n^2x^2}{m^2}+x^2$; nec non $CH^2=CQ^2+QH^2=m^2-x^2+\frac{n^2x^2}{m^2}$. Itaque erit

Fig. 2.

$CM^2+CH^2=\frac{n^2m^2-n^2x^2}{m^2}+x^2+m^2-x^2+\frac{n^2x^2}{m^2}=\frac{n^2m^2}{m^2}$ $+m^2=n^2+m^2=CD^2+CA^2$. Q. E. D.

Theorema.

Fig. 3. §. 3. Sint Ellipſeos axes dimidii CA, CD, et ſemidiametri coniugatae quaecunque MC, CH: atque rectangulum ſub dimidiis axibus aequale erit parallelogrammo ſub dimidiis diametris coniugatis.

Demonſtratio.

Per extremum diametri M ducatur tangens TME; erit haec parallela ipſi CH; per extremum diametri H ducatur alia tangens HE; erit haec iam parallela ipſi CM; adeoque erit parallelogrammum ſub dimidiis diametris coniugatis CMEH. Ponantur denuo $AC=m$, $CD=n$, $MC=a$, $CH=b$, $CP=x$; atque habebitur, (§. 1) $CP(x):CA(m)=CA(m):CT(\frac{m^2}{x})$; $PT=\frac{m^2}{x}-x$; $PM=\sqrt{(a^2-x^2)}$, conſequenter $TM=\sqrt{(\frac{m^4}{x^2}+a^2-2m^2)}$. Sed eſt ex natura Ellipſeos $PM^2(a^2-x^2):CD^2(n^2)=AP\times PB(m^2-x^2):AC^2(m^2)$, vnde deducitur $x^2=\frac{m^2(a^2-n^2)}{m^2-n^2}$; qui valor ſubſtitutus efficit $PM=\frac{n\sqrt{(m^2-a^2)}}{\sqrt{(m^2-n^2)}}$, $CT=\frac{m\sqrt{(m^2-n^2)}}{\sqrt{(a^2-n^2)}}$, et $TM=\frac{\sqrt{(m^2-a^2)}\sqrt{(m^2-a^2+n^2)}}{\sqrt{(a^2-n^2)}}$; vel, ob $m^2+n^2=a^2+b^2$ (§. 2), erit $TM=\frac{b\sqrt{(m^2-a^2)}}{\sqrt{(a^2-n^2)}}$; adeoque poſito ſinu toto $=1$, erit ſinus $T=\frac{PM}{TM}=\frac{n\sqrt{(a^2-n^2)}}{b\sqrt{(m^2-n^2)}}$. Porro in triangulo CTM eſt $CM(a):\text{ſin. }T(\frac{n\sqrt{aa-nn}}{b\sqrt{mm-nn}})=CT(\frac{m\sqrt{mm-nn}}{\sqrt{aa-nn}}):\text{ſin. }CMT(\frac{mn}{ab})=\text{ſin. }MCH=\text{ſin. }HCF$, ob parallelas ME et CH. Demiſſa nunc ex H perpendiculari HF in productam MC, erit in trian-

triangulo CHF ſinus totus (1) : CH (b) = ſin. HCF ($\frac{mn}{ab}$) HF ($\frac{mn}{a}$). Eſt igitur area parallelogrammi CMEH = CM × HF = $a \times \frac{mn}{a} = mn$ = AC × CD = rectangulo ſub dimidiis axibus. Q. E. D. Habet hoc elegans theorema *Gregorius a Sancto Vincentio*, de Ellipſi, prop. 72, ſed longe aliter demonſtratum. Vtiliſſimum vero eſt theorema hoc ad varias applicationes concinnas, praecipue ob commodam expreſſionem ſinus anguli MCH, quem duae diametri coniugatae quaecunque inter ſe faciunt. qui ſinus nimirum eſt $\frac{mn}{ab}$. Commode et perſpicue iam hinc ſoluitur etiam ſequens

Problema.

§. 4. Datis duabus diametris coniugatis Ellipſeos: inuenire axes.

Solutio.

Sint datarum diametrorum dimidia MC = a, CH = b; ſemiaxes quaeſiti AC = x, CD = y; anguli dati MCH, quem ſuppono obtuſum, ſinus = e, coſinus = $-f$; erit ergo anguli HCF ſinus = e, coſin. = $+f$. Ex H in MCN demittatur perpendicularis HF, atque erit *primo*, $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. (§. 2.) Deinde in triangulo CFH erit analogia haec, ſinus totus (1): CH (b) = ſin. HCF (e): HF (be); et ſimili modo CF = bf. Erit ergo *ſecundo* $xy = abe$, (§. 3.) aut vero $2xy = 2abe$, quibus additis ad aequationem modo poſitam primam; obtinebitur $x^2 + 2xy + y^2 = a^2 + b^2 + 2abe$, aut vero extracta radice, $x + y = \pm \sqrt{(a^2 + 2abe + b^2)}$. Subtractis autem $2xy = 2abe$ ab aequatione modo inventa

Fig. 4

venta prima, eruitur $x^2-2xy+y^2=a^2+b^2-2abe$, aut vero rursus extracta radice fit $x-y=\pm\sqrt{(a^2-2abe+b^2)}$. Datis autem summa et differentia semiaxium: dantur semiaxes ipsi. Requiritur iam modo, vt valores inuenti commode possint construi. Hunc in finem considerari debet, esse $e^2+f^2=1$. Ergo $x+y=\pm\sqrt{(a^2+2abe+b^2e^2+b^2f^2)}=\sqrt{(a+be)^2+b^2f^2}=\sqrt{(MC+HF)^2+CF^2}$. Nec non $x-y=\sqrt{(a^2-2abe+b^2e^2+b^2f^2)}=\sqrt{(a-be)^2+b^2f^2}=\sqrt{(MC-HF)^2+CF^2}$. Hinc $x+y$ et $x-y$, per triangulum rectangulum, ex theoremate *Pythagorico*, nullo labore capiuntur, quarum deinde summa est axis transuersus, differentia vero axis coniugatus. Restat determinandus situs axeos. Super diametro coniugata CH descriptus sit semicirculus, quem axis secet in Q: erit CQH rectus angulus; hinc ex natura Ellipseos est $QH^2:CD^2=BQ\times QA\,(\overline{AC-CQ}\times\overline{AC+CQ}=AC^2-CQ^2=AC^2-CH^2+QH^2):AC^2$; vnde mediis et extremis in se ductis, factaque reductione, oritur $QH=\frac{CD\sqrt{(AC^2-CH^2)}}{\sqrt{(AC^2-CD^2)}}$. Cum igitur datae iam sint magnitudine AC et CD; poterit hac leui constructione obtineri HQ, qua posita in semicirculo ex H in Q, dabitur Q punctum; et ducendo dein per datum C, et inuentum Q, lineam rectam ACB, dabitur in hac positio axeos transuersi. I. Q. E. I.

Scholion.

§. 5. Si praeter diametros coniugatas data etiam sit perimeter Ellipseos, quod Veteres in hoc negotio fere semper suppossuerunt; tum facilius hoc problema resol-

vitur,

vitur, vti docet *Appollonius* prop. 46 et 47 lib. II. Fig. 5. Ex dato enim per diametros coniugatas centro Ellipſeos C, deſcribatur arcus circuli AB quolibet radio, ſecans perimetrum datam in A et B; arcus interceptus biſecetur in D; tranſibit axis per data iam duo puncta C et D. Euidens enim eſt, fore vt haec CD ordinatam AB biſecet ad angulos rectos. Quodſi vero perimeter data non ſit: difficilior euadit huius problematis ſolutio, vti iam vidimus. Huius itaque ipſius, quod modo ſolvimus, problematis conſtructionem primus dedit *Pappus Alexandrinus*, in Collect. Mathem. Libro VIII. prop. 14; ſed nullam addidit demonſtrationem; hanc ſupplere conatus eſt commentator Pappi, *Fred. Commandinus*, verum non ſatis feliciter; quod teſtantur *Gregorius a S. Vincentio* de Ellipſi prop. 90, et *Blondellus*, in Memoires de l'Acad. des Sciences depuis, 1666 jusqu'à 1699, pag. 464; qui idem hic etiam de hoc problemate, ex occaſione aedificandorum fornicum, agit, nouam eius conſtructionem exhibet, et mancam *Commandini* demonſtrationem emendat. *Pappi* conſtructionem habet quoque *Gregorius a S. Vincentio*; nec ab eadem multo abludentem tradit *Hoſpitalius*, des ſections coniques, Lib. II. prop. 11. Si quis vero hanc noſtram comparare voluerit cum enarratis ſolutionibus: inueniet eam concinnitate et euidentia reliquos facile ſuperantem.

Problema.

§. 6. Data vna diametrorum coniugatione: inuenire alteram ſub angulo quouis dato.

Solutio.

Fig. 4. Inueniantur ex data diametrorum coniugatione axes, (§. 4), quorum dimidia ſint $AC=m$, $CD=n$; ſemidiametri quaeſitae vero ſint $MC=x$, et $CH=y$, conſtituentes inter ſe angulum MCH datum, quem ſuppono obtuſum, cuius adeo ſit ſinus $=e$, coſinus $=-f$. Atque erit *primo* $x^2+y^2=m^2+n^2$, (§. 2). Erit *ſecundo* $\frac{mn}{xy}=e$, (§. 3), vel $\frac{2mn}{e}=2xy$. Additis igitur ſibi his duabus aequationibus prodit $x^2+2xy+y^2=m^2+n^2+\frac{2mn}{e}$, ſiue, extractis radicibus, erit $x+y=\pm\sqrt{(m^2+n^2+\frac{2mn}{e})}$. Subtractis vero a ſe his prioribus, aequationibus, extractisque rurſus radicibus, oritur $x-y=\pm\sqrt{(m^2+n^2-\frac{2mn}{e})}$. Data itaque denuo ſumma et differentia diametrorum quaeſitarum, dabuntur illae ipſae magnitudine. Vt vero cognoſcatur earum poſitio: ſit M punctum illud perimetri Ellipticae, quod ex ſectione diametri quaeſitae oritur, et inde ad axem ſemiordinata PM; atque erit $CP=\frac{m\sqrt{(x^2-n^2)}}{\sqrt{(m^2-n^2)}}$, et $PM=\frac{n\sqrt{(m^2-x^2)}}{\sqrt{(m^2-n^2)}}$; (§. 3.) cum igitur data iam ſit magnitudo ipſius x: poterunt facili conſtructione reperiri hae duae CP et PM, atque exinde ſitus diametri MN cognoſci, cui deinde ſub imperato angulo MCH iungatur altera diameter priori coniugata. Ab aliis problematibus, quae ſimili concinnitate ex his principiis ſolui poſſunt, iam abſtineo, contentus viam ad illa adeunda me monſtraſſe.

DEMON-

DEMONSTRATIONES DVORVM THEOREMATVM GEOMETRICORVM.

AVCTORE
G. W. KRAFFT.

Primum horum Theorematum beneuole mecum communicauit, ſine ſubiuncta demonſtratione, Celeberr. Dom. *Leonh. Eulerus*, in literis d. d. 17. Febr. 1748. ad me ſcriptis; quod nouum non modo viſum eſt, ſed et generalitate ſua mirum in modum mihi placuit; huius itaque demonſtrationem ſequentem in modum poſtea adornaui, vt praemittere debeam ex Trigonometria petitum ſequens.

Lemma.

Data ſint trianguli acutanguli duo latera BA *et* BC, *cum angulo intercepto* B: *quaeritur magnitudo lateris tertii* AC. Ponantur BA $= \alpha$, BC $= \beta$, anguli acuti B ſinus μ, coſinus $\lambda = \sqrt{(1-\mu^2)}$, poſito ſinu toto $= 1$; et demittatur perpendicularis CD. Erit iam in triangulo rectangulo BDC analogia haec: ſinus totus (1): BC(β) = ſin. DCB (λ): DB ($\beta\lambda$); hinc eſt ſegmentum AD $= \alpha - \beta\lambda$; porro eſt in eodem triangulo rectangulo BDC etiam haec analogia; ſinus totus (1); BC (β) = ſinus DBC (μ): DC ($\beta\mu$); ex his iam per Theorema Pythagoricum erit AC $= \sqrt{(AD^2 + DC^2)} = \sqrt{(\alpha^2 - 2\alpha\beta\lambda + \beta^2\lambda^2 + \beta^2\mu^2)} = \sqrt{(\alpha^2 - 2\alpha\beta\lambda + (\lambda^2+\mu^2)\beta^2)} = \sqrt{(\alpha^2+\beta^2 - 2\alpha\beta\lambda)}$, ob $\lambda^2 + \mu^2 = 1$. Facile autem apparet, in eo caſu, in quo ſit angulus B obtuſus, eius coſinum λ ſumi

Tab. V. fig. 6.

ſumi debere negatiuum, vt nempe tum ſit $AC = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\lambda)}$. Quae determinatio Trigonometrica huius lateris AC, quamuis nulla fere difficultate eruatur, vſum tamen inſignem habet in ſoluendis tam plurimis problematibus, quam adſtruendis theorematibus Geometricis, qui idem etiam ſeſe oſtendit in hoc ſequenti meo propoſito, cuius iam ipſum eſt ſubiunctum

Theorema.

Fig. 7. *Si quadrilateri cuiuscunque* ABCD *diagonales* AC, DB, *biſecentur in* F *et* G; *ducaturque recta* FG; *erit ſumma quadratorum e lateribus aequalis ſummae quadratorum e diagoniis una cum quadruplo quadrati* FG; *hoc eſt, erit* $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + DB^2 + 4FG^2$.

Demonſtratio.

Ponantur breuitatis cauſſa ſequentes valores,

$AC = 2A$	erunt	$AE = A + a = M$
$DB = 2B$		$BE = B - b = N$
$FE = a$		$CE = A - a = P$
$EG = b$		$DE = B + b = Q$

vnde $M - P = 2a$

$N - Q = -2b$.

Sitque anguli AED acuti ſinus μ, coſinus λ; obtuſi vero AEB ſinus iterum μ, ſed coſinus $-\lambda$. Erunt nunc ex praemiſſo Lemmate

$AB = \sqrt{(M^2 + N^2 + 2MN.\lambda)}$

$BC = \sqrt{(N^2 + P^2 - 2NP.\lambda)}$

$CD = \sqrt{(P^2 + Q^2 + 2PQ.\lambda)}$

DA

$DA = \sqrt{(M^2 + Q^2 - 2MQ.\lambda)}$
$FG = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab.\lambda)}$

Hinc itaque, ſubſtitutis hiſce valoribus, deprehendetur, eſſe $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = M^2 + N^2 + 2MN.\lambda + N^2 + P^2 - 2NP.\lambda + P^2 + Q^2 + 2PQ.\lambda + M^2 + Q^2 - 2MQ.\lambda = 2(M^2 + N^2 + P^2 + Q^2) + 2\lambda(MN - NP + PQ - MQ) = 2(M^2 + N^2 + P^2 + Q^2) + 2\lambda(\overline{M-P} \times \overline{N-Q}) = 2(A^2 + 2Aa + a^2 + B^2 - 2Bb + b^2 + A^2 - 2Aa + a^2 + B^2 + 2Bb + b^2) - 8ab\lambda, = 4(A^2 + B^2 + a^2 + b^2 - 2ab\lambda) = 4(A^2 + B^2 + FG^2) = 4A^2 + 4B^2 + 4FG^2 = AC^2 + DB^2 + 4FG^2$.

I. Q. E. D.

Per ſe itaque patet, ſi quadrilaterum fuerit parallelogrammum: tum FG in nihilum abire, adeoque futurum eſſe $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + DB^2$.

Alterum Theorema non oſtendit minus vſum Lemmatis iam explicati, ſed et multo difficilius demonſtratur, ob ſummam, in qua poſitum eſt, atque extenſiſſimam vniverſalitatem. Inuentorem habet hoc alterum Theorema Celeberr. *Coteſium*, in cuius opuſculis poſtremis editum illud eſt a *Rob. Smith*, ſed ſine demonſtratione; quam deinde alii Geometrae addiderunt; omnibus autem in hac reperiunda palmam praeripuit, vti alias ſemper, *Ioh. Bernoullius*, quem nuper admodum viuis ereptum luget adhuc, diuque lugebit, ciuitas omnis Geometrica. Hanc viri, poſt fata etiam illuſtris, demonſtrationem videre licet in Eiusdem Operibus, Tomo IV. pag. 67, perfecta Inductione, atque euidenti ſerierum conſecutione elaborata;

tam; quae vero, vti tam ſubtilis theorematis indagatio requirit, ſubtilis etiam eſt, neque adeo captu admodum facilis. Sequentes vero meas demonſtrationes, Lemmati ſuperiori innixas, minime pro apodixi aliqua vniuerſali vendito; ſed pro tali, quae in caſibus aliquot, exempli gratia adductis, legitime procedat, adeoque nobiliſſimo huic Cyclometriae, atque abſtruſiſſimo Theoremati clariorem lucem conciliet; ſed ſimul illud, in quolibet propoſitorum exemplorum caſu, rigidiſſime probet. Eſt vero tale ipſum hoc *Coteſianum*

Theorema.

Fig. 8. *Si peripheria circuli, cuius diameter* AI, *centrum* O, *diuiſa fuerit in partes aequales, ſed numero pares; et ex puncto diametri quocunque aſſumto* P *ducantur in diviſionum omnes notas rectae* PB, PC, PD *&c. Si iam initium fiat in diametro ipſa, et multiplicentur ſingulae alternae hae lineae in ſe; erit factum* AP × CP × EP × GP × IP × LP × NP × PP *&c. vſque ad numerum horum factorum* λ, $= AO^{\lambda} - PO^{\lambda}$. *Si vero initium fiat ab illa recta, quae diametro proxima eſt, erit denuo factum harum alternarum* BP × DP × FP × HP × KP × MP × OP × QP *&c. vſque ad numerum horum factorum* λ, $= AO^{\lambda} + PO^{\lambda}$. Huius iam Theorematis elegantiſſimi aliquot caſus dabo demonſtratos, quoniam generalis omnium caſuum euictio, *Bernoulliana* memorata melior inueniri vix poterit.

Praeter Lemma ſuperius autem, ſuppono adhuc, poſito anguli ſimpli coſinu $= b$, eſſe coſinum

anguli dupli $= 2b^2 - 1$

tripli $= 4b^3 - 3b$ qua-

quadrupli $= 8b^4 - 8b^2 + 1$

quintupli $= 16b^5 - 20b^3 + 5b$;

Deinde ex polygonorum regularium in circulum inſcriptione, poſito vbique radio $= 1$, eſſe coſinum anguli

90°	0
72	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
60	$\frac{1}{2}$
54	$\frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{4}$
45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
36	$\frac{\sqrt{(2\sqrt{5}+6)}}{4}$
30	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
18	$\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}$
0	1

Quibus itaque praemiſſis, aſſumamus peripheriam circuli diuiſam eſſe in partes quatuor; demonſtrandum eſt, eſſe $AP \times CP = AO^2 - PO^2$; et $BP \times DP = AO^2 + PO^2$. Quod facillime fit ad hanc analogiam, quam in ſequentibus quoque retinebo. Ducto radio BO, ſit $PO = a$, $AO = r$; atque erit anguli POB recti coſinus $= 0$; igitur ex Lemmate habetur $BP = V(r^2 + a^2) = DP$; quod etiam per ſe clarum eſt; pono habemus $AP = r - a$, $CP = r + a$; quare erit omnino $AP \times CP = \overline{r-a}.\overline{r+a} = r^2 - a^2 = AO^2 - PO^2$. Et rurſus $BP \times DP = BP^2 = r^2 + a^2 = AO^2 + PO^2$. Vbi in hoc et ſequentibus quoque caſibus per ſe clarum eſt, poſito puncto P extra circulum, proditura eſſe haec facta talia, $PO^2 - AO^2$. Fig. 9.

So-

Fig. 10. Secundo ponamus, peripheriam circuli diuiſam eſſe in partes ſex; demonſtrandum eſt, eſſe $AP \times CP \times EP = AO^3 + PO^3$; et $BP \times DP \times FP = AO^3 + PO^3$. Ductis ergo radiis BO, CO, ſit denuo $PO = a$, $AO = r$, atque erit anguli POB 60° coſinus $= \frac{1}{2}$, coſinus autem dupli $POC = -\frac{1}{2}$; quibus datis ex Lemmate partim, partim per ſe, erunt $AP = r - a$, $BP = \sqrt{(r^2 + a^2 - 2ar.\frac{1}{2})} = FP$; $CP = \sqrt{(r^2 + a^2 + 2ar.\frac{1}{2})} = EP$; $DP = r + a$. Quare erit $AP \times CP \times EP = AP \times CP^2 = \overline{r - a}(r^2 + a^2 + ar) = r^3 - a^3 = AO^3 - PO^3$. Et rurſus $BP \times DP \times FP = DP \times BP^2 = \overline{r + a}.(r^2 + a^2 - ar) = r^3 + a^3 = AO^3 + PO^3$.

Fig. 11. Tertio ponamus, peripheriam circuli diuiſam eſſe in partes octo; demonſtrandum eſt, eſſe $AP \times CP \times EP \times GP = AO^4 - PO^4$; nec non $BP \times DP \times FP \times HP = AO^4 + PO^4$. Ductis ergo radiis BO, CO, DO, ſint rurſus $PO = a$, $AO = r$; atque erit anguli POB, ſemirecti, coſinus $= \frac{\sqrt{2}}{2}$, coſinus dupli autem $POC = 0$, coſinus tripli $POD = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; quibus datis partim per ſe, partim ex Lemmate, oritur $AP = r - a$, $BP = \sqrt{(r^2 + a^2 - 2ar.\frac{\sqrt{2}}{2})} = HP$; $CP = \sqrt{(r^2 + a^2 + 2ar.0)} = GP$; $DP = \sqrt{(r^2 + a^2 + 2ar.\frac{\sqrt{2}}{2})}$; $EP = r + a$. Quare prodibit $AP \times CP \times EP \times GP = AP \times CP^2 \times EP = \overline{r - a}.(r^2 + a^2).\overline{r + a} = r^4 - a^4 = AO^4 + PO^4$. Tum vero etiam $BP \times DP \times FP \times HP = BP^2 \times DP^2 = (r^2 + a^2 - ar\sqrt{2})(r^2 + a^2 + ar\sqrt{2}) = r^4 + a^4 = AO^4 + PO^4$.

Atque ſimili iam huic modo demonſtratio haec in reliquis caſibus perficitur, quod monuiſſe ſufficit.

PHISICO-

PHYSICO-MATHEMATICA.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE, FACTAE An. 1745, TVBINGAE,

a

Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

Simul ac ſedem hic loci figere mihi licuit, non negligenter in id etiam incubui, vt et inſtrumenta adcurata, et commoda loca ſeligerem, quae continuandis obſeruationibus meteorologicis, in Academia Imperiali Petropolitana per longam annorum ſeriem multo labore inſtitutis, inſeruire poſſent. Leguntur dictae hae obſeruationes in *Commentariorum Acad. Scient Imper. Petropol.* Tomo IX, et ſequentibus, in quibus aliqua ſaltim huc facientia, nec animaduerſione plane indigna, pertinaci induſtria reperiſſe me confido. In his autem *Tubingae* factis obſeruationibus vtor, plane vti in praecedentibus, Barometro ſimplici, bene conſtructo, locato in conclaui vix aliquantum calefacto durante hyeme, atque eodem modo etiam diuiſo vti *Petropolitanum* fuit, ſcilicet in pollices *Londinenſes* duodecimales, et horum partes centeſimas, quas punctulo a pollicibus ſeparaui; quam diviſionem data opera hunc in finem retinui, vt eo facilius has cum praecedentibus meis obſeruationibus connectere atque comparare poſſim. Tubuli, in quo mouetur mercurius, diameter eſt $\frac{1}{7}$ praecedentis pollicis, atque ipſum hoc inſtrumentum ſitum eſt in altitudine 60 pedum Londinenſ. ſupra libellam proxime praeterfluentis fluuii

Nicri. Thermometrum deinde, quo vſus ſum, methodo *Fahrenheitiana* diuiſum, conſtructum habeo ab inſigni illo artifice Amſtelodamenſi, *Henr. Prinz*, ad illa praecepta, quae exponit Celeberr. *Petrus van Muſſchenbroek* in *Tentaminibus Experimentorum Naturalium Academiae del Cimento*, *pag.* 10. *ſeqq.* et quod ipſum a ſingulari huius Viri perſpicaciſſimi in me beneuolentia ſum adeptus. Locatum vero illud obſeruo in aëre libero, ſed vmbroſo, qui ab omni calore peregrino remotus eſt, excepto paculo aliquo, qui in diebus aeſtiuis, ſummo mane, ad illud a ſole allabitur, nulla mihi cura euitandus. Huius itaque vtriuſque inſtrumenti fide ſequentia, quae annotaui, conſtant.

§. 2. Notaui igitur Barometri altitudines maximas et minimas in ſingulis menſibus anni 1745. ex quotidianis obſeruatis, ſequentes, quas vna cum vtriuſque differentia huic tabellae includo.

	max.	min.	diff.
Ianuarius	29. 36	28. 60	0. 76
Februarius	29. 30	28. 14	1. 16
Martius	29. 30	28. 03	1. 27
Aprilis	28. 94	28. 08	0. 86
Maius	28. 68	28. 03	0. 65
Iunius	28. 79	28. 10	0. 69
Iulius	28. 75	28. 21	0. 54
Auguſtus	28. 71	28. 30	0. 41
September	29. 04	28. 41	0. 63
October	29. 08	28. 41	0. 67
Nouember	28. 98	27. 80	1. 18
December	29. 07	28. 03	1. 04

§. 3.

§. 3. Ex his Barometri altitudinibus apparet, maximam earum hoc anno fuisse 29. 36. quae visa fuit Ianuarii 2, hora 7 *p. m.* coelum nubibus continuis occupantibus, et insequente vento fortissimo SW diebus aliquot succedentibus, quibus delapsus subito iterum est mercurius. Minima autem harum altitudinum fuit 27. 80. quae accidit Nouembris 26. circa horam 5 *p. m.* quo ipso solo die mercurius repente et decidit, atque iterum ascendit, in tempestate dubia pluuias inter et serenitatem, insequente iterum satis forti SW vento, sed variabili, et niue, quae prima huius hyemis in remotis montium iugis conspicua nobis fuit. Harum duarum altitudinum differentia est 1. 56, vt adeo media Barometri eleuatio apud nos hucusque aestimanda sit 28. 58, nulla habita instrumenti supra *Nicri* fluuii ripam eleuati ratione, quae, vti modo dictum est, 60 pedes adaequat.

§. 4. Ex his iam primis harum obseruationum initiis duo consequuntur. Primum, Barometri variationem annuam hic loci esse multo minorem, quam est *Petropoli*. Nam cum *Petropolitana* haec variatio inuenta sit, nouendecim annorum intervallo 2. 77. vid. *Commentar. Petropol.* Tomus IX, pag. 359; haec nostra *Tubingensis* non est nisi 1. 56. vnius quidem anni spatio definita, sed sine dubio prope tamen veram constituta. Secundum, Barometri variationes menstruas in primis et vltimis anni mensibus esse maiores quam in mediis, si solum Ianuarium excipias: qui vero ab initio admodum fuit tepidus, donec in sui medio ad summum frigus subito descenderet;

ita vt omnia illa his obſeruationibus confirmentur, quae in *Commentar. Petropol.* Tomo IX, pag. 325. aſſerui.

§. 5. Ex obſeruationibus Thermometri, in äere vmbroſo Boream verſus conſtituti, ſequentem formo tabellam, quae cuiusque menſis exhibet gradum caloris maximum, minimum, atque differentiam vtriusque, ita quidem, vt, quoniam gradus *Fahrenheitiani* numerantur ab 0, ſurſum et deorſum inſcripti, illos qui ſunt infra 0 denotem ſigno negationis in Algebra recepto; adeoque — 13 ſignificat gradum 13. infra 0.

	calor max.	min.	diff.
Ianuarius	45	— 13	58
Februarius	47	8	39
Martius	67	— 5	72
Aprilis	72	32	40
Maius	76	42	34
Iunius	85	48	37
Iulius	89	48	41
Auguſtus	87	50	37
September	85	41	44
October	71	28	43
Nouember	51	21	30
December	45	10	35

Vnde apparet, maximum calorem huius anni fuiſſe 89 graduum, qui incidit in diem 8 Iulii, in qua ſerenitas aliquot dierum ſubito mutata fuit in grauiſſimas fulminationes, die 9 inſequenti denuo recurrentes, ſine vllo vento. Minimus vero calor, hoc eſt, maximum frigus, gra-

gradum tenuit 13 infra 0, quod debetur diei 21 Ianuarii, quae intenſiſſimum et rarum his terris frigus ſentiendum nobis praebuit, in ſerenitate perfecta, nebulis autem quandoque permixta, flante tenuiſſimo Euro. Idem hoc frigus, eodem gradu et die, obſeruatum quoque eſt *Stuttgardiae.* Sed *Petropoli* aliter ſe haec res habuit, vti ex obſeruationibus menſis Ianuarii ab *Imper. Scientiar. Academia* mecum communicatis perſpicio; ibi enim per dies Ianuarii 12. 13. etc. vſque ad 20. frigus vehemens erat, graduum circiter 8 et 0; ſed ipſo die 21 erat remiſſius, nempe graduum 20; quibus itaque diebus ceſſauit ibi frigus: his iisdem coepit apud nos oriri; ita vt fere materia quaedam mota ex illa regione in noſtram produxiſſe id videatur. *Stuttgardiae* autem experimenta capiente Celeberr. Dom. D. *Iob. Georg Du Vernoi* die eodem 21. Ian. ſequentes liquores, āeri libero expoſiti, congelati fuerunt; vinum album tempore 15. min. prim. vinum Burgundicum in 20. min. Spiritus autem frumenti poſt 12 demum horas frigore coagulari coepit.

§. 6. Addam his comparationes quasdam frigoris et caloris *Petropolitani*, in climate valde iam boreali, obſervatorum, cum iisdem in climate noſtro temperatiori. Ibi quidem ſolis radii, libere ad Thermometrum allabentes, in diebus aeſtiuis et calidis, horisque poſtmeridianis 2. et 3. nunquam altius mihi hoc adegerunt, quam ad gradus *Fahrenh.* 103; heic loci autem iidem radii liberi ſuſpenſum mercurium tenuerunt ad gradus 102. Maximum frigus hucuſque *Petropoli* inſtrumentis in āere libero *Obſeruatorii Imperialis* ibidem expoſitis deprehenſum fuit an-

no

no 1740. Ianuarii 25 ſt. v. graduum 30 infra 0; atque paullo minus anno 1733. Ianuarii 16 ſt. v. 28½ infra 0; *Tubingae* autem frigus, quod die 21 Ian. huius anni 1745. ſenſimus, maxime inſolens viſum incolis, non erat niſi eorundem graduum 13 infra 0. Porro *Petropoli* calorem aëris vmbroſi maiorem nunquam obſeruaui quam 83 graduum: hic vero hoc anno 89 graduum.

§. 7. Lucem borealem, inter nubes quaſi ludentem, obſeruaui in fine praecedentis anni 1744, Nouembris 25, hora 9 nocturna. Deinde anni huius die 2 Iunii, quo nempe ex aliquot tenuibus nubeculis albicantibus, Boream verſus poſitis, ſubito extinctis atque iterum accenſis, lucem borealem viſus ſum agnoſcere, hora 10 *p. m.* in ſerenitate perfecta. Denique Decembris 29 aurorae borealis veſtigia diſtincta apparuerunt *inter* nubes hinc et inde valde hiantes hora 9 nocturna. Ianuarii vero 18. huius anni 1745, quo die integro nubibus tectum hic fuit coelum, ſupra laudatus D. D. *Du Vernoi Stuttgardiae* auroram obſeruauit borealem, quae arcum pallidiorem efformare videbatur.

§. 8. Adiiciam his obſeruationes adhuc duas a me factas hoc anno. Nempe Auguſti 12 profectus ſum ad viſendum ſpecum illum prope *Reutlingam* haud incelebrem *Das Nebel-Loch* dictum, qui ſupra medium iugi alicuius montium editorum aditum ſui aperit inter ſyluas, ab initio decliuis valde eſt, ſed dein horizontaliter fere ſub terra protenditur ad diſtantiam aliquot centenorum paſſuum. In vltimis igitur huius ſpecus partibus Thermometrum eo mecum allatum oſtendebat gradus 48, quos calori

calori moderato et temperato assignat hodie in his instrumentis artifex celebris Amstelodamensis supra laudatus, *Henr. Prinz*, secutus *Fahrentheitium*; cum in ingressu atque egressu specus idem monstraret, die quippe aestuosa et serena, gradus 66. In eadem vero hac parte specus postica peluis lapidea est, in qua colliguntur aquae destillantes circumquaque, limpidissimae, quod in calice vitreo faci admoto cognoui, purissimae, sed gradum caloris tenentes non nisi 42. Quem defectum huius caloris ab illo, qui aëri circumfluo inhaeret 48 graduum nulli alii caussae adscribere possum, quam quod haec aqua a pluuiis orta, sed transiens deinde et transsudans per satis magnam soli crassitiem variis salibus referti, haec soluit continuo, et secum aduehit vsque in peluim, ita vt haec aqua non aliter consideranda sit, ac si perpetuo aliquid salis ipsi iniiceretur, ex cuius solutione hanc suam refrigerationem recipit.

§. 9. Secunda obseruatio spectat ad directionem acus magneticae. Hanc 6 pollices longam, pyxidi suae incluſam, libero in aëre fixe positam, constitui ad parietem lapideum feneſtrae alicuius in *Collegio Illustri*, palatio ex lapidibus quadratis constructo, Boream versus vtcunque expositae; huiusque acus declinationem, non veram quidem, sed qualem respectu parietis lapidei habebat, deprehendi per multos dies fuisse praecise 11 graduum. Cum vero d. 31 Augusti huius anni 1745 tonitrua vehementissima toto die audirentur, conspicerenturque fulgura frequentissima: vidi hora 3 p. m. hanc declinationem acus magneticae subito mutatam in 10° 45′; de qua mutatione cer-

tus plane ſum; eamque eo magis adſcribo fulminationibus illius diei creberrimis, quia de eodem hoc phaenomeno iam conſtat ex *Iournal des Savans*, tom. V. pag. 74; atque ex Celeberr. *Petri van Muſſchenbroek* Diſſertatione de Magnete, Exper. 106. ſed ſimul obſeruationes *Grahami* in *Tranſact. Philoſoph. Angl.* No. 383. teſtantur, eandem hanc declinationem, ſi exacte ad eam attendatur, ſingulis horae quadrantibus mutatam aliquot minutis primis deprehendi, in tempeſtate etiam ordinaria et ſtatu aëris quieto.

OBSER-

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE, FACTAE An. 1746. TVBINGAE,

a

G. W. KRAFFT.

§. 1.

Barometro atque Thermometro iisdem, eodemque adhuc modo disposítis et constitutis, quem in descriptione obseruationum meteorologicarum superioris anni indicaui: obseruatae mihi fuerunt hoc praesenti anno, in singulis mensibus, altitudines Barometri maximae et minimae sequentes, quas, vna cum earumdem differentiis, hic appono; intelligendo pedis Londinensis pollices duodecimales, atque eorumdem partes centesimas;

	max.	min.	diff.
Ianuarius	29. 18	27. 95	1. 23
Februarius	29. 15	28. 10	1. 05
Martius	28. 89	27. 65	1. 24
Aprilis	28. 65	27. 98	0. 67
Maius	28. 94	28. 30	0. 64
Iunius	28. 76	28. 20	0. 56
Iulius	28. 80	28. 41	0. 39
Augustus	28. 87	28. 41	0. 46
September	29. 00	28. 33	0. 67
October	28. 88	28. 16	0. 72
Nouember	29. 00	28. 02	0. 98
December	29. 04	27. 93	1. 11

§. 2. Ex quibus apparet, altitudinem Barometri hoc anno fuisse maximam 29. 18, minimam vero 27.

 65,

65. manet itaque altitudinum hucusque hic loci obseruatarum adhucdum maxima illa, quae superiori anno annotata fuit, nimirum 29. 36; sed mutanda est superioris anni obseruata minima altitudo, quae nunc habetur 27. 65. et visa fuit huius anni mense Martio, die 3. circa meridiem, flante fortissimo vento S W. et cadente copiosa pluuia. Prioris igitur maximae, et huius nouae iam minimae, differentia est 1. 71; vt adeo media Barometri altitudo apud nos nunc aestimanda sit 28. 50½. nulla habita instrumenti, supra *Nicri* fluuii libellam eleuati, ratione, quae, vti in praecedentis anni descriptione dictum fuit, 60 pedes adaequat.

§. 3. Ex obseruationibus Thermoscopii, in aëre vmbroso Boream versus, constituti, sequentem iterum formo tabellam, quae cuiusque mensis exhibet gradum caloris maximum, minimum, atque differentiam vtriusque, ita quidem, vt vbique sint intelligendi gradus *Fahrenheitiani*;

	max.	min.	diff.		max.	min.	diff.
Ian.	50	9	41	Iul.	94	54	40
Febr.	51	−3	54	Aug.	85	47	38
Mart.	60	14	46	Sept.	82	44	38
Apr.	67	31	36	Oct.	66	30	36
Maius	83	48	35	Nov.	48	24	24
Iun.	75	52	23	Dec.	49	28	21

Ex quibus constat, maximum calorem aestatis huius, longe lateque per totam Europam feruentissimae fuisse hic loci 94 graduum, qui incidit in diem 15 Iulii, quo ipso etiam vehemens, sed breuis, tempestas coorta fuit. Minimus vero calor, siue maximum frigus, gradum

dum tenuit 3 infra 0, quod ſenſimus die 15 Febr. in ſerinitate, quam tenuis nebula paullo diminuit.

§. 4. Quas aurorae borealis apparitiones vidi: eas ſequentibus abſoluam. *Ianuarii* 31 circa horam 10 p. m. veſtigia mihi huius viſa ſunt, ſed dubia, quoniam luna nubibus permixta lucebat. Similis ſuſpicio mihi oblata quoque fuit *Febr.* 4, circa horam 7 p. m. inter nubes et pluuias. Poſtea interquieuit plane ſplendor hoc ſeptentrionalis, quantum ego quidem obſeruare potui, vſque ad diem 22 *Octobr.* in quo cum nubes continuae, ac pluuiae rarae, eſſent: obſeruaui tamen hora 10. p. m. diſtincte auroram borealem, inter nubes fere continuos delitescentem, nullo vento flante, conſtantem, arcu tranquillo, lucido verſus boream, ſed multis faculis ludentem quoque verſus auſtrum; donec eadem haec aurora circa horam 11 inciperet formare arcum aliquem humilem, ſubdubium, ſed mihi tamen viſum declinantem aliquantum ab auſtro ad ortum. Rediit haec aurora die ſequenti, *Octobris* 23, ſed deſtituta vtroque arcu, in qua boream verſus apparebat ſola aliqua illuminatio indeterminata. Vtroque die nullae videbantur ſtellae. *Die* poſtea 24 denuo deprehendi ſigna quaedam huius lucis inter nubes continuas; *die* 26 non potui vacare obſeruando huic phaenomeno, ob negotia; ſed certiorem me reddidit Clariſſ. Dom. M. *Biſchoff*, vicinae nobis eccleſiae Bernhuſanae tum temporis Vicarius, viſam ſibi hoc quoque die fuiſſe auroram valde amplam et diffuſam; cuius deinde adhuc veſtigia clara denuo deprehendi *die ſequenti* 28. Ita haec continua, per aliquot dierum interualla, appa-

ruit coeli deflagratio. *Nouembris* 10, rursus inter nubes, visa mihi fuit clarissime lux borealis, ludens septentriones versus globis lucidis, et saepius transuersim motis. *Nouembris* 20 iterum apparuit lux borealis lucida, humilis et tranquilla. Sed *Decembris* 7 alia, diffusa et coruscans; quam apertam secuta sunt vestigia tantum aliqua die 18 *Decembris*; et quarum omnium agmen quasi clausit vltima, die 24 Decembris, quae hora $7\frac{1}{2}$ p. m. inter tenues nubeculas, septentriones versus positas, magnis illuminationibus aperte se prodidit.

§. 5. Appendicis loco commemorabo hic phaenomenum, quod summo iure huc referri meretur atque accenseri maxime memorabilibus. Excerptum illud est ex libro illustri, Russica lingua conscripto, cuius in linguam Germanicam versi titulus est, *Geschichte des Osmannischen Reiches, durch Demetr. Cantemir, Fürsten der Moldau.* In huius folio 364, sub Osmanno II. §. 3, leguntur sequentia verba: *sub imperio huius Imperatoris apparuit Constantinopoli insolens meteorum, quale nunquam antea visum fuit, neque forsan vnquam visura est subsequens aetas. Anno* 1029, *die* 28 *mensis Rebiul aerwel, conspiciebatur coelo gladius incuruatus, lanceae longitudinem quinquies sumtam adaequans, et latitudinem tenens trium pedum. Porrigebatur illud ab oriente occidentem versus; apparebat post occasum solis, in splendore claro, per interuallum integri mensis.* Annus indicatus, Turcicae aerae, est annus post Christum natum 1620, mensis autem et dies indicant in Calendario veteri Iuliano diem 22 Februarii. Ex quibus circumstantiis manifestum est, nihil aliud fuisse descri-

ſcriptum hoc prodigium, quam lumen *Caſſinianum*, inſolito quodam fulgore apparens. Nam conſpici hoc quandoque ſolet inſtar falcis, ad modum gladii incuruati; vid. Celeberr. *De Mairan, Traité de l'Aurore Boreale*, pag. 22; longitudinem tenet multo maiorem, quam eſt ipſius latitudo, et, quod omnem probabilitatem ſummo rigore adimplet, extenditur in Februario menſe ab oriente verſus occidentem, ſi incipias progredi viſu a cuſpide ad baſin ipſius; ac denique, quod caput eſt rei, eodem menſe praeſens ſe ſiſtit poſt ſolis occaſum. Si in hac igitur deſcriptione remoueamus ab animo ſimilitudinem haud plane ineptam, et genti, apud quam viſum eſt eo tempore phaenomenum, familiarem et vſitatam; ſi omittamus quoque menſuram, non aſtronomica accuratione, ſed vulgi trepido iudicio, captam: videbimus planam et ſimplicem deſcriptionem, non prodigii alicuius, ſed meteori in curſu naturae ordinarii, nempe lucis *Caſſinianae*; cuius adeo Epocha, quantum ex certis hiſtoriis conſtat, retrahenda nunc erit ad annum Chriſti 1620, quam alias affigere ſolent anno Chriſti 1659.

DE QVAN-

DE QVANTITATE CALORIS, QVAE POST MISCELAM FLVIDORVM, CERTO GRADV CALIDORVM, ORIRI DEBET, COGITATIONES,

AVCTORE
G. W. Richmann

Praelecta in conuentu Academico Clariſſ. Krafftii diſſ. de calore et frigore, formulam, quam ingenioſe invenit ad quantitatem ſiue gradum caloris mixtorum fluidorum determinandum, examinans reuocaui ſimul in memoriam, quae olim de hac materia meditatus ſum. Euolui ergo ſcripta mea et collectanea, et inueni formulam, quam cognoſcendae quantitati caloris *in mixto* aptam iudicaueram, ſi modo rite conſtructum thermometrum adhiberetur. Statim comparaui eam cum Clariſſ. Krafftii, atque ad caſus in diſſertatione ipſius adductos adplicaui, vidique maiores oriri gradus calorum ſecundum meam formulam, quam ſecundum Clariſſ. Krafftii, ſimulque a gradibus thermometro inuentis multum abludere debere; rem ergo totam negligendam, curioſitatis tamen gratia antea inquirendum putaui, qua via in formulam inciderim. Quod cum propter ſimplicitatem ſtatim apparebat ſimulque formula rationi valde conformis videbatur, apud me conſtituebam eam cum ſocietate communicare, quod ſequentibus faciam.

§. 1. Concepi calorem fluidi certae temperiei diſtributum aequaliter per totam maſſam fluidi, et ſimul cogitaui

cogitaui, ſi idem caloris gradus per duplam triplam quadruplam etc. maſſam diſtributus eſſet, calorem hinc generatum eſſe debere prioris ſubduplum, ſubtriplum, ſubquadruplum etc. et ingenere calorem eundem eſſe in ratione inuerſa maſſarum, per quas diſtributus eſt.

§. 2. Ponatur ergo

1) Maſſa fluidi $= a$, calor diſtributus per hanc maſſam $= m$, alia maſſa, per quam idem calor m maſſae (a) diſtribui debet, ponatur $= a + b$, erit calor hinc generatus $= \frac{am}{a+b}$ per (§ 1).

2) Per maſſam b praeterea calor $= n$ ponatur diſtributus, diſtribuatur idem calor n pariter per maſſam $a + b$, per quam iam calor m maſſae (a) diſtributus concipitur, erit calor, a calore n per maſſam $a + b$ diſtributo, ortus $= \frac{bn}{a+b}$ (per § 1.)

3) Tali ratione calor maſſae $(a) = m$ et calor maſſae $(b) = n$ aequaliter diſtribuuntur per eandem maſſam $a + b$; et calor in hac maſſa, ſiue in mixto ex (a) et (b), aequalis eſſe debet ſummae calorum $m + n$ diſtributorum per maſſam $a + b$, ſiue $= \frac{ma+nb}{a+b}$ (per n. 1 et 2).

§. 3. Vt formulam generalioris vſus obtinerem, ex qua etiam gradus caloris determinari poſſet, ſi tres, quatuor, quinque etc. maſſae eiusdem fluidi diuerſo gradu calidae miſcerentur, nominaui maſſas eas a, b, c, d, e etc. et calores reſpondentes m, n, o, p, q, etc. et ſimili plane modo concepi quemque calorem per ſummam maſſarum omnium diſtributum, $e:g$: calorem maſſae $(a) = m$ diſtributum per maſſas $a + b + c + d + e$ etc.

$= \frac{am}{a+b+c+d+e}$ etc. (per § 2). Calorem maſſae b, $= n$, diſtributum per eandem ſummam maſſarum $= \frac{bn}{a+b+c+d+e}$ etc. calorem maſſae $c = 0$, etc: $= \frac{co}{a+b+c+d+e}$ etc. calorem maſſae d, $= p$, etc: $= \frac{dp}{a+b+c+d+e}$ etc. calorem maſſae e, $= q$ etc: $= \frac{eq}{a+b+c+d+e}$ etc. et calorem poſt miſcelam omnium maſſarum calidarum $= \frac{am+bn+co+dp+eq}{a+b+c+d+e}$ etc. i. e. ſumma maſſarum fluidi, per quas calor ſingularum maſſarum in mixtione aequaliter diſtribuitur, eſt ad ſummam omnium factorum ex maſſis ſingulis in ſingularum maſſarum calores, vt vnitas ad calorem in mixto.

§. 4. Si nunc thermometrum adhibetur ad calorem mixti menſurandum, primo gradus caloris ebullientis aquae ponitur 212 gr. et ſecundo calor niuis vel glaciei cum ſale ammoniaco mixtae 0, tertio exceſſus calorum fluidorum examinandorum ſuper 0 ponuntur proportionales altitudinibus mercurii in thermometro, quae oriuntur inſtrumento fluidis examinandis immerſo, et menſurandi initio facto à 0: reuera igitur exceſſus caloris ſupra calorem glaciei cum ſale ammoniaco mixtae notantur et ſecundum formulam allatam, ſi thermometrum Fahren: adhibetur, inuenitur exceſſus caloris mixti ſuper gr. 0 Therm. Fahr: non verus calor.

§. 5. Cum mixtum aliquod dicta ratione in vaſe examinandum eſt, facile patet,

1) Calorem mixti non ſolum diſtribui per propriam maſſam, ſed etiam per vaſis parietes et thermometrum ipſum.

2)

2) Thermometri ipſius et vaſis calorem diſtribui per mixtum, per vaſis parietes, in quo fit mixtio, et thermometrum.

3) partem caloris mixti per interuallum temporis, in quo fit experimentum, tranſire in liberum aerem, vbi, quemadmodum in Clariſſ. Krafftii experimentis de calore et frigore ſtabilitur, calor ex fluido eo tardius aufugit, quo magis accedit calor fluidi ad calorem atmoſpherae ambientis. Si temporis tamen interuallum, per quod fit experimentum, minus eſt, decrementum caloris ex hac cauſa praeſertim in maſſis maioribus examinandis inſenſibile eſſe debet; hinc negligi poteſt in calculo.

§. 6. Si circumſtantiae § praeced. *n.* 1. 2, in maſſis examinandis minoribus negligantur, fieri poteſt, vt gradus thermometro inuenti non concordent cum formula allata, quae vnice exprimit calorem mixti ortum ex caloribus omnium ingredientium diſtributis per omnium ingredientium maſſas aequaliter. Cum enim calor etiam thermometro et vaſi communicatur et per illa diſtribuitur, licet non mixtio fiat, maſſa etiam thermometri et vaſis in formula eſt exprimenda et poſito per maſſam vaſis et thermometrum etiam aequaliter diſtribui calores, erit, poſitis vt ſupra maſſa vna $= a$ maſſa altera $= b$ maſſa thermometri $= c$, maſſa vaſis $= d$, calore maſſae a, $= m$, calore maſſae b, $= n$, maſſae c, $= o$, maſſae d, $= p$, ſumma calorum, m, n, o, p, diſtributorum per ſummam maſſarum a, b, c, d, $= \frac{am+bn+co+dp}{a+b+c+d}$ = gradui caloris, quem thermometrum oſtendere debet, ſi mixto immergitur, verus autem mixti calor,

qui iacturam non patitur, ſuperare debet calorem thermometro indicatum quantitate $\frac{am+bn}{a+b} - \left(\frac{am+bn+co+dp}{a+b+c+d}\right)$.

§. 7. Hic mihi videor aſſecutus eſſe primariam rationem, cur mea formula non concordet cum Clariſſ. Krafftii, ipſius enim formula exprimit calorem thermometri ſui et vaſis, in quo maſſas fluidi miſcuit et maſſarum ipſarum, diſtributum per ſummam maſſarum fluidorum mixtorum, thermometri et vaſis, mea vero caloris gradum ortum ex caloribus vtriusque ingredientis mixti, diſtributis per maſſam mixti.

§. 8. Vt comparari poſſint gradus calorum in mixtis thermometro inuenti cum numeris graduum per formulam Clariſſ. Krafftii et meam computatis, tabulam hic apponere liceat, notando ſimul quantum calculus vterque diſcrepet ab experimentis ipſius in diſſertatione de calore et frigore communicatis.

In columna I. ſunt numeri, qui indicant, quota menſura affuſa ſit? vel etiam maſſam mixti.

In columna II. ſunt numeri, qui indicant gradus caloris mixti ſecundum formulam Clariſſ. Krafftii computatos.

In columna III. ſunt numeri, qui indicant, quantum gradus calculi ipſius diſcrepent a gradibus thermometro inuentis.

In

In columna IV. ſunt gradus thermometro a Clariſſ. Krafftio inuenti.

In columna V. ſunt numeri, qui indicant, quantum gradus, thermometro inuenti à Clariſſ. Krafftio, differant a gradibus calculi mei.

In columna VI. exſtant gradus calculi mei.

In columna VII. ſunt gradus ſec. formulam meam (§ 6) computati, aſſumtis maſſa vaſis vnius menſurae et maſſa thermometri dimidiae menſurae, calore vero vtriusque poſito aequali calori ingredientis minus calidi: menſura vero vna poſita eſt a Clariſſ. Krafftio in ipſius experimentis de calore et frigore vnius et dimidii pollicis cubici.

In 1. Tab. ſumſit Clariſſ. Krafftius quatuor menſuras aquae ad gr. 42. calidae et affudit eis quintam aquae ebullientis, examinatoque per therm: calore, 5 menſuris ſextam.

In tab. 2. ſumſit menſuras 20. ad gr. 38 calidas et affudit eis 2. menſ. aquae ebul. examineque facto 22 menſuris 2. addidit ect.

	C. I.	C. II.	C. III.	C.IV.	C. V.	C. VI.	C. VII.
Tab. I.	5	68. 12	0. 12	68	8. 00	76. 00	68. 15
	6	86. 28	1. 28	85	7. 00	92. 00	87. 20
	7	98. 73	0. 73	98	5. 14	103. 14	99. 88
	8	108. 73	1. 73	107	5. 25	112. 25	110. 00
	9	115. 75	2. 75	113	5. 66	118. 66	115. 62
	10	120. 42	2. 42	118	4. 90	122. 90	121. 48
	11	124. 37	1. 37	123	3. 54	126. 54	125. 46
	12	128. 52	0. 52	128	2. 42	130. 42	129. 59
	13	132. 80	2. 80	130	4. 46	134. 46	133. 80
	14	134. 34	0. 34	134	1. 85	135. 85	135. 61
Tab. II.	22	49. 80	2. 20	52	1. 82	53. 82	52. 00
	24	61. 92	0. 08	62	3. 33	65. 33	63. 85
	26	70. 58	1. 42	72	1. 54	73. 54	72. 34
	28	79. 42	0. 58	80	2. 00	82. 00	81. 03
	30	86. 52	−1. 52	85	3. 80	88. 80	88. 00
	32	90. 87	0. 13	91	1. 94	92. 94	92. 25
	34	96. 26	0. 74	97	1. 12	98. 12	97. 54
	36	101. 72	1. 28	103	0. 39	103. 39	102. 90
	38	107. 24	0. 76	108	0. 74	108. 74	108. 32
	40	111. 83	−0. 83	111	2. 20	113. 20	112. 86
	42	114. 55	0. 45	115	0. 81	115. 81	115. 49
	44	118. 25	−1. 25	117	2. 41	119. 41	119. 13
	46	120. 04	−1. 04	119	2. 13	121. 13	120. 88
	48	121. 85	0. 15	122	0. 87	122. 87	122. 64
	50	124. 65	−0. 65	124	1. 60	125. 60	125. 39
	52	126. 49	−1. 49	125	2. 38	127. 38	127. 20
	54	127. 37	−1. 37	126	2. 22	128. 22	128. 05
	56	128. 25	−0. 25	128	1. 07	129. 07	128. 92
	58	130. 13	−1. 63	128½	2. 37	130. 87	130. 26
	60	130. 54	−1. 54	129	2. 27	131. 27	131. 00

§. 9.

§. 9. Si tabulas has attentius conſideramus obſeruamus

1. gradus calorum thermometro inuentos in prima tabula minores eſſe ſemper gradibus per formulam Clariſſ. Krafftii et meam inuentis, in ſecunda vero tabula decem experimenta eos oſtendere maiores, decem reliqua experimenta minores quam gradus per formulam ipſius repertos, ſemper vero minores gradibus ſecunduum formulam meam computatis.

2.) Comparatis gradibus calorum tabulae I. ex formula Clariſſ. Krafftii computatis cum gradibus Thermometro inuentis differentiae graduum iſtorum non decreſcunt, ſed modo creſcunt modo decreſcunt. Comparatis vero gradibus Tab. I. ex formula mea deductis cum gradibus Thermometri differentiae tantum non ſemper decreſcunt voluminibus mixti creſcentibus: experimentum tamen nonum nimis aſſertioni contrariatur, vt etiam propter hanc diſparitatem mihi conjectura ſubnaſcatur, nouam ſe experimento immiſcuiſſe circumſtantiam, quae variationis huius cauſa fuit.

3.) In tabula ſecunda nec differentiae graduum, ex formula mea nec ex Clariſſ. Krafftii computatorum a gradibus thermometro inuentis, voluminibus creſcentibus decreſcunt, ſed modo creſcunt modo decreſcunt.

4.) Gradus in Tab. 1 ſec. Clariſſ. Krafftii formulam computati non tantum differunt a gradibus Thermometro inuentis, quam ſecundum meam formulam computati, at ſi Thermometri et vaſis ſimul habetur ratio, parua eſt differentia, vt collatis Col. VII. et III. IV. videre eſt.

5.)

5.) Varia in ſecunda Tab. experimenta magis reſpondent meo calculo, quam Clariſſ. Krafftii et ſi thermometri et vaſis ſimul habetur ratio, vt Col: VII. fit, etiam in caeteris experimentis calculus meus ad gradus experimentorum propius accedit, ac ſine hac conſideratione.

§. 10. Vt rationes horum phaenomenorum ob oculos ponamus, inquiramus, an in experimentis I. et II. dae tab. capiendis diſparitas quaedam occurrat, cui hae diſcrepantiae attribui poſſint? Quantum ego quidem perſpicere valeo, nullam aliam, vt iam ſupra ingenere monui, offendo diſparitatem, quam quod in experimentis Tab. I. minores fluidi maſſae adhibitae fuerint, in experimentis ſecundae tabulae maiores, vt ex comparatione numerorum Col. 1. ex I. et IIda Tab. patet. Maſſa mixti in experimento I. primae tab. eſt quinque menſurarum vel $7\frac{1}{2}$ digt. cub. Deinde in ſubſequentibus experimentis creſcit maſſa ſemper vna menſura, vt tandem in vltimo experimento fiat 14 menſurarum. Cum nunc thermometri et vaſis maſſa facile ſit $2\frac{1}{4}$ digit. cub. vel vnius et dimidiae menſurae, vt ſuppoſuimus (§. 8), in experimento primo calor mixti nonſolum diſtribuitur per quinque menſuras ſed etiam per vnam menſuram et eius dimidiam ſcil. vaſis et thermometri maſſam. Maſſa mixti in experimento I. ſecundae Tab. eſt viginti duarum menſurarum vel 33. digit. cub. in ſubſequentibus experimentis creſcit ſemper duabus menſuris, vt tandem in vltimo experimento fiat 60 menſurarum vel 90 digit. cub. In tantis maſſis calor non potuit tam ſenſibiliter in paruo temporis interuallo, quo experimentum fiebat, decre-

creſcere, parte exigua caloris per thermometrum et tenues vaſis parietes diſtributa, quam in minoribus maſſis Tab. I. In experimento I. ſecundae Tab. calor mixti in vaſe, thermometro immerſo, per 35¼ dig. cub. diſtributus fuerit neceſſe eſt, cum calor per mixti ſolius maſſam per 33 digitos cub: diſtribui debeat. Haec volumina differunt multo minori parte voluminis mixti ac reſpondentia volumina tabulae Imae, praeſertim primis experimentis, et idem notandum de ſubſequentibus experimentis. Hinc calor in experimentis Tab. I. plus a formula mea aberrare debuit, quam in experimentis Tabulae 2dae, in quibus minor caloris iactura; vt collata col. VI. Tab. I. cum col. VI, Tab. II. videre eſt.

Pone nunc Clariſſ. Krafftium in iis experimentis, quibus ad ſtabiliendam formulam vſus eſt, adhibuiſſe minores fluidi maſſas, quarum calor diſtributione per Thermometrum et vas decrementum pati debuit, certe thermometrum in iis experimentis minores gradus oſtendere debuit, quam oſtendiſſet, maſſis maioribus electis, quarum calor diſtributione tali decrementum tantum pati haud potuiſſet. Si nunc gradibus iſtis minoribus, qui vero mixti calori menſurando inſeruire haud poterant, ad formulam ſuam condendam Clariſſ. vir vſus eſt, ſemper per eam formulam minores inueniuntur gradus calorum quam par eſt, et nunquam, niſi maſſae fluidi parum differentes ab iis, quas adhibuit ad formulam ſuam ſtabiliendam, eligantur, thermometrum oſtendet gradus calorum ſec. formulam, ſed maiores, ſi maſſae maiores examinantur; cum tamen per naturam rei nunquam gradus thermometro inuenti gradus per veram formulam deter-

minatos ſuperare debent, ob decrementum caloris durante experimento. (Collato §. 6.)

§. 11. Ex hisce liquet (1 cur in multis experimentis Tab. II. adductis Thermometrum gradus oſtenderit maiores quam formula Clariſſ. Krafftii requirebat

2) cur in experimentis Tab. I. adductis Thermometron ſemper oſtenderit minores gradus, quam formula Cl. Krafftii requirebat, quia ſcilicet minores maſſas elegit non multum differentes ab iis, quibus vſus eſt ad experimenta, quae ad formulam ſuam condendam adhibuit.

3) Cur ſemper thermometron oſtenderit gradus minores in vtraque tabula, quam ſecundum formulam meam oſtendere debuiſſet, quia ſcil. formula mea exprimit verum vtriusque ingredientis calorem diſtributum per maſſam mixti, thermometrum vero calorem mixti cauſis recenſitis imminutum prodit. Hinc calculus col. VII. vbi ratio ſimul habita eſt thermometri et vaſis, parum differt ab experimentis.

4) Cur comparatis gradibus Tab. I. ex formula mea deductis cum gradibus Thermometri differentiae iſtorum graduum voluminibus creſcentibus tantum non ſemper decreſcant, quia ſcil. maſſis creſcentibus minor caloris iactura fieri debet. In gradibus ex Clariſſ. Krafftii formula deductis id non apparet, ſi comparantur cum gradibus Thermometri, indicio, quod iſta formula non exprimat verum mixti calorem, ſed calorem mixti poſt iacturam quandam factam: patet

5) cur in tabula 2da hoc non obſeruetur, quia ob maiores maſſas decrementa ex cauſis, quae in experimen-

mentis Tab. I. occurrunt, fiunt minoris momenti, quam caeteri errores, quibus cautiſſimus quisque obnoxius eſſe ſolet, et qui modo huic modo iſti experimento ſe immiſcent: patet etiam

6) cur in tabula 2da multa experimenta aeque meo calculo reſpondent, quam Clariſſ. Krafftii et quaedam magis meo quam ipſius, quia ob maiores maſſas iactura caloris in his experimentis interuallo temporis paruo, quo experimentum quodque durat, parua eſſe debet.

§. 12. Conſideratis his omnibus, cautiones nobis colligere poſſumus, quibus opus eſt, ſi eiusmodi experimenta rite inſtituere volumus.

1) rationem maſſae vaſis et thermometri habere debemus, calorisque, qui per vtramque maſſam diſtributus eſt.

2) maſſae examinandae, quae ſi minor eſt, diſtributione caloris per corpora, quae contingit e. g. vas in quo fit experimentum et thermometrum, inſignem caloris iacturam patitur.

3) temperiei aeris, in quo fit experimentum, quae, ſi frigidior, quam maſſae examinandae, pars caloris ex hac in aerem tranſit, quamdiu mercurii, in thermometro maſſae examinandae immerſo, contenti altitudo in calore maſſae examinandae praeualente creſcit, praeſertim cum maſſa mixti eſt minor, eaquepropter ſuperficies eius reſpectiue maior, hinc calori perdendo aptior.

4) Per Clariſſ. Krafftii experimenta in diſſ. de calore et frigore etiam ſtabilitur, calorem ex fluido eo tardius aufugere, quo magis accedit calor fluidi ad calorem

atmoſphaerae ambientis, hinc non inutile eſſe videtur nonſolum temperiem aeris, in quo fit experimentum, cognoſcere, ſed etiam interuallum temporis, per quod experimentum durat, vt hinc iudicare liceat, quantum caloris aufugerit. Si ratio huius momenti habeatur, coniectura probabili aſſequi poterimus rationem, cur in experimentis non decreuerint differentiae graduum thermometro inuentorum a gradibus calculi conſtanter voluminibus creſcentibus, vni enim experimento fortaſſis plus temporis inſumtum eſt quam alteri et in vltimis experimentis temperies mixti a temperie aeris plus receſſit, eaquepropter eodem temporis interuallo plus caloris aufugit ex hac cauſa, vt tali ratione in vltimis experimentis per hanc cauſam iactura caloris ſit maior, iactura ex diſtributione caloris per thermometrum et vas vero minor; quamobrem *decrementum* caloris in primis experimentis decremento caloris in vltimis aliquo modo aequale redditur.

5) Valde probabile mihi videtur differentiam oriri debere inſignem in experimentis huiusmodi, ſi frigidius fluidum calidiori affunditur, cum frigidius fluidum vt denſius ima petere debeat et calidius in frigidiori aſcendere, conſequenter miſcela celerius fieri, quam ſi calidius frigidiori affunditur, quo caſu ſimul plus caloris aufugere videtur ex ſuperficie aquae calidae ſuper aquam frigidam ſtagnantis. Haec adhuc poteſt addi ratio cur gradus thermometro ſint inuenti minores quam formula mea poſtulat. Hic etiam notandum, thermometrum ante peractam mixtionem et diſtributionem caloris, gradum oſten-

ſtendere poſſe vel minorem vel maiorem, prout in fluido ſuſtentatur.

6) Figura etiam vaſis, in quo fit miſcela variationis cauſa eſſe poteſt, ſi orificium eſt anguſtius, calor minus cito caeteris paribus aufugere debet. Si ſuperficies eſt maior reſp. maſſae fluidae examinandae, citius diſſipari debet calor caeteris paribus. Si vas in quo miſcela fit eſt ſphaericum et orificium vaſis quantum poſſibile anguſtum tardiſſime calor aufugere debet caeteris paribus: Figurae ergo vaſis etiam ratio venit habenda.

7) Denſitas tandem parietum vaſis variationem efficere poteſt, dum, quo denſiora ſunt corpora eo citius caeteris paribus conferant ad refrigeranda alia corpora.

8) Cum tandem thermometri ipſius capacitas calore augetur, dum vitrum expanditur, mercurius propter hocce capacitatis incrementum deſcendere debet et ſi hoc non fieret, altius eleuaretur. In gradu caloris ſuptuageſimo ſecundo ſec. Muſſchenbroekii Eſſai. de Phyſ. (p. 469) fluidum thermometri lineam vnam propter dilatationem vitri depreſſum fuit. Huius tamen rei ideo habenda non videtur ratio, quia dilatatio vitri in eadem ratione ferme fit in qua fit expanſio Mercurii in thermometro. Si tamen de vno et altero gradu ſermo eſt, non iniuria quaeritur, an dilatatio haec ſit plane contemnenda? cum nondum accurato examine conſtet, exactiſſime in ratione dilatationis vitri expanſionem Mercurii fieri.

§. 13. En quam multae cautelae adhibendae ſunt in experimentis hiſce rite capiendis. Exemplum hic ſe nobis offert inſigne, abſtractiones mathematicas in re-

bus phyſicis omni cura et quantum poſſibile eſſe fugiendas, circumſtantiasque omnes in ſingularibus caſibus attendendas. Neque mirum eſt cur calculi ſaepiſſime egregii nimia circumſtantiarum variarum accumulatione tantum non prorſus inutiles fiant. Ne tamen in noſtris experimentis tot cautelis opus habeamus,

Maſſa examinanda maior eſt eligenda, quo caſu in interuallo temporis, quo experimentum finiri poteſt, caloris decrementum erit inſenſibile et cautelae praeced. §. *n.* 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. euaneſcent.

§. 14. Generatim hic notari poteſt in experimentis phyſicis, in formulis, menſuris vel ponderibus vel potentiis incognitis detegendis inſeruientibus, tantum non ſemper pro cognitis eligendas eſſe maiores corporum menſuras, pondera vel potentias, quo caſu ſi in exceſſu vel defectu peccauerimus paululum in exprimendis cognitis per experientiam quantitatibus, quod facile fieri poteſt, defectus ille vel exceſſus multiplicatus ſec. formulam non parit in determinatione incognitorum tantam à vero diſcrepantiam, quam ſi minores quantitates elegeris et eundem errorem in exceſſu vel defectu commiſeris.

Eiusmodi ergo leges ſeruabo, ſi nouis experimentis in temperiem mixtorum inquiſiuero, quod nunc, quia inſtrumentis commodis careo, differre cogor, breui tamen exequi animus eſt ad cogitationes meas de calore et frigore mixtorum perficiendas et ad formulam meam de calore mixtorum à poſteriori confirmandam.

§. 15. Coronidis loco apponere liceat duo ſequentia problemata ex mea formula facile poſſe reſolui.

I.

I. Data maſſa fluidi $= a$, datae temperiei $= m$, et data temperie n homogenei fluidi inuenire maſſam x, quae mixta cum maſſa data $= a$ producit calorem datum $= c$. Eſt enim, formula ſuperiori poſita $\frac{am+nx}{a+x} = c$, $x = \frac{(c-m)a}{n-c}$.

II. Datis maſſis fluidi a, et b, et data temperie maſſae a, $= m$ inuenire temperiem x alterius b, quae mixta cum maſſa a producit temperiem datam $= c$. Eſt, poſita formula $\frac{am+bx}{a+b} = c$, $x = \frac{(a+b)c-am}{b}$.

* Licet ex §. 4 id patere poſſit, hic nihilominus monendum iudicaui, me per calorem et temperiem fluidi non intelligere verum calorem ſed exceſſum gr. therm. Fahren. ſuper o. Verorum enim calorum rationes nondum poſſunt aſſignari: ſi m eſt gradus thermometri maſſae a, verus calor eſt m addito incognito x, ſi n eſt gradus therm. maſſae b, verus calor eſt $n + x$, hinc mixti calor verus ſec. formulam datam $\frac{(m+x)a+(n+x)b}{a+b} = x + \frac{ma+nb}{a+b}$.

FORMV-

FORMVLAE PRO GRADV EXCESSVS CALORIS SVPRA GRADVM CALORIS MIXTI EX NIVE ET SALE AMONIACO POST MISCELAM DVARVM MASSARVM AQVEARVM DIVERSO GRADV CALIDARVM CONFIRMATIO PER EXPERIMENTA.

AVCTORE
G. W. Richmann.

§. 1.

Dedi formulam pro gradu exceſſus caloris ſupra gradum caloris mixti ex niue et ſale Ammoniaco poſt miſcelam duarum maſſarum aquearum diuerſo gradu calidarum an. 1744 d. 19. Oct. Vſus ſum experimentis Clariſſ. Krafftii ad formulam meam firmandam, nunc, quae ipſe experimenta huhc in finem inſtituerim cum ſocietate communicabo.

Experim. I.

§. 2. In vaſe fictili, in quo aqua ponderis 12 vnciarum ſtagnabat ad altitudinem 4 pollicum Londinenſium, et cuius orificii circularis aëri expoſiti diameter erat 3 pollicum ferme, calor à gradu (calore aëris ambientis exiſtente 66 graduum;) 128 ad gr. 67 quatuor horis decreuit, et quidem

in 5 minutis primis	a gr. 128	ad gr. 122.
10 - - - - - - -		116.
15 - - - - - - -		110.
20 - - - - - - -		108.
25 - - - - - - -		104.

in

in 30 minutis	primis	à	gr. 128	ad gr.	101.
35	- - - - - - - - - -				98.
40	- - - - - - - - - -				96.
45	- - - - - - - - - -				94.
50	- - - - - - - - - -				92.
55	- - - - - - - - - -				90.
60	- - - - - - - - - -				88.
65	- - - - - - - - - -				86.
70	- - - - - - - - - -				84.
90	- - - - - - - - - -				83.
110	- - - - - - - - - -				82.
135	- - - - - - - - - -				80.
165	- - - - - - - - - -				79.
200	- - - - - - - - - -				78. etc.

Experim. II.

In eodem vaſe fictili aqua in eadem altitudine ſtagnans, ad gr. 116 calida, caloris decrementum patiebatur in aëre gr. 67 calido et quidem.

à gr.	116	ad gr.	112.	minutis tribus	primis
- - - - - -			108	- - -	7
- - - - - -			104	- - -	12
- - - - - -			100	- - -	$18\frac{1}{2}$
- - - - - -			96	- - -	$26\frac{1}{4}$
- - - - - -			92	- - -	35.
- - - - - -			88	- - -	45.
- - - - - -			84	- - -	56.
- - - - - -			80	- - -	72.
- - - - - -			76	- - -	90.

Hora vna ergo et 30 minutis primis à gr. 116 ad gr. 76 peruenit aquae temperies, et qua discrepantia caloris aëris externi in primo experimento à calore aëris secundo experimento est parua, eodem tempore ferme ad gradum caloris eundem calor massae aqueae decreuit. Aquaque in vtroque experimento quatuor horis circiter calorem 67 gr. obtinuit.

Ex vtroque experimento cernimus, eo celerius calorem aufugere quo maior est differentia inter calorem aquae et aëris ambientis, vel calorem primis temporibus celeriter decrescere, posterioribus tardius: in qua ratione vero decrementa sint aequalibus temporibus et in qua ratione tempora sint, si decrementa sint aequalia, an in constanti, an variabili, non videtur determinari posse ex experimentis.

Experim. III.

In aëre ad gr. 66 calido, aquae ad gr. 64 calidae, ponderis 24 vnciarum, affudi massam aquae ponderis 12 vnciarum ad gr. 178 calidam et post miscelam obseruatus est gradus caloris 100.

Experim. IV.

Massa frigidiori ad gr. 88 calida aequali existente massae calidiori, ad gr. 172 calidae, gradus caloris post miscelam obseruatus est 126, calore aëris ambientis existente 66. gr.

Experim. V.

Massa frigidiori ad gr. 77. calida, mixta cum duabus calidioribus massis, massae frigidiori aequalibus, ad gr. 156. calidis, eodem existente aeris ambientis calore ac exp. praec. gradus caloris post miscelam obseruatus 126.

Ex-

Experim. VI.

Maſſis duabus frigidioribus ad. gr. 70 calidis, aequalibus maſſae ad gr. 148 calidae, et mixtis cum eadem, gradus caloris poſt miſcelam obſeruatus eſt 94, eodem adhuc exiſtente gradu caloris aëris ambientis.

§. 3. Si haec experimenta conſideramus et conferimus, maſſamque frigidiorem ponimus $= a$, maſſam calidiorem $= b$. Calorem maſſae $a = m$, calorem maſſae $b = n$, eſt gradus caloris poſt miſcelam

(1) $\frac{am+bn}{a+b}$ ſecundum formulam meam

(2) Clariſſ. Krafftius dedit formulam $\frac{11.am+8bn}{11a+8b}$.

(3) Celeberr. Boërhaue, aequalibus maſſis exiſtentibus, formulam ſuppeditauit $\frac{n-m}{2}$, conf. Pars I. Chymiae, exper. XX de igne, coroll. 11.

§. 5. Eſt itaque gradus caloris poſt miſcelam ſecundum Exp. ſec. form. I. ſec. form. II. ſec. form. III.

Ex. III.	100.	102.	$94\frac{2}{3}$.
Ex. IV.	126.	130.	$123\frac{7}{13}$ 42.
Ex. V.	126.	$129\frac{2}{3}$.	$123\frac{22}{27}$
Ex. VI.	94.	96.	$90\frac{4}{25}$.

§. 5. Ex experimento IV. collato cum formula Cell. Boerhauii elucet formulam illam veritati repugnare, cum affuſione calidioris ſec: illam frigidior reddi debeat aqua, quod impoſſibile eſt.

§. 6. Cum formula ſecunda ſemper det gradum minorem caloris, quam experimenta, formula illa licet verae ſit propinqua, nihilominus non poteſt haberi pro formula vera. Inter experimentum enim ſemper aliquid caloris aufugere debet et diſtribui in parietes vaſis. Al-

terum indicium imperfectionis eius est et quidem euidentissimum, quod

(1) In experimento quarto crescat calor plus quam experimento quinto, cum vtroque experimento calor non crescre sed aequaliter minui deberet sec: (Exp. I. II.); quod

(2) In experimento V. calor augeatur minus quam in experimentis VI. et III. cum sec. Exp. I. II. calor experimento V non augeri possit sed plus minui debeat, quam calor in experimentis VI. et III, si experimenta instituuntur aequalibus temporibus; quod

(3) In experimento VI. III. calores non solum crescant, sed etiam calor in experimento VI minus crescat, quam experimento III, cum sec: Exp. I. et II. aequaliter minui deberent calores, et si quaedam est differentia, calor experimento tertio paulo plus minui debeat, quam calor experim. VI.

§. 7. Cum formula prima semper det gradum caloris maiorem quam experimenta, vnum adest indicium praestantiae eius. Cum secundum experim. I. et II. plus caloris aufugere debuerit aequali tempore, in experimento IV et V quam experimento VI. et III. in experimentis VI. et III. vero aequales caloris gradus et haec omnia formulae primae respondeant, habemus secundum indicium euidentissimum perfectionis formulae primae. Experimento IV et V enim aufugerunt gradus quatuor circiter experimento VI. et III. duo. Contrarium obtinet vt iam monitum,

monitum, ſi attendimus ad formulam II, vbi experim. IV. creſcit calor 2 $\frac{12}{19}$ gr. experim: V. 2 $\frac{5}{17}$ gr. exp. VI. 3 $\frac{2}{17}$, in exp. III. 5 $\frac{3}{5}$ gr. Quod nullo modo fieri poteſt, cum calor aëris ambientis ſit minor, quam mixti. Hiſce credidi formulam datam $\frac{am+bn}{a+b}$ confirmari ſatis poſſe. Monere tantum liceat, me in experimentis recenſitis vſum fuiſſe duobus thermometris Mercurialibus, Fahrenheitianis, optime conſtructis ab artifice Amſtelodamenſi Prins, et reſpondentibus: pars thermometri capacior, quae aquae immergebatur erat conica, coni craſſities maxima erat quatuor ferme linearum Londinenſium et altitudo duodecim linearum, et non occupabat maius ſpatium, quam illud, quod aqua ponderis 30 granorum circiter occupare poteſt.

INQVISITIO IN LEGEM, SECVNDVM QVAM CALOR FLVIDI IN VASE CONTENTI, CERTO TEMPORIS INTERVALLO, IN TEMPERIE AERIS CONSTANTER EADEM DECRESCIT VEL CRESCIT, ET DETECTIO EIVS, SIMVLQVE THERMOMETRORVM PERFECTE CONCORDANTIVM CONSTRVENDI RATIO HINC DEDVCTA.

Auct. G. W. Richmann.

§. 1.

In confirmatione meae formulae pro gradu excessus caloris supra calorem mixti ex niue et sale Ammaniaco post miscelam duarum massarum aquearum diuerso gradu calidarum, in nota ad exp. II. dubitaui, an determinari possit, in qua ratione decrementa sint in aequalibus temporibus etc. Postquam vero attentius rem consideraui experimentaque omni solertia repetii et comparaui, similitudinem quandam in iis contemplatus incidi in legem, secundum quam decrementa fiunt. Cum haec plane noua sint et scientiae naturali sine dubio incrementum afferant, officii mei erit, ea, qualiacunque sint, cum societate communicare.

§. 2. Primo quidem, vt res clarissime pateat, experimenta exhibebo, compendii tamen causa, et vt facilius calculus cum obseruationibus conferri possit, statim adponam gradus caloris fluidi, diuersis temporibus, secundum legem inuentam erutos. Deinde ex obseruationibus consectaria deriuabo, quae mihi ad legem detegendam inseruierunt.

§. 3

§. 3. Ante omnia cum thermometris ipſis, quibus vsus ſum, periculum facere conſtitui, vt conſtaret quantum iis fidendum eſſet in obſeruationibus ſequentibus,

Experim. I.

Thermometrum primum erat mercuriale Fahrenheitianum ab artificie Amſtelodamenſi Prins rite conſtructum, cuius bulbus coniformis quartam partem circiter digiti cubici occupabat. Illud temperiem 64. gr. conſecutum in temperie aeris 40. gr.

poſt. 30. min. pr. oſtendebat gr. 42. Calc.
poſt. 60. min. pr. - - - - gr. 40. $40 + \frac{1}{3}$.

Exeperim. II.

Idem Thermometrum a gradu caloris quadrageſimo in temperie aeris 64. gr. oſtendebat

poſt 10. min. pr. gr. 50 Calc.
poſt 20. - - - 55 - - $55\frac{5}{8}$.
poſt 30. - - - 58 - - $59\frac{1}{4}$.
poſt 40. - - - 60 - - $61\frac{5}{8}$.
poſt 60. - - - 64 - - $63\frac{17}{111}$.

§. 4. Collato experim. I. et II. videre licet 1) decreſcere thermometri calorem a gr. 64 ad gr. 40. aeris ambientis eodem ferme tempore, quo calor thermometri a gr. 40 ad gr. 64. creſcit in temperie aeris 64. gr. i. e. *exceſſus caloris aeris ſuper calorem, quem thermometrum oſtendit, communicatur cum thermometro per idem tempus, quo perit in aere, qui temperiem habet, temperiei, quam thermometrum ab initio habebat, aequalem.*

2) Si

2) Si in thermometro mercurius in quinque minutis primis per gradum vnum mouetur â gr. 58 ad gr. 59, differentiam inter temperiem mercurii et aeris initio esse 6 gr. si vero in quinque minutis per gradus duos et dimidium â gr. 50 ad gr. 52½ mouetur, eam esse 14 graduum, et si quinque minutis per 1½ gr. mouetur mercurius dictam differentiam esse 9 graduum.

3) errorem committi saepius, si status aeris praesens resp. caloris ex gradu, quem thermometrum ostendit, iudicatur.

Experim. III.

§. 5. Alterum thermometrum, quo vsus sum, erat pariter Fahrenheitianum ab eodem artifice simili industria constructum et cum priori ferme concordans. Bulbus eius coniformis tamen minor erat bulbo prioris. In hoc thermometro mercurius in temperie aeris 67. gr. a gr. 25 in 3 min: ascendebat ad gr. 39. Calc.

- 6	- - - - - - - - -	49.
- 8	- - - - - - - 54	
- 9	- - - - - - - - -	54. 55.
- 12	- - - - - - - - -	58. 71.
- 13	- - - - - - - 60	
- 15	- - - - - - - - -	61. 47.
- 18	- - - - - - - 64 -	63. 31
- 23	- - - - - - - 65 ½	
- 24	- - - - - - - - -	65. 37.
- 33	- - - - - - - 67	67. 515.

§. 6. Si ergo mercurius in tribus minutis primis per 14. gradus mouetur, differentia inter temperiem eius et temperiem aeris initio est 42 gr. si in quinque min. prim.

prim.: per quindecim gradus mouetur, differentia dicta est initio 28. gr. si per 6 gradus, illa est 13 gr. si eodem tempore per 4. gr. illa est 7. graduum, si per $1\frac{1}{2}$, trium graduum.

Potest etiam temperies aeris semper differre a temperie mercurii. Pone temperiem mercurii 25 gr. et aerem etiam temperiei 25 graduum; pone mutari temperiem aeris et fieri 67. gr. mercurius incipiet ascendere et minuto primo temporis nondum absoluet quinque gradus. Pone mutari iterum aeris temperiem, vt fiat 0 — 12 gr. descendet iterum mercurius aequali celeritate (§4); pone rursus temperiem aeris tertio minuto primo mutari et fieri 67. gr. rursus mouebitur contraria directione et sic porro. Tali ratione differentia minima 37. gr. differentia maxima 42. gr. esse potest. Difficulter tamen crediderim tantum saltum in natura fieri, minorem tamen differentiam per aliquod interuallum temporis saepius conseruari, phaenomena qnaedam obseruata persuadent, vt credam.

Experim. IV.

§. 7. In temperie aeris, quae a gradu 62 ad gr. 66. crescebat durante experimento, $\frac{1}{10}$ partes librae aquae, in poculo vitreo conico, temperiei 38 graduum, obseruaui acquirere

	obseru.	calc.
post 8 min. prim. — — — gr.	40	
16 — — — — — —	— —	$41\frac{5}{6}$.
20 — — — — — —	43	—
24 — — — — — —	— —	$43\frac{57}{72}$.
25 — — — — — —	44	—
30 — — — — — —	45	—
32 — — — — — —	— —	$45\frac{49}{864}$.

		obſeru.	calc.
35	min. prim.	46	
40			46 1/2
45		48	
48			47 1/2
55		50	
56			49
64			50. 40
66		52	
72			51. 14
80		54	52
104			54 1/2
106		57	
112			54. 9
136			56. 5
140		60	
160			57. 11/16
180		62	

Experim. V.

Aqua temperiei 64. gr, in aere temperiei 40. et 39 gr. eiusdem quantitatis in vaſculo eodem conſequebatur

		obſ.	calc.
in 30	min. prim.	gr. 54	
60		50	48. 1/2
90		46	44. 760
120		44	42. 778
150		43	41. 620.
180		42	41
240		40	40. 900.

§. 9.

§. 9. Si ad experimentum quartum et quintum reflectimus, iudicatu facillimum est, aquam tardius adhuc gradum 62 et 40 affecutam fuisse, si temperies aëris constans mansisset scil. 62 et 40 graduum. Cum vero crescebat ibi a gr 62 ad gr 66. et hic a gradu 39 ad 40 et iterum decrescebat ad gr. 39, ibi aqua citius gradum 62 obtinuit, et hic citius gr. 40. Neque hic tacebo, vasa cum aqua aëri exposita contigisse ex parte alia corpora praeter aërem, de quorum temperie non potui esse certus. Si ad experim. I. II. et III. respicimus facile maiores mutationes aëris, thermometro vix indicandae, discrepantiam efficere potuerunt. Hoc in sequentibus etiam notandum.

Experim. VI.

§. Aquam eadem quantitate, Temperiei 141. gr. in eodem vase in aëre temperiei 63 gr. ad 65 obseruti acquirere

	obseru.	calc.
post 5 min. prim.	gr. 132	
10 - - - - - -	123 - -	124.
15 - - - - - -	116 - -	113. 70
20 - - - - - -	111 - -	110. 80
25 - - - - - -	104 - -	105. 30
30 - - - - - -	101 - -	100. 50
35 - - - - - -	98 - -	96. 25
40 - - - - - -	92 - -	92. 40
55 - - - - - -	86 - -	83. 60

Etiam hic vasculum cum aqua aëri expositum contingebat ex parte alia corpora, temperiesque aëris non per-

permanebat conſtans. Vt remedium aliquod afferrem ſequenti modo inſtitui experimenta ſequentia.

Experim. VII.

§. 11. Phialam vitream cum ventre ſphaerico et collo anguſto ſuſpendi ex filo tenui, vt tantum ab aëre temperiei 68 graduum contingeretur, aquamque ebullientem infudi. Aqua cum phiala, hinc tota maſſa frigori expoſita erat $\frac{56}{77}$ libras. Thermometro immiſſo obſeruaui decreſcere calorem a gr. $177\frac{1}{2}$.

		obſerv.	calc.
1)	per 5 min prim.	ad gr. 171	
2)	- 10 - - - - -	$164\frac{1}{2}$ -	165. 15
3)	- 15 - - - - -	$158\frac{1}{2}$ -	159. 63
4)	- 20 - - - - -	153 + -	154. 43
5)	- 25 - - - - -	148 -	149. 52
6)	- 30 - - - - -	143 + -	144. 89
7)	- 35 - - - - -	139 -	140. 53
8)	- 40 - - - - -	135 -	136. 41
9)	- 45 - - - - -	131 -	132. 52
10)	- 50 - - - - -	$127\frac{1}{2}$ -	128. 86
11)	- 55 - - - - -	124 -	125. 40
12)	- 60 - - - - -	$120\frac{1}{2}$ -	122. 14
13)	- 65 - - - - -	118 -	119. +
14)	- 70 - - - - -	$115\frac{1}{2}$ -	116. 16
15)	- 75 - - - - -	113 -	113. 43
16)	- 80 - - - - -	111 -	110. 82
17)	- 85 - - - - -	$108\frac{1}{2}$ -	108. 41
18)	- 90 - - - - -	106 + -	106. 13
19)	- 95 - - - - -	104 -	103. 96

		obſeru.	calc.
20)	100	102	102
21)	105	100 1/2	99
22)	110	99	98. 18
23)	115	97 1/2	96. 46
24)	120	96 +	94. 85
25)	125	95	93. 32
26)	130	94	91. 89
27)	135	92 3/4	90. 53
28)	140	91 1/4	89. 25
29)	145	90	88.
30)	150	89	86. 90
40)	200	81 1/2	78. 53
50)	250	76	73. 87
60)	300	74 1/4	71. 27
70)	350	71 3/4	69. 82
80)	400	70 1/2	69. 17
90)	450	70	68. 56
100)	500	69	68. 32

Experim. VIII.

§ 12. Phialam multo minorem priori ſimilem elegi et aquam ei infudi calidam. Phialae cum aqua pondus erat 11/12 librae. Obſeruaui deinde in temperie aëris eadem ferme ſcil. 68. graduum calorem decreſcere a gradu 158 1/2

		obſeru.	calc.
1)	5 min. prim. ad gr.	150 1/2	
2)	10	142 1/2	143. 16
3)	15	136	136. 50
4)	20	129 1/2	130. 50

			obſeru.	calc.
5)	25	min. pr. - - -	124 -	124.9
6)	30	- - - - -	118 -	119.9
7)	35	- - - - -	114 -	113.3
8)	40	- - - - -	109 ½ -	111.1
9)	45	- - - - -	106 ¼ -	107.3
10)	50	- - - - -	102 ½ -	103.8
11)	55	- - - - -	100 -	100.6
12)	60	- - - - -	97 -	97.8
13)	65	- - - - -	94 ½ -	95.1
14)	70	- - - - -	92 ¼ -	92.7
15)	75	- - - - -	90 ¼ -	90.6
16)	80	- - - - -	88 ½ -	88.6
17)	85	- - - - -	87 -	86.7
18)	90	- - - - -	86 -	85.5
19)	95	- - - - -	84 ½ -	83.5
20)	100	- - - - -	83 -	82.22
21)	110	- - - - -	80 ½ -	79.8
24)	120	- - - - -	78 ½ -	77.8
26)	130	- - - - -	76 ½ -	76.15
28)	140	- - - - -	75 -	74.8
30)	150	- - - - -	74 ½ -	73.6
32)	160	- - - - -	73 ½ -	72.68
36)	180	- - - - -	72 -	71.23
40)	200	- - - - -	71 -	70.23
44)	220	- - - - -	70 -	69.54

§. 13. Si ad experim. VII. et VIII attendimus, dum phiala cum aqua contingeretur ab aëre ſolum, non a corporibus aliis diuerſae temperiei; non potuit hic a lege

lege tantum aberrari. Attamen effici non poterat, vt temperies aëris perfectiſſime conſtans maneret. Etiam horologium, quo vſus ſum, dum experimenta per multas horas continuarem, tardius mouebatur vltimis temporibus, quam ab initio.

§. 14. Vt confirmarem ea, quae ex paste in annotationibus ad experimenta allata ſunt, conſtitui ſimul cum thermometro in experim. III. deſcripto, mutationes aëris quolibet tempore annotare, credens hac ratione facile indicium ferri poſſe, inprimis, ſi ad Exp. I. II. III. attendatur, cur calor magis creſcat vel decreſcat ac ſecundum calculum creſcere et decreſcere deberet. Hunc in finem etiam differentias inter obſeruationes et calculum addidi in vltima columna, et ſi calculus obſeruationem ſuperauit, id ſigno +, contrarium ſigno — indicaui.

Experim. IX.

§. 15 Phiala, qua vſus ſum experim. VII aquam ebullientem eiusdem quantitatis infudi et in temperie aëris 20 gradum obſeruaui decreſcere calorem a gr. 182.

		obſ.	cal. aër.	calc.	differ.
1)	in 5 min. prim.	ad gr. 173	- 19¼		
2)	- 10 - - - -	164½	- 19¼	- 164. 5	+0. 25
3)	- 15 - - - -	155½	- 19¼	- 156. 4	+0. 90
4)	- 20 - - - -	148	- 19¼	- 148. 9	+0. 90
5)	- 25 - - - -	141	- 19¼	- 141. 7	+0. 70
6)	- 30 - - - -	134	- 19¼	- 134. 9	+0. 90
7)	- 35 - - - -	127¼	- 19¼	- 128. 5	+1. 25
8)	- 40 - - - -	121½	- 20	- 122. 5	+1. 00
9)	- 45 - - - -	116	- 20	- 116. 9	+0. 90

10)

		obſeru.	cal. aër.	calc.	diff.
10)	50 min. pr.	$110\frac{1}{2}$	20	111.	+0. 50
11)	55	$105\frac{1}{2}$	20	106.4	+0. 90
12)	60	$101\frac{1}{4}$	20	+101. 58	+0. 33
13)	65	$96\frac{1}{4}$	20	+ 97. 5	+1. 25
14)	70	93	$20\frac{1}{2}$	92. 8	— 0. 20
15)	75	$89\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{2}$	88. 73	— 0. 77
16)	80	86	21	84. 91	— 1. 09
17)	85	83	21	81. 30	— 1. 70
18)	90	$79\frac{3}{4}$	21	77. 90	— 1. 85
19)	95	76	21	74. 67	— 1. 33
20)	100	$73\frac{1}{2}$	21	71. 64	— 1. 86
21)	105	$71\frac{1}{4}$	21	68. 77	— 2. 48
22)	110	$68\frac{3}{4}$	$21\frac{1}{4}$	66. 06	— 2. 69
23)	115	$66\frac{1}{4}$	$21\frac{1}{4}$	63. 49	— 2. 76
24)	120	64	$21\frac{1}{4}$	61. 09	— 2. 91
25)	125	62	$21\frac{1}{4}$	58. 80	— 3. 20
26)	130	60	$21\frac{1}{4}$	56. 65	— 3. 35
27)	135	58	$21\frac{3}{4}$	54. 61	— 3. 39
28)	140	$56\frac{1}{2}$	$21\frac{3}{4}$	52. 69	— 3. 81
29)	145	$55\frac{1}{2}$	22	50. 86	— 4. 64
30)	150	$53\frac{1}{2}$	22	49. 15	— 4. 35
31)	155	52	22	47. 53	— 4. 47
32)	160	$50\frac{1}{4}$	22	46. 00	— 4. 25
34)	170	48	$21\frac{3}{4}$	43. 19	— 4. 81
36)	180	$45\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{2}$	40. 69	— 4. 81
38)	190	$41\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{2}$	38. 40	— 3. 10
42)	210	$34\frac{1}{2}$	19	34. 41	+0. 31.

Experi-

Experim. X.

§. 16 Phialam vitream (Experim. VIII.) adhibui, ei $\frac{10}{15}$ librae aquae ebullientis infudi, et in aëre temperiei 23. gr. obseruaui decrescere calorem aquae a gradu 175

		obseru. calor aëris.	Calc.	diff. inter obs. et calc.
1)	5 min. prim. ad gr.	$161\frac{1}{2}$ - $22\frac{1}{2}$ -		
2)	10 - - - -	149 - $22\frac{1}{2}$ -	149.2	+0. 20
3)	15 - - - -	137 - $22\frac{1}{2}$ -	137.9	+0. 90
4)	20 - - - -	127 - 22 -	127.7	+0. 70
5)	25 - - - -	116 - 22 -	118.4	+2. 40
6)	30 - - - -	108 - 22 -	109.9	+1. 90
7)	35 - - - -	100 - 22 -	102.2	+2. 20
8)	40 - - - -	$93\frac{1}{2}$ - 22 -	95.2	+1. 70
9)	45 - - - -	87 - $22\frac{1}{2}$ -	88.8	+1. 80
10)	50 - - - -	81 - $22\frac{1}{2}$ -	82.9	+1. 90
11)	55 - - - -	$75\frac{1}{2}$ - $22\frac{1}{2}$ -	77.6	+2. 10
12)	60 - - - -	$71\frac{1}{4}$ - 23 -	72.7	+1. 45
13)	65 - - - -	$67\frac{1}{2}$ - 23 -	68.3	+0. 80
14)	70 - - - -	$63\frac{3}{4}$ - 23 -	64.3	+0. 55
15)	75 - - - -	$60\frac{1}{4}$ - 23 -	60.6	+0. 35
16)	80 - - - -	$58\frac{1}{2}$ - $23\frac{1}{2}$ -	57.3	−1. 20
17)	85 - - - -	$54\frac{1}{2}$ - $23\frac{1}{2}$ -	54.2	−0. 30
18)	90 - - - -	53 - 24 -	51.4	−1. 60
19)	95 - - - -	$50\frac{1}{2}$ - 24 -	48.9	−1. 60
21)	105 - - - -	$46\frac{1}{4}$ - 24 -	44.5	−1. 75
23)	115 - - - -	43 - 23 -	40.8	−2. 20
25)	125 - - - -	40 - 22 -	37.85	−2. 15

	obſeru.	caloraëris.	calc.	diff. inter obſ. et cal.
27)135	35½	22	35.33	— 0. 17
29)145	33½	22	33.24	— 0. 26
31)155	31½	22½	31.5	— 0. 0
33)165	30	22½	30.06	+ 0. 06
35)175	28¼	22½	28.80	+ 0. 55
37)185	27½	22½	27.8	+ 0. 30
39)195	27¼	22½	27.	+ — 0. 25
41)205	27	23	26.35	— 0. 65
43)215	26½	23	25.78	— 0. 72
49)245	25½	23	24.59	— 0. 91
52)260	25½	24	24.2	— 1. 30
56)280	25	24	23.83	— 1. 17

§. 17. Cum ex praecedentibus admiranda *harmonia* calculi et obſeruationum eluceat ſatis, ne contra officia veritatis amatoris videar experimenta accommodaſſe calculo, adducam experimentum alienum huc pertinens, ſcil. Clariſſ. Krafftii ex diſſ. eius de calore et frigore. In prima columna poſui tempus praeterlapſum ab initio obſeruationum, vt in praecedentibus experimentis factum: in ſecunda columna gradus temperiei aquae quolibet tempore reſiduos; in tertia gradus ſecundum legem a me inventam erutos: in quarta gradus reſiduos ſecundum hypotheſin, decrementa eſſe in ratione ſubduplicata temporum praeterlapſorum.

Clariſſ. Krafftius in temperie aëris 76. graduum obſeruauit, thermometro aquae calidae immiſſo, a gr. 112 deſcendere mercurium

1) min.

		obſeru.	calc. ſec. leg. meam	calc. ſec. hyp. allatam
1)	min. prim. ad	110		107. 4
2)		109	109. 1	107.
4)		106½	106½ hyp.	101. 8.
6)		104	103. 98	100. 74.
8)			101. 84	98. 99
9)		101	100. 67	98. 2
11)		99	98. 68	96. 75
14)		96	96.	94. 79
16)		94½	94. 54	93. 6
18)		93	92. 90	92. 5
23)		90	89. 70	89. 5.
25)		89	88. 60	89. 0 ex hyp.
27)		88	87. 59	88. 1
31)		86	85. 79	86. 6
36)		84½	84. 09	84. 40
39)		83	83. 00	82. 78
42)		82	82. 17	82. 2
46)		81	81. 21	80. 8
50)		80½	80. 41 +	79. 8
54)		79	79. 73	78. 2
59)		78	79. 02	76. 67
62)		77½	78. 66	75. 80
66)		77	78. 25	74. 63
73)		76½	77. 68	72. 07
81)		76	77. 21	70. 60

§. 18. Si praecedentem paragraphum conſideramus et conferimus calculum ſecundum legem meam cum experimentis, miram conuenientiam cernimus, vt hinc iudicandum ſit, aëris temperiem tempore experimenti fuiſſe maxime conſtantem, et omnem poſſibilem ſolertiam ab experimentatore adhibitam fuiſſe. Mira vero harmonia ſola ſatis demonſtrat legis inuentae veritatem. Si gradus Columnae quartae vero aſſpicimus; qui ſec. hyp. enuti ſunt, decrementa eſſe in ratione ſubduplicata temporum, diſcrepantiam initio et fine obſeruationum, vbi a ſuppoſito gradu gradus maxime diſtant, tantam obſeruamus, vt prorſus non ſatisfaciat fini. Taceo impoſſibile ex calculo ſequi, ſcil. temperiem aquae ſec. calculum ita decreſcere debere, vt aëris temperies eam 6 gradus ſuperet, quod repugnat.

§. 19. Si nunc ad experimentum VII. reſpicimus, facile apparet, *decrementa caloris in temporis particulis parvis aequalibus, ſi maſſa frigori expoſita ſuperficiesque eius et temperies aëris refrigerantis manet eadem, eſſe vt differentias inter temperiem maſſae refrigerandae et temperiem aëris refrigerantis.* Deſcendit enim mercurius quinque minutis primis per $6\frac{1}{2}$ gradus, ſcil. a gradu $177\frac{1}{2}$ ad gr. 171. Deſcendit vero etiam a gr. $115\frac{1}{2}$ ad 113, i. e. per $2\frac{1}{2}$ gr. pariter per quinque minuta prima. Sunt ergo decrementa vt $6\frac{1}{2}$ ad $2\frac{1}{2}$. Cum temperies aëris refrigerantis ſit 68. graduum, erit differentia inter temperiem aëris et temperiem $177\frac{1}{2}$ gr. 109. 2. et differentia inter temperiem aëris eandem et temperiem $115\frac{1}{2}$ gr. 47. 5. Eſt vero 109. 2 ad 47. 5 $= 6\frac{1}{2} : 2\frac{761}{1091}$, ergo ferme $= 6\frac{1}{2}$ ad

ad $2\frac{1}{2}$. Ab 104. ad gr. 102 in quinque minutis percurrit mercurius duos gradus, differentia inter temperiem aëris et maſſae refrigerandae eſt hic 36. 0. Eſt vero 109. 2 : 36. 0 $=6\frac{1}{2} : 2_{\frac{42}{1092}}$ i. e. ferme vt $6\frac{1}{2} : 2$. A gradu $81\frac{1}{2}$ in quinque minutis mercurius deſcendit per $\frac{11}{20}+$ gr. Eſt hic differentia inter temperiem aëris et maſſae refrigerandae 13. 5. Eſt autem 109. 2 : 13. 5 $=6\frac{1}{2} : \frac{837}{1092}$ vel 0. 766. $>$ 0. 550. vel $\frac{11}{20}$, vt eſſe debet. Simili ratione examinari poterunt reliquae experientiae, inprimis §. §. 12. 15. 16. 17; luculenter apparebit propoſitionem confirmari, et ſi quae obſeruatur diſcrepantia, illam attribuendam eſſe inconſtantiae aëris, qui inter experimentum modo fit calidior modo frigidior, et ſpatium paruum obſeruandi difficultati.

§. 20. *Si maſſa refrigeranda et ſuperficies eius manet eadem, temperies aëris vero, in quo experimentum fit, eſt diuerſa, decrementa caloris aequalibus temporis particulis ſunt iterum vt differentiae inter temperiem aëris et maſſae refrigerandae.* Conferantur obſeruationes experim. VII. et IX. maſſa vtrobique eſt eadem et eadem etiam ſuperficies maſſarum; differentia vero inter temperiem maſſae refrigerandae et aëris refrigerantis ibi eſt initio 109. 2, hic initio 162. 0. In quinque primis minutis primis ibi mercurius abſoluit $6\frac{1}{2}$, hic 9. gradus. Eſt vero 109. 2 : 162. 0 $=6\frac{1}{2} : 9\frac{216}{1092} = 6\frac{1}{2} : 9$ ferme.

Abſoluit mercurius experim. IX. a gr. $110\frac{1}{2}$ ad gr. $105\frac{1}{2}$ quinque gradus, quinque minutis. Eſt vero hic differentia inter temperiem aëris et maſſae refrigerandae 90. 5. Hinc 109. 2 : 90. 5 $=6\frac{1}{2} : 5\frac{151}{1092} = 6\frac{1}{2} : 5$ ferme.

Discrepantia, vt iam satis monitum, attribuenda est inconstantiae temperiei aëris vel obseruandi difficultati. Simili modo caetera exempla examinari poterunt, quae adducere superfluum iudico.

§. 21. *Si massae sunt diuersae et superficies massarum sunt diuersae, differentiae vero inter temperiem aëris et aquae eaedem, decrementa aequalibus temporis particulis sunt in directa ratione superficierum et inuersa massarum.* Conferantur obseruationes experim. VII. cum obseruationibus experim. VIII. massa refrigeranda ibi est ad massam refrigerandam hic vt 28 : 9. Superficies vero phialarum sunt, quia sunt corpora similia vt $28^{2:3} : 9^{2:3} = 91809 : 43264$. Ratio ergo composita ex directa superficierum et inuersa voluminum est $= \frac{91809}{28} : \frac{43264}{9} = 3278 : 4807$. Experim. VII. mouetur mercurius quinque minutis primis a gr. $158\frac{1}{2}$ ad gr. 153, i. e. per $5\frac{1}{2}$ gradus, et in experim. VIII. a gr. $158\frac{1}{4}$ ad $150\frac{1}{4}$ i. e. per octo gradus pariter quinque minutis primis, temperies aëris vtrobique est eadem. Est autem $3278 : 4807 = 5\frac{1}{2} : 8\frac{2174}{3278}$. parum abludens a $5\frac{1}{2} : 8$.

Mouetur mercurius experim. VIII. a gr. 90 ad gr. $88\frac{1}{2}$ per $1\frac{1}{2}$ gr. quinque minutis primis. Experim. VII. vero a gr. 90 quinque minutis per gradum vnum. Est vero $3278 : 4807 = 1 : \frac{4807}{3278} = 1 : 1\frac{1529}{3278}$, ferme vt $1 : 1\frac{1}{2}$. Hoc ex omnibus reliquis exemplis elucet, positis conditionibus.

§. 22.

§. 22. *Si massae refrigerandae sunt diuersae, superficies diuersae, differentiae inter temperiem massarum refrigerandarum et aëris refrigerantis diuersae; decrementa aequalibus temporis particulis obseruantur in ratione composita ex ratione directa superficierum et differentiarum inter temperiem aëris et massarum refrigerandarum, simulque ex inuersa ratione massarum refrigerandarum ipsarum.* Hoc vt adpareat, conferantur obseruationes experim. VII. cum obseruationibus exper. X. Est ratio directa superficierum et inuersa massarum vt ante $= 3278 : 4807$. Est ibi differentia inter 177.2 et $68.0 = 109.2$. hic vero differentia inter 175.0 et $23.0 = 152.0$. Consequenter ratio tota composita $3278.1092 : 4807.1520 = 3579576 : 7306640 = 447447 : 913330$. Spatium vero a mercurio transitum a gr. $177\frac{1}{5}$ in quinque minutis primis est $= 6\frac{1}{5}$, spatium eodem tempore experm. X. a gr. 175 ad $161\frac{1}{2}$ absolutum $= 13\frac{1}{2}$:

Est vero $447447 : 913330 = 6\frac{1}{5} : 12\frac{293232}{447447}$ ergo non multum recedens a $6\frac{1}{5} : 13\frac{1}{2}$. Idem aliis exemplis potest ostendi, quae facile ex obseruationibus peti poterunt.

§. 23. Itaque concludimus ex experimentis, decrementa caloris, et si respicimus ad experim. II. et IV. etiam incrementa caloris esse in ratione composita ex directa ratione superficierum et differentiarum inter temperiem massarum refrigerandarum vel calefaciendarum et aëris pariter directa, simulque ratione inuersa ipsarum massarum refrigerandarum vel calefaciendarum; si scil. tempora sunt aequalia et parua. Hac propositione stabilita nos legi condendae pares erimus, secundum quam de-

cre-

crementa vel incrementa caloris quolibet tempore praedicere poterimus in temperie aëris conſtanti.

§. 24. Sit differentia inter temperiem aëris refrigerantis et maſſae refrigerandae $=a$, ſit decrementum tempore $t.=b$. erit differentia inter temperiem aëris refrigerentis et maſſae refrigerandae tempore t praeterlapſo reſidua $=a-b$. Et cum decrementa aequalibus temporis particulis ſint vt differentiae inter temperiem maſſae refrigerandae et aëris per antecedentia (§. 19.) erit $a:a-b=b:b\frac{(a-b)}{a}$, vel decrementum tempore $2t$, differentia igitur inter temperiem maſſae refrigerandae et aëris erit poſt tempus $2t=a-b-b\frac{(a-b)}{a}=\frac{a^2-ab-ab+bb}{a}=\frac{a^2-2ab+bb}{a}=\frac{(a-b)^2}{a}$. Eadem ratione erit $a:\frac{(a-b)^2}{a}=b:b\frac{(a-b)^2}{a^2}$ ſiue decrementum tempore $3t$; differentia igitur inter temperiem maſſae refrigerandae et aëris erit poſt $3t=\frac{(a-b)^2}{a}-b\frac{(a-b)^2}{a^2}=\frac{a^2-2ab+b^2}{a}-\frac{ba^2+2ab^2-b^3}{a^2}$, aequalis $\frac{a^2-3a^2b+3ab^2-b^3}{a^2}=\frac{(a-b)^3}{a^2}$ et ſic porro. Erunt ergo differentiae inter temperiem aëris et maſſae refrigerandae temporibus aequalibus continuo ſibi ſuſccedentibus paruis et decrementa, vt ſequens tabula exhibet.

§. 25. Prima columna exhibet temporum aequalium numerum, ſecunda columna differentias inter temperiem maſſae refrigerandae et aëris poſt determinatum tempus ſuperſtites; tertia columna exhibet decrementa aequalibus temporibus.

I.	II.	III.
0	a	0
1 t	$a-b$	b
2 t	$\frac{(a-b)^2}{a}$	$b\frac{(a-b)}{a}$
3 t	$\frac{(a-b)^3}{a^2}$	$b\frac{(a-b)^2}{a^2}$
4 t	$\frac{(a-b)^4}{a^3}$	$b\frac{(a-b)^3}{a^3}$.
5 t	$\frac{(a-b)^5}{a^4}$	$b\frac{(a-b)^4}{a^4}$
6 t	$\frac{(a-b)^6}{a^5}$	$b\frac{(a-b)^5}{a^5}$
7 t	$\frac{(a-b)^7}{a^6}$	$b\frac{(a-b)^6}{a^6}$
8 t	$\frac{(a-b)^8}{a^7}$	$b\frac{(a-b)^7}{a^7}$ etc. hinc
n t	$\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$	$b\frac{(a-b)^{n-1}}{a^{n-1}}$

§. 26. Ex praecedenti tabula progreſſio clariſſime patet, et quolibet momento differentia inter temperiem maſſae refrigerandae et aëris definiri poteſt. Eſt ſcil. differentia inter temperiem initialem maſſae refrigerandae et aëris ſcil. a euecta ad dignitatem, cuius exponens vnitate minor eſt numero momentorum aequalium elapſorum, ad differentiam inter temperiem maſſae refrigerandae et aëris poſt primum momentum reſiduam, evectam ad dignitatem, cuius exponens aequalis eſt numero momentorum aequalium praeterlapſorum, vt vnitas ad differentiam inter temperiem aëris et maſſae refrigerandae praeterlapſo tempore reſiduam; quae ſi tali ratione inuenitur, ei addi poteſt temperies aëris, vt temperies ipſa habeatur.

§. 27. Patet porro (1) Logarithmum $a-b$, poſſe multiplicari per exponentem eius, ad obtinendum logarithmum nu-

meratoris. (2) Logarithmum a posse pariter multiplicari per exponentem eius, ad obtinendum logarithmum denominatoris. (3) Logarithmum denominatoris posse subtrahi a logarithmo numeratoris ad obtinendum logarithmum quoti.

§. 28. Potest etiam quolibet tempore indicari decrementum, est scil. a euecta ad dignitatem cuius exponens est vnitate minor numero momentorum elapsorum, ad $(a-b)$ euectam ad dignitatem cuius exponens pariter est vnitate minor numero momentorum aequalium elapsorum, sic decrementum primo momento ad decrementum per aequale tempus post certum temporis intervallum. Similique ratione etiam hic logarithmis vti poterimus.

§. 29. Vt sine molestia pateat, quomodo calculus obseruationibus appositus sit factus, notetur in primo experim. a esse $=2$. $b=22$: in secundo experim. a esse $=24$. $b=14$; in 3tio experim. $a=42$. $b=14$, in 4to, $a=24$, $b=2$; in 5to $a=24$, $b=10$; in 6to $a=78$, $b=9$; in 7mo $a=109.2$, $b=6.2$. in experim. 8vo $a=90.5$, $b=8.0$. experim. 9no $a=162$ $b=9$. experim. 10mo, $a=152$, $b=13\frac{1}{2}$.

§. 30. In experimento quod mutuati sumus a Clariss. Krafftio ex dissertatione eius de calore at frigore decrementum initiale sequenti ratione elicui. Decrementum duobus min. prim. a gr. $106\frac{1}{2}$ est secundum obseruationem 2. gr. et dimidii; hinc vno min. primo ferme $1\frac{1}{4}+$ gr. Cum, nunc spatia aequalibus temporibus a mercurio transita sint vt differentiae inter temperiem massae refrigerandae et aëris refrigerantis, erit $30\frac{1}{2} : 36 = 1\frac{1}{4}+ : \frac{90}{71}+$ vel ad $1.475+$, erit ergo, $b=1.475$. Cum $a=36$.

000, erit $a-b=36.000-1.475=34525-$, erit igitur $\frac{(a-b)^2}{a}=\frac{34525^2}{36000}$ siue differentia inter temperiem massae refrigerandae et temperiem aëris post duo min. prim. et $\frac{(a-b)^3}{a^2}$ erit $=\frac{34525^3}{36000^2}$ aequalis differentiae inter temperiem aëris et massae refrigerandae tertio min. prim, secundum legem expositam, et sic porro.

§. 31. Geometris facillime patet, notissimam curvam Logarithmicam magni vsus esse in decrementis, singulis temporibus determinandis, quod tandumnodo indicare hic volui, cum sufficiat, quod ostenderim, quomodo lege detecta vti possimus ad detegenda decrementa et incrementa caloris in constanti aëris temperie, adhibitis logarithmis numerorum vulgarium.

§. 32. Dum experimenta VII. VIII. IX. X. considero, aëris temperiem posse assumi constantem per totum experimenti tempus absque sensibili errore cerno. Videmus vero etiam, crescente vel decrescente calore aberrare a lege decrementa, conditio enim legis ex parte tollitur. Ipsa sic aberrationis ratio est criterium veritatis legis; considerentur obseruationes experim: IX et X, vbi additae sunt mutationes aëris; quia experim. IX ab initio decreuit calor aëris, statim maiorem calorem exhibet calculus quam obseruationes vsque ad min. pr. 40. Deinde ob crescentem iterum calorem aëris etiam calculus magis magisque respondere incipit obseruationibus, donec ferme cum iis congruit post min. pr. 60. Quia vero postea temperies aëris magis adhuc crescit, vt superet gradum 20, min. primo 70; calculus iam incipit minorem temperiem exhibere, quam obseruationes,

quod vſque ad min. primum 180, cerniere eſt, vbi incipit denuo decreſcere aëris temperies, et calculus magis magiſque iterum reſpondere obſeruationibus, donec poſt min. primum 210 cum obſeruationibus ferme conueniat.

Eperimento X. minuto primo 15. decreuerat calor aëris a gr. 23 ad 22½, calor maſſae refrigerandae ad gr. 137. Calculus exhibet gr. 137.9, quia calor aëris decreuerat. Sic calculus ob calorem aeris decreſcentem vſque ad min. pr. 65, maiorem exhibet gradum quam obſeruationes. Deinde vero, quia calor aeris min. primo 60 iam rvrſus creſcere incipit, etiam calculus incipit reſpondere magis magiſque obſeruationibus et min. primo 70, ferme eundem gradum exhibere. Quia poſtea vero calor aëris augetur magis, calculus incipit exhibere minorem gradum ac obſeruationes, quod *inter* min. primum 80 et 115 cernere eſt. A min. primo 115 autem rurſus decreſcit calor aëris; hinc fit, vt calculus denuo reſpondere incipiat obſeruationibus, quod inter min. primum 115 at 195 videre eſt. A minuto primo 205 ad 280 creſcit iterum calor aëris ad gr. 24, quare temperies maſſae refrigeratae maior obſeruatur ac calculus exhibet. Haec omnia ſunt etidentiſſima criteria legis feliciter detectae, vt plura addere in confirmationem ſupervacaneum ſit.

§. 33. Tandem ſi ea perpendimus, quae §. 19. 20. 21 aſſerui et probaui, decrementa ſcil. vel incrementa caloris aequalibus temporum particulis eſſe in ratione compoſita ex directa ſuperficierum et inuerſa maſſarum refrigerandarum vel calefaciendarum ratione, ſi temperies aëris ponuntur aequales et differentiae inter temperiem maſſarum refrigerandarum et aëris; cuique facile

patet

patet, collatis ſimul iis, quae §. §. 4. 5 et 6. annotata ſunt, ad elaborationem thermometrorum perfecte concordantium requiri, vt ſuperficies bulborum thermometricorum, eandem rationem habeant, quam habent volumina bulborum thermometricorum.

Nunquam enim decrementa vel incrementa aequali tempore, mutatione aëris eadem facta erunt aequalia, niſi (poſitis dictis voluminibus V : *v* et ſuperficiebus S : *s*.) $\frac{S}{V}$ ſit $= \frac{s}{v}$; conſequ. $S\,v = s\,V$ et $S : s = V : v$. Collatis §. §. 3. 4. 5. 6 ſimul patet, ea thermometra, quae adhibui non fuiſſe perfecte concordantia; quia differentia inter temperiem aëris et temperiem thermometri in experim. I. II. exiſtente 24 gr. thermometrum temperiem aëris conconſecutum eſt ſexaginta minutis primis, in experim. III. vero thermometrum alterum, differentia inter temperiem aëris et thermometri exiſtente 28 graduum, temperiem aeris conſecutum eſt triginta minutis primis. Non-ſolum vero thermometrorum harmonia tali ratione exactior obtinetur, ſed etiam ſequens problema magni momenti et meteorologiae perficiendae inſeruiens ſolui poterit, ſi in ſubſidium vocantur, quae in hac diſſertatione probaui ſcil.

Temperiem aëris inuenire eam; quae, ſi conſtans eſſet per totum diem, vel etiam per multorum dierum interuallum, quin totum annum, eundem effectum produceret in refrigerandis vel calefaciendis per idem tempus corporibus, ac omnes gradus diuerſi caloris ſibi per totum diem, vel longius interuallum e. g. totum annum ſuccedentes. Quia vero in hoc negotio machina quadam et apparatu opus eſt, rem differam, pedemque hic figo.

TENTAMEN LEGEM EVAPORATIONIS AQVAE CALIDAE IN AERE FRIGIDIORI CONSTANTIS TEMPERIEI DEFINIENDI.

AVCTORE
G. W. Richmann.

§. 1.

Qua lege euaporatio aquae calidae in certa aëris temperie minus calida fiat, nondum definitum est a scientiae naturalis cultoribus. Huius problematis solutionem ad physicae incrementum aliquid allaturum non dubitaui; hinc cum quadam pertinacia nonsolum experimenta huc facientia instituí, sed etiam iis attente comparatis priorum Academiae traditarum inquisitionum adminiculo in legem, quam experimentis non prorsus contrariam deprehendi, incidi. Haec qualiacunque tentamina initio euulgare nolui, antequam noua experimenta cum peculiari machina coperim, quam descriptam sub finem anni 1747 tradidi et qua euaporationem exactius mensurari posse speraui. Cum vero nunc laborum, quibus incubui, ex parte rationem reddere velim, cogitata et experimenta, quae imposterum perficere annitar, cum societate communicabo.

§. 2. Simulac mihi subnascebatur suspicio euaporationem aquae calidae in aëre minus calido decrescere vti differentiae inter temperiem aquae et aëris decrescunt, in legem decrementi caloris inquirere incepi et detexi differentias istas decrescere aequalibus temporibus secundum progressio-

greſſionem ſemiordinatarum logiſticae temporibus per abſciſſas expreſſis, vti ex inquiſitione mea in legem ſecundum quam calor fluidi vaſe contenti etc. in temperie aëris conſtanter eadem creſcit vel decreſcit, patet. (*)

§. 3. Poſito eandem continuo differentiam inter temperiem aquae magis calidae et aëris minus calidi eſſe, nullum eſt dubium, aequales aquae quantitates, caeteris om-

(*) Cum (1) vis elaſtica aëris calore augeatur ita, vt haec vis ad aëris ambientis frigidioris vim elaſticam ſit vt volumen quod aër calore acquirit ad volumen aëris ambientis minus calidi; et (2) refrigeratio pendeat maximam partem a differentia virium elaſticarum, aſcendatque aër calidus a ſuperficie corporis aeque calidi in aëre minus calido vi proportionali exceſſui vis elaſticae aëris magis calidi ſuper vim elaſticam aëris minus calidi et tali ratione corporis calor a cuius ſuperficie aër aſcendit, ſimul decreſcat: (3) vero exceſſus vis elaſticae aëris calidioris ſuper vim elaſticam aëris minus calidi proportionatus ſit differentiae temperierum; non mirum eſt, decrementa caloris aequalibus temporculis eſſe vti differentias inter temperiem aquae et aëris.

Si enim volumen aëris temperie aquae gelaſcentis expanſi ponitur 1000 volumen aëris calore aquae ebullientis expanſi obſeruatum eſt 1500 et volumen aëris calore ſummo aeſtiuo expanſi 1166. conf. Hauksbéii Phyſ. Mechan. Exp p. 170. Tentamina experimentorum in Acad. del Ciment. p. 39. ed. Muſſchenbr. Cum vires elaſticae ſint in eadem ratione, differentia inter vim elaſticam aëris aqua ebulliente generatam et vim elaſticam aëris aqua gelaſcente generatam eſt vt 500; differentia vero inter vim elaſticam aëris calore ſummo aeſtiuo generatam et vim elaſticam aëris aqua gelaſcente generatam vti 166. Eſt vero 500: $166 = 180 : 59\frac{18}{50}$ i. e. vti differentia inter temperiem aquae ebullientis et temperiem aquae gelaſcentis ad differentiam inter calorem ſummum aeſtiuum et temperiem aquae gelaſcentis. Si enim ad $59\frac{18}{50}$ additur temperies aquae gelaſcentis 32. graduum, oritur temperies $91\frac{18}{50}$ graduum, ſiue calor ſummus aeſtiuus.

nibus paribus, aequali tempore euaporare, euaporationes inaequalibus vero temporibus esse in ratione temporum.

§. 4. Si vero tempora et caetera omnia ponuntur aequalia praeter differentias inter temperiem aquae et aëris nondum forte affirmare licebit euaporationes esse in ratione differentiarum inter temperiem aquae et aëris. Quod si obtinet, euaporationes temporibus inaequalibus et differentiis dictis pariter inaequalibus, caeteris vero omnibus paribus, erunt vti spatia logisticae, cuius semiordinatae ponuntur in ratione differentiarum dictarum et abscissae in ratione temporum.

§. 5. Ponatur logisticae axis AC, cuius partes aequales exprimant tempora aequalia, quibus euaporatio fit; semiordinata AB exprimat differentiam initialem inter temperiem aquae et aëris aqua frigidioris; decrescet aquae calor in aëre frigidiori constantis temperiei, vti semiordinatae logisticae decrescunt, et erit post tempus AF differentia inter temperiem aquae et aëris vti semiordinata FG et euaporatio tota post idem tempus vti spatium logisticae ABFG; post tempus AC vero erit differentia inter temperiem aquae et aëris vti CD et euaporatio totalis post idem tempus vti spatium logisticae ABCD. Si nunc logisticae subtangens, quae est constans ponitur $= a$, erit spatium ABFG $= a$ (AB − FG) et spatium ABCD $= a$ (AB − CD). Conseq. ABFG : ABCD $=$ AB − FG : AB − CD; i. e. Euaporationes erunt vti differentiae differentiarum inter temperiem aquae et aëris diuersis temporum interuallis.

§. 6.

§. 6. Hoc an ita habeat, accuratiſſimis experimentis examinandum eſt. Talia quidem nondum inſtituere licuit, quae tamen huc facientia ope vulgaris bilancis inſtitui, afferam. Quodlibet experimentum in tabula quadam exhibui, in cuius columna I. tempus euaporationis exiſtit, in columna II. temperies aëris, in columna III. temperies aquae, in columna IV. differentiae inter temperiem aquae et aëris, in columna V, pondus aquae evaporatae ſecundum obſeruationem, in VI tandem pondus aquae euaporandae ſecundum legem ſuppoſitam.

Experim. I.

Vas metallicum cylindricum diametri quatuor digitorum, quod capiebat tres libras aquae, mediante ſune exbrachio bilancis ſuſpendi et aquam feruentem infudi, thermometrum dein huic aquae immerſi et ad aequilibrium perduxi bilancem; ſtatimque notaui tempus, temperiem aëris externi, temperiem aquae, et ſimul pondus vnius drachmae impoſui lanci, cui aqua euaporanda impoſita erat. Aequilibrium ſic tollebatur: expectaui deinde, donec tantum aquae euaporaret, vt aequilibrium reſtitueretur; notaui iterum tempus, temperiem aquae et aëris, ſimulque pondus aquae euaporatae. Hoc continuaui, vti patet ex ſequenti tabula.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
poſt 0 min. pr.	68	175	107	0	0.
3	68	168	100	1 drach.	1. 15 dr.
6	68	164	96	2	1. 87.
10	68	160	92	3	2. 47.
15	68	155	87	4	3. 30.

poſt 21 min. pr.	68	149	81	5	4.42.
28	68	144	76	6	5.27.
36	68	138	70	7	6.05.
45	67	131½	64½	8	7.03.
57½	67	124	57	9	8.18.
72	67	117½	50½	10	9.33.
91	67	110	43	11	10.48.
130	67	98	31	12	12.44
152	67	93½	26½	13	13.16.
176	67	90	23	13¼	13.76.
212	67	84	17	13½	14.42.
275	67	79	12	14	15.55.
367	65	71	6	15	16.67.
446	64	68	4	15½	16.77
1095	63	63	0	17	17. hyp.

Barometri altitudo primis 446 minutis primis non obſeruata eſt ſenſibiliter mutata.

Experim. iteratum.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
poſt 0 min. pr.	62	176	114	0	0	
3½	62	170	108	1 dracm.	$\frac{9}{11}$ dr.	
7	62½	165½	102½	2	1 $\frac{46}{110}$.	
12	62	160	98	3	2 $\frac{6}{110}$.	
17½	63	154	91	4	3 $\frac{11}{110}$.	
23½	64	148	84	5	4 $\frac{6}{110}$.	
30½	64	143	79	6	4 $\frac{81}{110}$	
39½	64	136¼	72¼	7	5 $\frac{75}{110}$	
52	64	128	64	8	6 $\frac{84}{110}$	

poſt

post 66½ min. pr.	63	120	57	9	$7\frac{69}{110}$.
88½	63	112½	49½	10	$8\frac{72}{110}$.
119½	63	101½	38½	11	$10\frac{50}{110}$.
172	63	90	27	12	$11\frac{44}{110}$.
283½	62½	75	11½	13	$13\frac{17}{110}$.
630	57	61½	4½	15	15 hyp.

Barometri altitudo non mutabatur tempore experimenti.

EXPERIMENTVM DENVO ITERATVM.

Vas aliud cylindricum diametri trium digitorum adhibui, quod capiebat libram vnam et dimidiam et eadem obseruaui, quae in experimentis praecedentibus.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
post 0. min. pr.	58	166	108	6		0
1.	58	162	104	30 grana		23 gr.
2½	59	158	99	60		52.
4½	59	154	95	90		75.
7	60	150	90	120		104.
9	60	146	86	150		127.
11½	60	142½	82½	180		147.
15	61	137½	76½	210		181.
18½	61	133	72	240		208.
23	61	128	67	270		236.
29	61	123	62	300		265.
36	61	116	55	330		306.
43	61	112	51	360		328.
53	61	106	45	390		368.
64	61	100	39	420		390.
81	61	93	32	450		430.

poſt 104	62	86	24	480 grana	475.
176	62	73½	11½	540	546.
316	62	64	2	600	600.
396	62	62	0	620	611.

Barometri altitudo parum mutabatur tempore experimenti dimidiam lineam decreſcebat.

EXPERIMENTVM ITERATVM TERTIO.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
poſt	0	67	177	110	0	0
	5	67	156	88	8 ſemidr.	11 $\frac{44}{110}$ ſ. dr.
	10	67	147	80	14	15 $\frac{6}{11}$
	12	67	144	78	16	16 $\frac{6}{11}$
	22½	65	132	67	24	22 $\frac{5}{11}$
	26½	65	127½	62½	26	24 $\frac{6}{11}$
	30	65	124	59	28	26 $\frac{4}{11}$.
	35	65	121½	56½	30	27 $\frac{7}{11}$.
	39½	66	118	52	32	30 $\frac{6}{11}$.
	44	67	113	46	34	33.
	51	68	109	41	36	35 $\frac{6}{11}$.
	60	69	105	36	38	38 $\frac{18}{110}$.
	70	69	101	32	40	40 $\frac{46}{110}$.
	84	68½	95¼	26¼	42	43 $\frac{50}{110}$.
	98	69	90½	21½	44	45 $\frac{94}{110}$.
	117	66	85	19	46	47.
	158	65	78	13	49	50 $\frac{58}{110}$.
	179	64	74	10	51	51 $\frac{90}{110}$.
	224	64	68	4	53	54 $\frac{102}{110}$.
	332	63¾	64	¼	55	56 $\frac{95}{110}$.
	380	64	64	0	57	57 hyp.

Ba-

Barometri altitudo non mutabatur tempore experimenti.

§. 7. Circa haec experimenta notandum

a) Initio, vbi euaporatio est celerrima propter celeriorem aëris motum cum euaporatione coniunctum bilancem oscillare, vt non appareat, quando aequilibrium restituatur.

b) Aëris temperiem non manere constantem neque aequaliter tranquillum, quod tamen requiritur, si calculus allatus locum habere debet. Hinc forte nec differentiae inter temperiem aquae et aëris sese logisticae accommodant exacte. Primo incommodo imposterum obuiam ire tentabo machina quadam euaporationi destinata. Secundum incommodum difficulter tollitur. Apparet tamen, etiam haec experimenta, quae attuli, legem euaporationis allatam probabilem reddere, et nisi parietes vasorum densiores et corpora contingentia densiora e. g. lanx diutius retinuissent calorem aqua, decrementa etiam caloris se propius accommodasse logarithmicae, vti ex experimentis, quae de decremento caloris communicaui, satis videre licuit. Cum tandem post euaporationem, per interuallum temporis factam superficies totius massae euaporandae mutetur et minor fiat et massa ipsa etiam minuatur, decrementaque caloris in temporibus paruis aequalibus sint in ratione composita ex directa differentiarum temperierum aquae et aëris et superficierum, simulque inuersa voluminum, vt in diss. de inquisitione decrementi caloris ostendi, et horum ratio in calculo non habita sit, cogitare licet, si talem apparatum adhibere licuisset, vt horum omnium rationem in calculo habere potuissem, etiam calculum ipsum experimentis exactius respondisse.

MEDITATIONES DE CALORIS ET FRIGORIS CAVSA,

AVCTORE
Michaele Lomonoſow.

§. 1.

Calorem (*) motu excitari notiſſimum eſt: manus per mutuam frictionem caleſcunt, ligna flammam concipiunt, ſilice ad chalybem alliſo ſcintillae proſiliunt, ferrum crebris et validis ictibus malleatum excandeſcit; quibus ceſſantibus calor diminuitur et productus ignis tandem extinguitur. Porro calore concepto, corpora vel in partes inſenſibiles reſoluta per aërem diſſipantur, vel in cineres ſatiscunt, aut debilitata partium cohaeſione liqueſcunt. Denique corporum generatio, vita, vegetatio, fermentatio, putrefactio, calore promouentur, frigore retardantur. Ex quibus omnibus euidentiſſime patet, *rationem ſufficientem caloris in motu eſſe poſitam.* Quoniam autem motus ſine materia fieri non poteſt, neceſſum igitur eſt, *vt ratio ſufficiens caloris conſiſtat in motu alicuius materiae.*

§. 2. Quamuis autem in corporibus calidis plerumque nullus motus viſu percipiatur, tamen per effectus ſaepius ſe manifeſtat. Ita ferrum ad ignitionem prope cale-

(*) quo nomine et vim eius intenſiorem, ignem vulgo dictam, intelligimus.

calefactum, licet ad oculum quiescere videatur, corpora tamen sibi admota alia fundit, alia in vapores resoluit, hoc est, partibus eorum in motum excitatis, sibi quoque motum alicuius materiae inesse ostendit. Equidem non ibi motus adeo negandus est, vbi nullus in oculos incurrit: quis enim negabit vento impetuoso syluam perflante, folia arborum et ramos agitari, licet e longinquo spectans nullum motum visu assequeretur? Quemadmodum vero hic ob distantiam, sic in corporibus calidis, ob tenuitatem particularum motae materiae, agitatio visum effugit: in vtroque enim casu angulus visionis tam acutus est, vt neque ipsae particulae sub eo constitutae, neque motus earum videri possit. Sed neminem nisi qualitatum occultarum patronum aliquem fore arbitramur, qui calorem, tot mutationum instrumentum, otiosae cuidam et omni motu, adeoque et vi mouendi destitutae materiae tribuat.

§. 3. Quoniam vero corpora duplici motu agitari possunt, *totali*, quo, quiescentibus iuxta se inuicem partibus, totum corpus mutare continuo suum locum, vel *intestino*, qui in mutatione situs insensibilium partium materiae concipitur; et quia totali saepius perniciissimo nullus, et nullo magnus calor obseruatur; patet ergo *calorem consistere in motu materiae intestino.*

§. 4. Materia in corporibus duplex est, *cohaerens*, nempe quae cum toto corpore mouetur et impetum facit, atque fluminis instar poros illius *interlabens*. Quaeritur itaque, quaenam earum in motu constituta calorem gignat. Huic quaestioni vt satisfiat, excutienda sunt palmaria phae-

nomena

nomena, quae circa corpora calida obſeruantur. Ea vero conſideranti occurrit, 1) calorem in corporibus eo maiorem exiſtere, quo cohaerens eorum materia eſt denſior, et contra. Ita laxior ſtupa flammam concipit magnam quidem, ſed aeſtu multo minore praeditam, quam, vbi illa ſtrictius compacta incenditur. Stramine, quod in mitem flammam alias expandi ſolet, ſertilium Ruſſiae camporum, ſyluis carentium, incolae lignorum inſtar vtuntur, indenſos et craſſos rudentes contorto; ligna poroſiora leniore aeſtu ardent, quam quae ſolidiora ſunt, et carbones foſſiles lapideam materiam poris ſuis continentes validius vrunt, quam carbones lignorum vacuis interſtitiis ſpongioſi. Denique aer inferioris atmoſphaerae denſior aura ſuperioris, maiore, quae ambit, afficit tepore, quam illa, vt calidiſſimae valles montibus aeternam glaciem ſuſtinentibus cinctae loquuntur. 2) Conſtat corpora denſiora ſub eodem volumine plus materiae cohaerentis continere, quam interlabentis. Quoniam autem ex legibus mechanicis notum eſt, quantitatem motus eo maiorem eſſe, quo copioſior eſt materia mota, et contra; itaque ſi caloris ratio ſufficiens poſita eſſet in motu inteſtino materiae interlabentis, corpora rariora, ob maiorem copiam in poris eorum materiae interlabentis, maioris caloris capacia eſſent, quam quae denſiora ſunt. Verum quoniam contra quantitas caloris reſpondet potius materiae corporum cohaerentis; Patet igitur *caloris rationem ſufficientem contineri in motu corporum inteſtino materiae cohaerentis.*

§. 5. Confirmatur haec veritas actione coeleſtis illius ignis, cauſticarum ope machinarum corporibus impreſſi, qui

qui remoto foco, eo diutius in illis viuit, quo magis sunt solida, ita vt in rarissimo illorum aëre nullum sensibile tempusculum duret. Accedit insuper, quod pro diuersa corporum grauitate atque duricie diuersus deprehendatur, ita vt eius intensionem ponderi corporis cum ratione cohaesionis partium illius conspiranti proportionalem esse experientia edocuerit, manifesto indicio, cohaerentem materiam corporum materiam caloris eorum esse. Quamuis autem materia cohaerens duplex sit, propria, ex qua corpus constat, et peregrina, quae in spatiolis a propria materia vacuis hospitatur; verum tamen quoniam vtraque cum ipso corpore mouetur, et in vnam massam coaluit, fieri profecto non potest, quin propria in motum calorificum exagitata, eodem simul moueatur peregrina, et vice versa: quemadmodum spongia calida frigidiorem aquam in poros receptam calefacit, et vicissim, calidior aqua frigidiorem spongiam.

§. 6. Motum intestinum triplici ratione fieri posse concipimus; nimirum 1) si particulae corporis insensibiles locum continuo mutant, vel 2) in eodem loco persistendo continuo gyrantur, aut denique 3) per insensibile spatiolum insensibili tempusculo vltro citroque continuo agitantur. Primum genus *progressiui*, alterum *tremuli*, tertium *gyratorii* motus intestini nomine salutamus. Rursum itaque ratio reddenda est, a quonam istorum motuum calor proficiscatur. Quod vt appareat, principiorum loco sequentia ponenda sunt. 1) *Eum motum intestinum caloris causam non esse, siquem in quibusdam corporibus calidis nullum esse fuerit demonstratum.* 2) *Nec eum*

motum inteſtinum cauſam caloris exiſtere, quo praeditum eſt corpus minus calidum, quam aliud, quod eodem motu caret.

§. 7. Corporum liquidorum particulae tam leui nexu inter ſe cohaerent, vt diffluant, niſi duro aliquo corpore cohibeantur, atque nulla fere vi externa opus ſit ad tollendam earum cohaeſionem, ſed ſponte ſua diuelli, a ſe inuicem recedere atque motu progreſſiuo moueri poſſint. Vnde fit, quod nulla ſigna durabilia liquoribus imprimi queant, ſed omnia momento obliterentur. An progreſſiuus inteſtinus motus in omni corpore liquido, etiam gradu caloris vitalis frigidiore, actu fiat, nec ne, non hic disquirimus, cum propoſito noſtro ſatisfactum iri non dubitemus, ſi oſtenderimus dari caſus frequentiſſimos, in quibus ille clariſſime patet. Id circo ſolutiones ſalium in aqua primo in medium producimus. Fit enim lege conſtanti, vt aqua ad ſenſum quieta manui ſenſibile frigus imprimens ſalem marinum, nitrum, ſalemue Ammoniacum in medio fundo vaſis poſitum ſoluens, eum quaqua verſus diſtrahat per totum ſui volumen. Quod cum fieri alias nequeat niſi aqueae particulae abreptas ſalinas moleculas a fruſto ſalis remoueant; ſatis ergo elucet aqueas particulas ipſas motu progreſſiuo ferri, vbi ſalem aliquem diſſoluunt. Idem contingere in argento viuo, cum metalla corrodit et particulas eorum diſtrahit, in ſpiritu vini, cum tincturas ex vegetabilibus elicit, nemo ibit inficias.

§. 8. Contra autem particulae corporum ſolidorum praeſertim duriorum inorganicorum tam arcto nexu vinctae deprehenduntur, vt vi externa eas diuidenti admodum reſiſtant: quamobrem fieri non poteſt, vt ſponte

ſua

ſua rupto cohaeſionis vinculo a ſe inuicem recedant et motu inteſtino progreſſiuo ferantur. Vnde fit, quod etiam ſubtiliſſima ſigna illis inciſa per ſecula durent, nec niſi continuo vſu aut aeris iniuria, aut denique corpore ipſo in ſtatum fluiditatis reducto obliterentur. Magnum his momentum affert aurum, quod ſuperficiei vtenſilium ex argento fabrefactorum inductum per longum tempus eidem adhaeret, nec niſi frequenti vſu diminuitur. Contra vero momento temporis ſuperficiem relinquit et per totam argenti maſſam diſtrahitur, quam primum res ex eo facta et de aurata igne funditur. Haec omnia manifeſto indicant particulas corporum ſolidorum praeſertim duriorum et inorganicorum motu progreſſiuo haud moueri.

§. 9. His ita comparatis, conſideremus primo vas aliquod argenteum, ſeu aliam rem ex eiusmodi metallo fabrefactam, auro obductam et ſubtiliſſimis ſignis inciſis caelatam, ad eum gradum calefactam, in quo aqua ebullire ſolet. Videbimus aurum in ſuperficie inconcuſſum, ſigna nec minimum immutata, ipſam duriciem corporis eandem perſiſtere, eaque ſeparationem inſenſibilium particularum prorſus excludi. Hoc autem clariſſime oſtenditur corpus poſſe eſſe magnopere calidum, ſine motu inteſtino progreſſiuo. Secundo conferemus duriſſimum aliquem lapidem, ex gr. adamantem, qui ad gradum liquefacti plumbi calefactus eſt, (quod ſaepius ſine damno et vlla mutatione gemmae, artifices eum polituri facere ſolent) cum aqua vtcunque frigida ſalem ſoluente, eoque ipſo frigidiore facta, vel cum Mercurio argentum corrodente; priorem inueniemus ſine motu inteſtino progreſſiuo calidiſſimum,

posteriorem eodem motu agitari, calorem tamen adeo exiguum in se prodere, euidentissime que ostendere, saepius fieri, vt corpora motu progressiuo intestino praedita multo minus calida sint iis, quae eodem motu destituuntur. Ex his autem vi principiorum superius (§. 6.) allatorum sequitur *motum materiae cohaerentis intestinum progressiuum caloris causam non esse.*

§ 10. Ex definitione motus intestini tremuli (§. 6.) clare perspicitur, illo corporis partes agitante, ipsas cohaerere non posse. Quamuis enim distantiae, quibus subtilissimae vibrationes absoluuntur, sint maxime exiguae, fieri tamen non potest, quin particulae a mutuo contactu recedant, et plerumque extra illum versentur. Ad sensibilem cohaesionem portium corporis requiritur non interruptus earundem mutuus contactus; corporis ergo partes nulla cohaesione sensibili vinciri possunt, si illae tremulo intestino motu concutiuntur. Verum quoniam pleraque corpora ad ignitionem vsque vstulata fortissimam partium cohaesionem conseruant; id circo patet *calorem corporum a motu intestino tremulo materiae cohaerentis haud proficisci.* (§. 6.)

§. 11. Remotis igitur progressiuo et tremulo intestinis motibus, necessario sequitur *calorem consistere in motu intestino gyratorio* (§. 6.) *materiae cohaerentis* (§. 4.) necesse enim est vt cuidam ex tribus tribuatur.

§. 12. Quaeri autem hic potest, vtrum particulae corporum solidorum durante firma cohaesione mutua iuxta se inuicem gyrari possint. Huic quaestioni vt satisfiat, sufficit in mentem reuocare duo marmora politis super-

ſuperficiebus in contactu poſita iuxta ſe inuicem facile moueri, fortiſſima cohaeſione, qua vinciuntur, nihil obſtante; item vitra lenticularia vbi poliuntur, formae celerrime in gyrum agitatae ita adhaerere, vt ea ſecundum lineam plano contactus perpendicularem ſine damno remoueri nequeant. His conſideratis clariſſime concipi poteſt, particulas corporum minutiſſimas iuxta ſe inuicem, cohaeſione haud obſtante, gyrari poſſe, eo facilius, quo plana contactus ad ſuperficies integras fuerint in ratione minore. Ceterum fluidorum particulas, cum plerumque motu inteſtino progreſſiuo moueantur, cohaeſione nil morante, etiam in gyrum agi poſſe, ſalua eadem, aperte patet.

§. 13. Ex hac noſtra theoria ſequentia corollaria deducuntur. 1) Ad motum noſtrum calorificum nulla corpuſcula materiae ſphaericis eſſe aptiora, cum non niſi in puncto vnico ſe mutuo contingere poſſint, et frictionem vix aliquam in ſe inuicem exercere. 2) Cum omnis motus prout quantitas intendi et remitti poſſit, idem ergo de calorifico motu eſt ſentiendum. Quo autem motus eſt maior, eo effectus validior eſſe debet; vnde creſcente motu calorifico, hoc eſt, actis celerius in gyrum particulis materiae cohaerentis, calorem intendi, decreſcente remitti neceſſe eſt. 3) Corporum calidorum particulas celerius gyrari, frigidorum tardius. 4) Corpora calida contactu frigidorum refrigerari, retardato per illum motu calorifico, et contra frigida calefieri, eodem per contactum accelerato. 5) Quando itaque manus calorem ſentit in aliquo corpore, particulae materiae cohaerentis manus in celeriorem motum gyratorium excitantur; ſin vero ſenſu frigidioris materiae afficitur, gyratorius illarum motus retardatur. §. 14.

§. 14. Nulla demonſtrandi methodus certior eſt ea mathematicorum, qui deductas a priori propoſitiones exemplis vel examine inſtituto a poſteriore confirmare ſolent. Id circo noſtram theoriam vlterius proſequuturi, ad exemplum eorum phaenomena praecipua, quae circa ignem et calorem obſeruantur, explicando aſſertum §. 11. veriſſimum eſſe confirmabimus.

Phaenom. 1. §. 15. Corporibus duris ſe mutuo fricantibus, vnum eorum ſuper alterum mouetur ſuperinceſſu radente, vnde ſequitur particulas in ſuperficiebus frictionis Tab. VI. conſtitutas in ſe mutuo impingere. Ponamus ergo corpus AB moueri ſuper corpore CD ex B verſus A; particula *a b* impinget parte ſuperficiei *b* in partem ſuperficiei *c* particulae *cd*, adeoque particula *a b* ſollicitabit ad motum particulam *cd*, et contra particula *c d* vi reſiſtentiae ſuae ſollicitabit ad motum contrarium particulam *ab*. Cum vero vtraque corpori duro inhaereat, ideo loco ſuo cedere et motu progreſſiuo moueri non poteſt, motus autem corporis AB non ceſſat; conſequenter particula *c d* mouebitur circa centrum ſuum verſus eam directionem, ſecundum quam vrgetur a particula *ab*, particula vero *a b* mouebitur circa centrum ſuum ſecundum eam directionem, verſus quam retardatur a particula *c d*, hoc eſt vtraque mouebitur motu gyratorio. Hac ratione ſingulis particulis, quae in plano frictionis conſtitutae ſunt, in gyrum actis, etiam reliquae particulae, corpora AB et CD conſtituentes, propagata frictione in motum gyratorium excitantur. Hinc igitur patet, qui fiat, vt corpora ſolida per frictionem mutuam incaleſcant; denique ſequentia corol-

corollaria eliciuntur. 1) Quo fortius fricandae ſuperficies corporum AB et CD comprimuntur, quoque celerius iuxta ſe innicem mouentur, eo validius particulas *ab* et *cd* ad motum gyratorium ſollicitari, eoque celerius corpora ipſa incaleſcere. 2) Quoniam corporum liquidorum particulae leuiſſime inter ſe cohaerent, et loco facillime cedunt, particulae igitur *ab* et *cd*, ſi fuerint in ſuperficiebus corporum liquidorum, cedendo ſibi inuicem, eum motum gyratorium concipere nequeunt, quem ſolidis affixae acquirunt. Hoc autem efficitur, vt non ſolum fluida per frictionem, quae inter maſſas liquoris exagitati exoritur, ſed ne ſolida quidem, quam diu ſuperficies liquido corpore delibutas habent, vnquam ſenſibiliter incaleſcant. Phaenom. 2. Phaenom. 3.

§. 16. Quando virga ferrea longiore fricatur clauus, tum ſingulae particulae in ſuperficie virgae conſtitutae impingunt in particulas claui, ſibi obuias. Quoniam autem ſuperficies virgae radens maior eſt, quam ſuperficies claui, maior ergo vis particularum impingit in ſuperficiem claui, quam inſuperficiem virgae; conſequenter particulae clauum conſtituentes crebrioribus ictibus exagitatae promptius in motum gyratorium excitari debent, quam particulae ex quibus virga conſtat. Vnde mirum non eſt, clauum prius incaleſcere quam virgam. Phaenom. 4.

§. 17. Ferrum frigidum vbi exagitatur malleis, praeſertim ad angulos abliquos illiſis, pars maſſae ferreae malleo impetita cedit, iuxta ſibi vicinam, quae ictum non ſenſit, pellitur, et non ſecus ac corpus arctiſſime alteri ſuperficie tenus applicatum, validiſſimoque ſuperinceſſu radente Phaenom. 5.

dente incedens eam fricat; ingruente vero frequentiore ictuum impetu, frictio inter exagitatas ferreae maſſae partes multiplicatur, motus que gyratorius particularum ferri vſque adeo increſcit, vt illud aliquando ad rubedinem igneſcat. Non aliter fit, quando bacillus quicunque me-
Phaenom. 6. tallicus, non elaſticus praeſertim, reciprocis inflexionibus multoties incuruatur: etenim in latere eius conuexo partes maſſae ſecundum directiones contrarias diſtrahuntur, iuxta ſe inuicem ſuperinceſſu radente ſerpunt, fricantur, gyrantur, et curuatura bacilli incaleſcit.

§. 18. Si corpus magis calidum A eſt in contactu cum alio corpore B, quod eſt minus calidum, particu-
Phaenom. 7. lae corporis A in contactu conſtitutae, quoniam celerius gyrantur, quam particulae corporis B illis contiguae (§. 13) celeriore igitur rotatione accelerant motum gyratorium particularum corporis B, ſcilicet partem motus ſui illis communicant; adeoque tantum his decedit quantum accedit illis: hoc eſt quando particulae corporis A motum gyratorium particularum corporis B accelerant, ſuum tardiorem reddunt. Hinc fit, vt corpus A per contactum caleſaciens corpus B ipſum refrigeretur.

§. 19. Ceterum particulae corporis B in ſuperficie contactus motae contingunt alias particulas eiusdem corporis a ſuperficie contactus remotiores, quae motu ſuo per mutuam frictionem cum anterioribus accelerato etiam alias ſibi vicinas in gyrum agunt, et ſic motus inteſtinus gyratorius a ſuperficie contactus vſque ad ſuperficiem oppoſitam ſucceſſiue propagatur. Contra vero particulae corporis A in plano contactus conſtitutae quoniam in motu

in ſuo retardantur, (§. 18.) ideoque alias ſibi contiguas, hae vero alias atque alias ſucceſſiue vſque ad ſuperficiem contactui oppoſitam praepediunt. Hinc perſpicitur, vnde fiat, vt corporis minus calidi, appoſiti corpori magis calido, ſuperficies in contactu conſtituta prius incaleſcat, quam auerſa, et corporis calidioris admoti corpori frigidiori contigua ſuperficies prius refrigeretur, quam eidem oppoſita.

§. 20. Si corporis minus calidi A ſuperficiebus oppoſitis admouentur duo corpora magis calida B et C, ab vtraque ſuperficie propagabitur motus inteſtinus gyratorius verſus alteram, adeoque integrum corpus A celerius occupabit, quam ſi ab vno latere profectus ad alterum pertingere opus haberet, ad moto nempe corpore alterutro B vel C; pariter ſi corpus A eſt magis calidum quam B et C, corpora vtrinque illi admota; motus gyratorius particularum eius celerius debet retardari quam ſi corpus A vno latere eſſet in contactu cum corpore minus calido B vel C. Hinc ſequitur particularum motum gyratorium eo celerius intendi vel remitti, quo maior ſuperficies exponitur corpori calidiori vel frigidiori ambienti. Quoniam autem ſuperficies corporum ſimilium ſunt in duplicata, ſoliditates vero in triplicata ratione diametrorum, rurſum igitur euidens eſt, quare corpora calida eiusdem generis, maioris voluminis in eodem medio ambiente, ex gr. aere, et eiusdem figurae tardius refrigerantur, frigida vero tardius calefiunt, quam ſi eiusdem voluminis eſſent. phaenom. 9 phaenom. 10

§. 21. Corpora mota et quieſcentia reſiſtunt pro ratione inertiae, quam grauitati proportionalem eſſe con-

ſtat; particulae igitur grauiores difficilius eadem vi in motum calorificum excitantur, vel motae retardantur, quam quae leuiores ſunt. Iterum ergo perſpicuum eſt, cur corpora frigida ſpecifice grauiora in eodem medio calefaciente tardius calefiant, calida vero in eodem medio frigido tardius refrigerentur, quam ſpecifice leuiora.

phaenom. 11 §. 22. Duriorum corporum particulas fortius cohaerere quam molliorum, certum eſt. Inde vero amplioribus planis contactus easdem iungi haud incongruum videtur. Pro ratione vero planorum contactus etiam particulas ipſas craſſiores eſſe oportere probabili adeo coniectura conſequimur, hoc eſt corporum duriorum particulas eſſe mole maiores iis, quae molliora conſtituunt. Accedit, quod duriorum corporum particulae plerumque ad tactum ſint aſperae atque adeo ſenſibus craſſitudinem ſuam exerant? Quoniam autem corpora maioris voluminis, ceteris paribus, difficilius ex quiete in motum excitari, et mota retardari atque cohiberi poſſunt, quam minora; vnde craſſiores particulae duriorum corporum haud tam facile calorificum motum et recipiunt et ammittunt, quam ſubtiliores molliorum. Non abſcure igitur hinc colligi poteſt ratio, cur duriora corpora ad calorem concipiendum et amittendum ſunt tardiora, quam illa, quae molliora ſunt.

phaenom. 12 §. 23. Particulae corporum calidorum quoniam gyrantur, rationi itaque conſentaneum eſt, eas motis ſuperficiebus ſuis in ſe inuicem agere, adeoque vnamquamque ab alia ſibi vicina pelli, eo fortius, quo motus gyratorius eſt pernicior. Huic repulſioni quoniam contraria eſt cohaeſio particularum, id circo vna earum alteri

derogat

derogat, atque adeo crescente motu gyratorio cohaesionem particularum minui oportet. Vide minime mirum est vi caloris solidorum etiam corporum duritiem debilitari, imo ita infringi, vt prorsus tollatur particularum cohaesio, quorum prius in liquefactis, posterius in resolutis in vapores experimur.

§. 24. Hinc sequitur 1) liquiditatis et fluiditatis corporum causam esse motum particularum gyratorium, cuius vis repulsiua sufficit ad illarum cohaesionem eousque infringendam, donec vel sibere iuxta se inuicem labi et diffluere possint, vel sublato prorsus earum nexu per auras dissipari. 2) Euaporationum et exhalationum causam plerumque in eo consistere, vt pro vario aeris statu, varia vi concurrente calorifico, eoque centrifugo simul motu, particulae corporum auulsae dissipentur. 3) Corpora fluida et liquida semper calorem in se, licet minimum, habere, quantumuis frigida appareant.

§. 25. Corpus A agens in corpus B maiorem celeritatem motus illi imprimere non potest, quam habet ipsum. Si igitur corpus B fuerit frigidum et immersum corpori fluido calido A; particularum corporis A motus calorificus excitabit in motum calorificum particulas corporis B; verum in particulis corporis B celerior motus excitari non poterit, quam qui est in particulis corporis A, atque adeo corpus frigidum B immersum corpori A maiorem calorem, quam A habet, concipere non posse patet. Hinc autem perspicitur ratio ob quam stannei vasis, aqua pleni, fundum validae adeo flammae, qua alias hoc metallum facile funditur, resistere solet. phaenom. 13 phaenom. 14

Etenim quamuis flamma particulas ſtanni in celerrimum motum ſollicitet, aqua tamen ſuperincumbens, cum eam celeritatem motus calorifici acquirere non poſſit, qua ſtanneae particulae indigent ad ſuam cohaeſionem infringendam, retardat ergo earum motum gyratorium, nec fundi metallum permittit.

§. 26. Reddenda hic videtur eſſe etiam ratio extenſionis corporum, quae plerumque cum calore eorum augeri et minui ſolent. Verum quoniam ea non a calore immediate, ſed ab aëre elaſtico poris corporum incluſo proficiſcitur; ad aliam ergo occaſionem huius phaenomeni expoſitionem reſeruamus. Ceterum nulla motus celeritas tam pernix aſſignari poteſt, qua alia maior mente non concipiatur. Quod cum etiam ad calorificum motum iure referri poſſit; caloris ergo ſummus et vltimus gradus poſſibilis reſpectu motus non eſt. Contra vero idem motus eouſque diminui poteſt, vt tandem corpus prorſus quieſcat, nec vlla motus diminutio vlterius ſubſequi poſſit. Summum igitur gradum et vltimum frigoris in abſoluta quiete a motu gyratorio particularum conſiſtere et dari poſſe neceſſe eſt.

§. 27. Quamuis autem ſummus frigoris gradus ſit poſſibilis, verum documenta non deſunt, quibus aſſeritur, illum in hoc orbe terraqueo haud vſpiam dari. Etenim omne, quod nobis frigidum apparet, eſt ſolummodo minus calidum, quam organa noſtra, quibus ſentimus. Ita frigidiſſima aqua eſt adhuc calida, cum glacies, in quam aqua acutiore gelu conſtringitur, ſit illa frigidior, hoc eſt minus calida. Profecto ſi cera, quae liqueſcit, ſit vere calida

lida, cur igitur aqua, quae nobis frigidiſſima apparet, revera calida non ſit, cum nil aliud ſit quam glacies liquefacta. Nec tamen putandum eſt congelationem corporum ſummi frigoris eſſe criterium: etenim metalla ſtatim poſt liquefactionem conſolidata ſunt etiam glacies ſui generis, ſunt tamen ita calida, vt corpora cambuſtilia ſibi admota accendant. Ceterum dantur corpora fluida, quae nullo gradu frigoris cognito congelantur. Quorum fluiditas quoniam a motu calorifico proficiſcitur (§. 24.) patet igitur fluida illa corpora calore, quantuscunque ille ſit, ſemper gaudere. Porro corpora eundem gradum caloris habere ſolent, quo praeditum eſt medium, in quo illa tempus notabile verſantur. Cum vero aer ſemper et vbique fluidus obſeruatur; adeoque calidus (per demonſtrata) exiſtit, omnia ergo corpora, quae ambit atmoſphaera tellaris, ſunt calida, licet ſenſibus frigida appareant; adeoque ſummus gradus frigoris in globo noſtro terraqueo non datur.

§. 28. Cum itaque motum inteſtinum gyratorium materiae cohaerentis cauſam caloris eſſe a priori demonſtratum et a poſteriori confirmatum habeamus; ad mentem, quam moderni philoſophi plerique de calore habent, examinandam conuertimur. Tribuitur hac noſtra tempeſtate caloris cauſa peculiari cuidam materiae, quam plerique calorificam, quidam aetherem, non nulli etiam ignem elementarem appellant. Eo autem maior quantitas eius in quocunque corpore adeſſe dicitur, quo maior in eo calor obſeruatur, ita vt pro diuerſo gradu caloris eiusdem corporis etiam quantitas materiae calorifi-

cae in illo augeatur minuaturue. Et licet aliquando intensitate motus huiusce materiae corpus ingressae calorem in eo augeri doceatur, maxime tamen ingressus et decessus illius in diuersa quantitate pro genuina causa aucti vel diminuti caloris celebratur. Quae opinio cum in multorum mentibus tam altas egit radices, tantumque invasuit, vt passim in Physicorum scriptis legas, memoratam superius materiam quasi phyltro quodam amatorio allectam in corporum poros irruere, aut contra horrore quasi exagitatam ex poris erumpere; quamobrem muneris nostri esse ducimus hanc hypothesim ad examen reuocare. Praesertim autem fontes ipsi lustrandi sunt, ex quibus haec opinio promanauit. Eorum autem praecipui sunt quatuor, quos equidem ad alia potius naturae phaenomena diluenda deriuari oporteret.

§. 29. Post quam calescentium corporum phaenomena attentius considerare coeperunt philosophi, facile animaduerterunt, crescente calore, etiam volumen corporis cuiusque augeri. Et cum nihil praeter calorem illis accessisse certo scirent, atque elementaris antiquorum ignis animis adhuc inhaereret; concludere inde non dubitarunt, materiam aliquam igni propriam, poros corporum, cum incalescunt, intrare, eaque distendere; qua decedente eadem refrigerari, contrahi. Lubenter equidem his assensum praeberemus, si quam facile sit haec supponere, tam pronum quoque esset ostendere id, quo calorifica materia in corpora subito incalescentia compellatur. Qui enim fit, quaeso, vt hyeme frigidissimo gelu late omnia occupante, aut

aut in gelidiſſimo fundo maris (*) adeoque iuxta hanc hypotheſin, calorifica materia fere prorſus deficiente, puluis pyrius exigua ſcintilla, repente nata, accenſus ſtupenda flamma ſubito expandatur? Vnde et qua tam mirabili virtute ignea illa materia momento temporis contrahitur? Verum tamen conuolet ea ocyſſime, quacunque de cauſa id fiat, ex remotiſſimis etiam locis et puluerem pyrium accendat, expandat? Sed tum neceſſum erit, aut alia corpora illum ambientia aduolante igne prius quam ipſum calefieri et expandi, aut ignem illum aduolantem extra puluerem nec calefacere nec expandere aliquid, adeoque naturae ſuae obliuiſci fatendum erit, quorum tamen prius experientiae, poſterius ſanae rationi apertiſſime repugnat.

§. 30. Ceterum rerum natura ita comparata eſt, vt cauſa creſcente, etiam effectus eius augeatur, et contra eadem decreſcente effectus quoque minuatur. Quamobrem vbi in duobus corporibus idem gradus caloris obſeruatur, tum, ceteris paribus, etiam idem extenſionis incrementum aut decrementum in vtroque eſſe debet. At quanta in hoc diuerſitas deprehenditur! Praetereo aerem, qui a gradu congelationis ad ebullitionem aquae tertia ſui parte extenditur, cum ea interim vna vigeſima ſexta parte totius voluminis augeatur. Ipſa eiusdem fere liquiditatis corpora, vt Mercurius, aqua, ſpiritus vini, et olea diuerſa, item et ſolida, vt metalla, vitrum etc. mirum quantum diſcriminis habent inter extenſionis incrementa in eodem gradu caloris acquiſita. Ne hic tamen maiorem par-

(*) Boerhaaue Elem. Chym. par. 2. ex Sinclairi ante gruitatis p. 302.

partium cohaesionem expansionis impedimento esse quis putet: quippe chalybem fortiore partium cohaesione gaudere quam ferrum nemo est qui ignorat, maiora tamen incrementa extensionis capere, ferrum autem minora experientia docuit. Sic et aurichalcum, corpus cupro durius, eodem calore magis quam id expanditur. Nec etiam aliqua retardatio incalescentiae a maiore pondere profecta, aut quaecunque alia circumstantia, quae in diversis corporibus expansionis impedimento foret, fingi potest, quin exempla contraria occurant, quae ficta destruant, quam diu expansio calefactorum ingredienti materiae tribuitur. Sed haec in diuersis. At vnum idemque corpus aliquando crescente calore in minus spatium contrahitur, eg. aqua ex glacie nata est specifice grauior illa, vt etiam ad insignem gradum calefacta eandem fundum petere prohibeat. Sic ferrum et pleraque alia corpora, quamdiu dura sunt, iisdem *ipsis* liquefactis ob maius volumen innatant, quamuis eum gradum caloris non dum habeant, quo liquescere solent. Ex his autem omnibus clarissime apparet, expansione incalescentium contractioneque eorum, quae refrigerantur, calorificae materiae miram illam peregrinationem minime probari.

§. 31. Sed hunc pugilem propria sua extensionis vastitate iam labefactum alius forte qui succedit, eriget, et maiore grauitate nos opprimet. Nempe non molis modo, sed etiam ponderis incremento vagabundus ille ignis praesentiam suam in corporibus demonstrare Philosophis videtur, praesertim Chymicis. Celeberrimus Robertus

tus Boyle primus, ni fallor, experimentis docuit corpora per calcinationem pondere augeri (*) adeoque ignis et flammae partes ſtabiles et ponderabiles reddi poſſe. Quod ſi de igne aliquo elementari intelligi poſſet, firmum haberet infirmanda hic opinio propugnaculum. Verum tamen pleraque fere omnia experimenta illius, circa augmentum ponderis per ignem inſtituta, huc redeunt, vt vel flammae, qua corpora vſtulauit, aut aeris, calcinationis tempore ſuper corpus calcinandum fluentis, partes graues eſſe iis demonſtretur. Etenim vbi lamina metallica flamma ſulphuris accenſi vſtulatur, intumeſcit quidem et pondere augetur; nihil aliud tamen aucti ponderis cauſa eſt, praeter acidum ſulphuris, quod a phlogiſto liberari et campana colligi et capi ſolet, tum poros cupri et argenti penetrat, illiſque concretum, pondus auget. Sic vbi plumbum in minium calcinatur, flammam atram et fuligine turgidam in liquefactum metallum conſulto diſtinguunt artifices: haec enim ſola plumbi calcem rutilo illo colore ornat, et pondus eius cum lucro artificum auget. Reliqua laudati auctoris experimenta in mantiſſa opuſculo ſubiuncta maioris quidem momenti eſſe videntur, verum omni ſuſpicione prorſus libera nonſunt, cum auctor ipſe illis praeſto non adfuerit, verum operatori cuidam ſaepius peragenda remiſerit. At eſto, quod praeter partes corporis accenſi vel particulas in aere circumuolitantes, qui ſuper calcinata continuo fluit, accedat metallis calcinationi durante quaedam alia materia, quae pondus calcium auget. Quoniam autem calces ab igne re-

(*) Introductio de ponderabilitate ignis et flammae.

motae acquiſitum pondus etiam frigidiſſimo gelu continuo ſeruant, nullum tamen exceſſum caloris in ſe oſtendunt; accedit igitur calcinationis actu materia quaedam corporibus, verum non illa, quae igni propria eſſe praedicatur. Cur enim ea in calcibus naturae ſuae obtiuiſceretur, non video. Porro calces metallorum in formam metallicam reductae pondus acquiſitum amittunt. Cum vero reductio aeque ac calcinatio eodem imo fortiore igne perficiatur, nulla profecto ratio reddi poteſt, cur idem ignis modo corporibus ſemet inſinuet, modo ex iiſdem excutiatur. Ceterum non abſimilia experimenta inſtituerunt viri celebres Boerhaauius (*) et du Clos (**) quae contrarium tueri videntur. Prior enim ferri libras quinque et vncias octo, vt ante ignitionem ita quoque ignitum et extinctum ponderauit, ſed nullum ponderis incrementum decrementumue deprehendit. Poſterior ponderis augmentum, quod mineralibus per calcinationem accedit, deducit a partibus ſulphureis, aeri (vt ſupra diximus) innatantibus, qui ſuper mineralia ad calcinandum expoſita continuo fluit, et illas igne ita reſolutis inſinuat; id autem experimento demonſtrat: nimirum quod ex regulo antimonii in aere libero calcinato ope ſpiritus vini tincturam rubram extrahi obſeruauit, qua ſeparata, maſſam relinqui eius ponderis, quod regulus habebat ante calcinationem. 2) Regulum antimonii aliter, nempe ſine augmento ponderis, calcinatum eiusmodi tincturam non ſuppeditare. Firma igitur non ſunt etiam illa argumenta, quae ad peculiarem igni

mate-

(*) Elem. Chim. Par. 2 deigne exper. 20.
(**) Memoires de l'Acad. Royl. des Sciences année 1667.

materiam vindicandam ex augmento ponderis calcinatorum corporum afferuntur.

§. 32. Radii ſolis ſpeculo vitreo cauſtico excepti et collecti non minus valide vrunt, quam viuide lucent, qua re ad oculum et quidem ſole teſte demonſtrari creditur, calorificam materiam ſeu ignem elementarem a ſole profectum in foco condenſari, eoque ſplendorem et calorem intendi. Facile autem apparet ſupponi hic luminis materiam a ſole tanquam a fonte fluminis inſtar diffundi. Quae hypotheſis ei ſimillima eſt, ac ſi aerem a corpore ſonoro eadem, qua ſonus propagatur, celeritate quaqua verſum diffundi doceretur. Nec minus euidens eſt ibidem aetherem et radium confundi, qui tantum inter ſe differunt, quantum motus et materia inter ſe diuerſa ſunt, atque adeo ex foco ſpeculi condenſationem materiae igneae remoueri et conſpirationem motus calorifici ſubſtitui poſſe liquet. Materiam aetheris in foco vitri vel ſpeculi cauſtici condenſari qui affirmat, is, me iudice, non aliter ſentit, ac ſi contenderet in foco fornicis elliptici non radios ſonoros conſpirare, ſed materiam aeris ipſam comprimi. Ceterum focum ſolarem non propter maiorem denſitatem materiae aethereae, ſed propter motum eius calorificum urentiſſimum eſſe focus a lunari ſidere reflexorum ſolis radiorum manifeſto indicat. Is enim cum ſit lucidiſſimus, vrentiſſimum quoque eſſe oporteret, ſi ille ipſe et calor a denſitate materiae proficiſceretur. Sed abeſt calor; aut ergo materiae aethereae condenſatio, aut conſpiratio motus eius lucidum focum efficiat. Materiae condenſationem excludere eſt pugnare contra hypotheſim;

conſpirationem motus remouere eſt materiam igneam ſaepe frigidam, hoc eſt ignem non ignem eſſe, fatendum erit. Haec qui mente a praeiudiciis libera conſiderabit, nobiſcum ſentiet, aeſtu qui in foco cauſticae machinae generatur, materiam calori propriam minime demonſtrari poſſe.

§. 33. Sale culinari niui vel glaciei raſae mixto confici ſolet a Phyſicis materia, frigorifica ab effectu dicta, quod aquam ſibi in vaſe aliquo inſertam in glaciem conuertere ſoleat. Quod dum fit, nix ipſa cum ſale liqueſcit. Hinc rurſum concludi ſolet, materiam illam igneam ex aqua in niuem circumpoſitam demigrare et acceſſu illius hanc liqueſcere, illam vero ob deceſſum eiusdem in glaciem conſtringi. Eggregie quidem! Sed reſtat aliquid tentandum, priuſquam palmam nobis eripi patiamur. Inſere, quaeſo, niui thermometrum ſimul cum aqua in vitro contenta, admiſce niui ſalem; videbis quidem aquam in glaciem conuerti et mixturam frigorificam deliqueſcere, ſpiritum tamen in thermometro deprimi, manifeſto indicio, eo ipſo tempore, quo aqua conglaciatur, mixturam frigorificam frigidiorem reddi, adeoque nullum ignem elementarem in eam ex aqua prorumpere; ſed potius niuem tepidioris aquae contactu prius reſolutam ſalem aggredi, ſoluere, refrigerari, maioremque gradum caloris, quam aqua in glaciem abiens habere ſolet, aquirere, inde aquam puram in vaſe cangelaſcere, ipſam vero niuem ob ſalem abſorbtum liquidam perſeuerare. Quis enim ignorat in aqua ſale impregnata aliam puram vitro incluſam ad gradum thermometri Fahrenheitiani 26 in glaciem conuenti, ſalſa liquida manente. §. 34.

§. 34. His omnibus nil aliud contendimus, quam calorem corporum condenſationi ſubtilis alicuius et ad illum dunctaxat deſtinatae materiae vindicandum non eſſe, ſed eum conſiſtere in motu inteſtino gyratorio materiae cohaerentis corporis calidi; eoque ipſo non ſolum aſſerimus etiam ſubtiliſſimam illam materiam aetheris, qua omnia ſpatia a ſenſibilibus corporibus vacua replentur, eiusdem motus et caloris eſſe capacem; verum etiam affirmamus illam impreſſum ſibi a ſole motum calorificum etiam telluri noſtrae et reliquis corporibus mundi communicare, eaque calida reddere, atque adeo eam eſſe medium, quo corpora a ſe inuicem remota, nullo ſenſibili intercedente, calorem communicent.

§. 35. Remota materia calori alias enice conſecrata finis verbis imponendus eſſet, ſi a parte contraria novum nobis negotium non inſurgeret. Non enim deſunt, qui etiam frigori ſpecialem ſubſtantiam dicauerint, nimirum cauſam eius poſitiuam in ſalibus ſtatuerint, producto per ſolutionem eorum in aqua frigore moti. At quoniam iidem ſales etiam calorem non raro gignunt, vt ſal communis affuſo oleo vitrioli feruet et incaleſcit; id circo nos quoque pari iure caloris cauſam ſalibus ad ſcribere poſſemus, ſi tam incondite diſputare non indignum eſſe putaremus.

TENTAMEN THEORIAE
DE VI AERIS ELASTICA,

AVCTORE
Michaele Lomonoſow.

§. 1.

Poſtquam antliae pneumaticae vſus innotuit, mirum quantum ſcientia naturalis cepit incrementum, ea potiſſimum parte, quae de natura aëris doctrinam complectitur. Proprietates enim illius, quae ante ſeculum prorſus ignotae fuerant, iam hodie non ſolum cognitas habemus, verum etiam mathematicis legibus definitas et in ſummo fere faſtigio diſtinctae cognitionis conſtitutas miramur. Quamuis autem elaſtica eius vis ſaepius quam requae proprietates illius Phyſicorum ſcriptis celebratur, et cuilibet horum ſcientiae naturalis ingredienti inter *palmarias* rerum naturalium qualitates ſeſe offert; nihilo tamen minus cauſa illius non dum ſatis perſpecta habetur, in eaque explicanda etiam celebrium naturae ſcrutatorum ingenia caſſo molimine torſa ſunt. Vnde ſcriptores Phyſici plerunque intacta elateris cauſa in ſolis effectibus illius deſcribendis acquieſcunt. Aut ſiqui cauſas aſſignant; eae tamen et inualido pede nituntur, et phaenomenis circa elaterem aeris obſeruatis explicandis non ſufficiunt. Plerumque autem eo ipſo plane nullae ſunt, quod nihil praeter quaeſtionem ipſam, verbis duntaxat mutatis in ſe contineant.

§. 2.

§. 2. Prae omnibus vero, quae hucusque ex Physicorum scriptis nobis innotuerunt, hypothesibus, ad explicandam vim aeris elasticam formatis, plausibiliores esse videntur eae, quae legibus motuum centralium superstructae sunt. Non enim eadem quaestio variata phrasi involuta in illis pro causa ipsa affertur; aut quae proponuntur a motus regulis aliena sunt. Et nos suscepto hoc negotio actum equidem ageremus; si non quaedam ad huc desiderari, aut verius exundare in praeclaro hoc invento videremus.

§. 3. Superfluum nempe esse censemus, vt ad elateris aeris causam exponendam in auxilium vocetur eiusmodi peregrinum fluidum, qualia plerique consuetudine seculi, subtilium materiarum feracis, ducti, iusto saepius ad explicanda rerum naturalium phaenomena vsurpare solent. Ipsius enim aëris subtilitate atque agilitate contenti, in propria eius materia elateris causam quaerimus. Id autem non iniuria facere nos aestimabit, quicunque meditationes nostras de caloris causa legit, et quae sequuntur, cum iisdem conferet.

§. 4. Vt vero in suscepto hoc negotio iusto ordine progrediamur, a clara notione elateris aeris incipimus: id circo et definitionem tractationi huic praemittimus atque vim illam in conatu aeris quaqua versum sese expandendi consistere dicimus. Hinc autem concludimus particulas aëris insensibiles a se inuicem recedere, quam primum remotis obstaculis re ipsa expanditur. Vbi tandem duo consideranda veniunt, natura particularum ipsarum et vis qua a se inuicem remouentur.

§. 5.

§. 5. Particulae aëris duplici modo concipi possunt, nimirum vel singulae ita sunt comparatae, vt vi compositionis alicuius, organicaeve structurae partes suas, exquibus constructae sunt, extendere nitantur, adeoque singulae in maius et minus spacium expandi contrahique possint; aut ab omni compositione physica organicaque structura alienae, non solitariae, sed in aggregato elasticam virtutem exerceant.

§. 6. Prius praeter id, quod simplicissimo naturae ingenio sit maxime incongruum, etiam pellucidiatem et inconcissam aeris durabilitatem tollere videtur. In compositis enim et organicis dari debent partes, quae vi caloris, ad excitandum maiorem elaterem, magis magisque exagitentur. Vnde cum aer calore solis rarescit, fiat necesse est, vt radii illius quamlibet particulam penetrent. Quibus quoniam ex fluido aethereo ambiente (vel si mauis ex vacuo) in solidas particulas, quae in illo subsident, adeoque specifice grauiores sint, *infinities* transeundum erit; id circo fieri id nequit, nisi in qualibet particula aeris in ingressu et egressu refractionem patiantur. Et quamuis in particulis eiusmodi refractio forte fiat infinite parua; a superficie tamen atmosphaerae ad tellurem vsque ipsam in particulis numero infinitis refracta lux ita foret debilitata, vt nos sempiterna in nocte versari oporteret. Id autem simili exemplo confirmatur: particulae enim seu moleculae aquae ex atomis eius aggregatae, quae nubes constituunt, etiamsi leuiter admodum lucem singulae refringunt, et in spatio non nimis magno pellucidiati aëris non officiunt; densius tamen et altius congestae picéo colore coelum obducunt, et lucis meridianae vsum fere omnem aliquando prohibere solent. §. 7.

§. 7. Denique vbi tantas aeris viciſſitudines, rapidiſſimos motus, perniciſſimas colliſiones et fortiſſimas frictiones cum corporibus duriſſimis, premente integra atmoſphaera conſideramus, et Roberuallii experimentum, qui per 15 annos aerem valide compreſſum detinuit et tandem elaterem eius illibatum inuenit, in mentem reuocamus; tum ſingulas particulas aëris, tam ſubtiles, organicas aut compoſitas eſſe et multis partibus ſtupendae exilitatis, ſumme mobilibus indeque leuiſſime inter ſe connexis conſtare, ne concipere quidem poſſumus. Id circo quod §. 5 poſterius eſt, amplectimur, nullique dubitamus *particulas aeris*, nempe eas, *quae in exercendo elatere a ſe inuicem recedere nituntur*, *ab omni compoſitione Phyſica*, *atque organica ſtructura liberas*, *et*, vt tantis viciſſitudinibus ferendis, ſtupendis que effectibus producendis pares ſint, *ſolidiſſimas atque nulli inflexioni obnoxias eſſe*; adeoque iure *atomos* vocari debere. Quae quoniam in res corporeas naturaliter agunt, ipſae etiam ſint corporae atque *extenſae*, neceſſe eſt.

§. 8. Quod ad figuram atomorum aeris ſpectat, nullam equidem aliam agilitati, firmitati, ſimplicitati atque molliſſimae aeris naturae magis conuenire poſſe cenſemus, quam quae ad ſphaericam proxime accedit; idque ex reflexione aeris in fornicibus ellipticis obſeruata non obſcure colligimus. Quoniam autem calidus aer frigida, quae ambit corpora calefacit; atomi ergo illius particulas corporum contiguorum in gyratorium (qui calorem efficit (*) motum excitant. Hoc tamen fieri non poteſt,

(*) vide meditationes noſtras de cauſa caloris.

quin oriatur inter illas frictio; oriri vero frictio non poteſt, *niſi atomi aereae ſint aſperae.*

§. 9. Hoc autem rerum naturae maxime conſentaneum eſt. Quippe in omnibus corporibus mundi totalibus atque partialibus, ea figura, quam quodlibet peculiarem ſibi habet, nuſpiam tam adaequata reperitur, quin inaequalitates aliquas in ſe prodat. Quae quidem ita adſunt, vt ipſa figura, ob puſillam rationem illarum ad totum, ſeruet ſuam ſpeciem. Quemadmodum itaque natura telluris noſtrae globum montibus, et corpora illius partialia, etiam quo ad ſenſum laeuiſſima, et ſi cum illa comparentur, perpuſilla, ad vſus ſuos inaequalitatibus aſpera eſſe voluit; ita quoque aereas atomos, licet ab omni compoſitione phyſica alienas, induſtria eiusdem naturae, in ſimplicitate quoque ſua callidae, prominentiis ſubtiliſſimis firmiſſimisque ad effectus vtiliſſimos inſtructas eſſe ex analogia colligitur.

§. 10. Remouentur autem atomi aeris elaterem exercentes a ſe inuicem vel immediata quadam reciproca actione, aut mediante aliquo fluido inter illas diuerſante, adeoque multo ſubtilioribus particulis conſtante. Vtrum horum in elatere producendo locum habeat, disquirendum nobis incumbit. Ad hoc autem inſeruiet nobis proprietatum virtutis elaſticae primaria: ſcilicet, quod aër eo maiore vi elaſtica gaudeat, quo magis vi externa condenſatur, quoque propius atomi eius ad ſe inuicem accedunt.

§. 11. Ponamus vero primum particulas aeris diſpergi actione alicuius fluidi ſubtiliſſimi inter illas hoſpitantis. Quando igitur aer inuaſe aliquo ſolido in minus ſpatium vrgetur, flui-

fluidum illud ipſum ſimul comprimitur aut non comprimitur. Si prius, erunt 1) latera vaſis ſolidi ſubtiliſſimo illi fludo imperuia, adeoque particulae eius debebunt eſſe vix aut neuix quidem aereis atomis ſubtiliores contra dicta §. 10; 2) Fluidum hoc aget ipſum in cohibentia vaſa, adeoque non erit neceſſarium, vt particulae aeris fluido illi innatent, cum illud in effectus elateris in corpora exercendos ſolum ſufficiat; 3) particulae illius conatum habebunt a ſe inuicem recedendi, quare ratio huius rei denuo reddenda erit, atque adeo propoſita quaeſtio haud ſoluta manebit. Sin vero poſterius, tum 1) dictum fluidum in parietes vaſorum etiam ſolidiſſimos nullam fere vim exercebit, quare nec in tenuiſſimas aeris atomos, quamcunque vim leuitate et volubilitate ſua facile eludentes, agere quid poterit; 2) vbi aer in vaſe campreſſus condenſabitur, fluidi quod vaſa iam facillime penetrat, eadem denſitate manente; erit atomorum aeris quantitas in maiore ratione ad quantitatem fluidi, quam fuit ante compreſſionem. Id circo vis fluidi pro ratione quantitatis eius minor erit, minores quoque in atomos aeris effectus exſeret; atque adeo aere vi externa in minus ſpatium compreſſo elaſtica eius virtus decreſcet.

§. 12. Haec omnia euidentiſſime demonſtrant vim aeris elaſticam a fluido aliquo inter eius particulas diuerſante proficiſci non poſſe. Cumque dicta vis pro ratione denſitatis materiae aeris propriae, caeteris paribus creſcere et decreſcere ſoleat; dubitandum itaque non eſt *illam ab immediata quadam mutuaque atomorum eius actione proficiſci.*

§. 13. Corpus vnum in alterum immediate agere nequit, niſi ipſum contingat; atomi igitur aeris vbi in ſe mutuo immediate agunt, in contactu ſint, neceſſe eſt. Porro quoniam aer noſter atmoſphaericus vi externa adactus triceſies amplius minore ſpatio comprehendi poteſt; id circo inter atomos eius dantur interſtitia a propria materia eius vacua, quibus plurimae eiusmodi atomi contineri poſſunt: vnde illae in contactu non ſunt. Duae iſtae apparenter contradictoriae, veriſſimae tamen, propoſitiones conciliari aliter nequeunt, niſi hi duo contrarii ſtatus atomorum aeris tempore diſtinguantur; nempe vt ipſae alternis vicibus illos ſubeant. Alternatio vero iſtiusmodi ita fiat neceſſe eſt, vt nec in omnibus atomis ſimul idem ſtatus contingat, nec ſenſibile aliquod tempus duret. Alterum enim ſtupendas in extenſione mutationes ſaepius produceret, alterum vero efficeret, vt expanſiones aeris tardae nimium et otioſae redderentur. Patet igitur atomos aeris ſingulas inſenſibilibus tempuſculis cum aliis ſibi vicinis confuſa reciprocatione collidi, et cum aliae in contactu ſunt, alias tum a ſe inuicem reſilire et in reliquas viciniores tandem incurrere, denuo reſulturas, ita vt eiusmodi frequentiſſimis reciprocisque arietationibus a ſe inuicem continuo pulſae ſeorſum diſpergi nitantur.

§. 14. His expoſitis demonſtrandum reſtat, quonam pacto atomi aereae in ſe mutuo ita agant, vt vna alteram retorqueat. Ad hoc autem non aliud quid argumenta ſuggerere poteſt, quam eiusdem elaſtici aëris palmaria proprietas. Scilicet, quod notiſſimum eſt, creſcente aeris calore etiam elaterem eius magis magisque inualeſcere, decre-

decreſcente vero eundem ſimul debiliorem reddi, ita, vt caeteris paribus, in ſummo, quem nouimus, calore elater maximus, in minimo vero, ſeu frigore, quod hunc vsque in diem obſeruatum eſt, maximo, minimus conſtante lege deprehendatur. Vnde patet, atomos aereas prorationе aucti vel diminuti caloris per mutuum contactum fortius aut remiſſius in ſe inuicem agere, atque adeo calore, ſi vnquam fieri poteſt, prorſus ceſſante, illas omni laudata actione deſtitui debere. Hinc *autem* ſequitur *mutuam actionem atomorum aeris a ſolo calore proficiſci.*

§. 15. Calor conſiſtit in motu gyratorio particularum corporis calidi (*) quidquid igitur calor efficit, a motu gyratorio particularum corporis calidi proficiſcitur, atque adeo mutua atomorum aeris actio pendet a mutu gyratorio earundem. Verum duo corpora ſphaerica abſolute laeuia in contractu iuxta ſe inuicem poſita et quam ocyſſime in gyrum acta in ſe mutuo ita agere non poſſunt, vt a ſe inuicem diſſiliant. Demonſtrata igitur ſuperius §. 8. veritas denuo confirmatur, et prouidae naturae ingenium elucet, quae vnico eodemque medio varios effectus in corporibus ſaepiſſime producere ſolet, vti hic atomorum aeris aſperitate et calorem eius corporibus aliis communicat (§. 8) et elateri exercendo inſeruit.

§. 16. Sint igitur duae atomi aeris A et B a ſe inuicem diſtantes ita vt A ſit ſuperior atomo B. Vtraque ocyſſime moueatur in gyrum ita, vt pars ſuperficiei atomi A atomum B ſpectans feratur ſecundum directionem contrariam ei, verſus quam dirigitur pars ſuperficiei atomi B, ſpectans atomum A, prout telorum ſigna Tab. VII. Fig. 1.

(*) Meditationes de calore.

indicant. Durante gyratorio mutu, decidat vi gra-
Fig. 2. vitatis atomus A ſuper atomum B; in contractu
Fig. 3. inaequalitates coincident ita, vt vel prominentia *a* atomi A incidat in cauitatem *b* atomi B; vt eſt in figura 2; vel premat etiam prominentiam *d* atomi B, quemadmodum figura 3 repraeſentat. In caſu priore prominentia *a* atomi A ex cauitate *b* aſcenſura prominentiam
Fig. 4. *f* ſuperare debet, adeoque atomi A et B a ſe inuicem recedent per diſtantias *gf* vel *ab*, eo tempuſculo, quo tendentes ſecundum contrarias directiones ſuperficies atomorum A et B arcum *ga* percurrunt. In caſu poſteriore atomi in contactu eousque iuxta ſe procedent, donec prominentia
Fig. 3. *a* atomi A inciderit in cauitatem *e* atomi B. Deinde vero ſequentur omnia, quae fieri debent in caſu priore.

§. 17. His ita comparatis atomi aeris cum ſingulae ſint graues, vi grauitatis ergo vna ſupra alteram cadat neceſſe eſt. Quo facto tandem motu gyratorio celeriter rotatae poſt contactum ſtatim ſeorſum repellentur, eo modo vt paragrapho ſuperiore explicauimus. Quoniam autem in tanta frequentia atomorum fieri non poteſt, vt quaelibet cadat in ſummum punctum ſuperficiei inferioris atomi; id circo actio earum repulſiua ſaepiſſime ſecundum lineas ad horizontem plus minusue inclinatas fieri debet, atque adeo vis aeris elaſtica verſus omnes plagas ſeſe exſerere.

§. 18. Explicatam hactenus atomorum actionem oſtendunt etiam turbines, quibus pueri ſuper glacie ludere ſolent. Duo enim eiusmodi turbines in gyrum cellerrime acti, poſtquam tardo quidem paſſu in contactum admoti fuerint, rapidiſſime reſilire ſolent; quae repercuſ-

ſio

ſio ab inaequalitate ſuperficierum prouenit. Eae enim quo ſinuoſiores ſunt in contactu, eo pernicius turbines reſiliunt. Id vero ter aut etiam quater inter duos turbines fieri poteſt, antequam gyratione ceſſante concidant, quod fit, vbi flugellis concitari deſinunt.

§. 19. Quamuis propoſita hic theoria non infirmis nititur argumentis; maior tamen euidentia inde nobis eluceſcet, ſi proprietates aeris et phaenomena, quae in eo obſeruari ſolent, per illam ita explicari patuerint, vt cauſae eorum clare imo etiam diſtincte percipiantur. Optima namque illa theoria eſt, quae non ſolum cum nulla proprietate eius rei, pro qua explicanda condita eſt, pugnat; verum etiam earum explicatione non ſecus ac firmiſſimis vtitur argumentis ipſam corroborantibus, id circo et noſtram in ſequentibus examinamus, primarias aëris proprietates variaque phaenomena excutientes.

§. 20. Atmoſphera conſtat ex infinito numero atomorum aeris, quarum inferiores repellunt ſuperincumbentes atomos ſurſum verſus tantum, quantum omnes reliquae ad ſummam vsque ſupeficiem atmoſphaerae ſuperingeſtae cedunt. Atomi reliquae, quo longius a terra diſtant, eo minorem contra vim arietantium et grauium atomorum nituntur, ita vt ſupremae ipſam ſuperficiem atmoſpaerae occupantes propria tantum grauitate ſua deorſum premantur, atque a proxime inferioribus repercuſſae, tamdiu inſublime ferantur, quamdiu impetus a repercuſſione impreſſi grauitatem earum ſuperant. Qua tandem praeualente deorſum labuntur ab inferioribus rurſus repercutiendae. Hinc autem ſequitur 1) aerem atmoſphaerae eo rariorem eſſe debe-

debere, quo remotior eſt a centro telluris, 2) aërem in infinitum expandi non poſſe: dari enim debet terminus, vbi grauitatio atomorum aeris ſupremorum vim, mutua colliſione ipſis impreſſam, ſuperet.

Fig. 4. §. 21. Superficies atomorum aeris A et B quo celerius percurrunt arcum *ag*, eo ocyus atomi ipſae abſoluunt diſtandiam *ab* vel *fg* a ſe inuicem recedendo, adeoque maiorem celeritatem per repercuſſionem acquirunt, fortius in obſtantia corpora agunt, iisque remotis longius a ſe inuicem diſſiliunt. Quoniam autem motis celerius ſuperficiebus, etiam atomi aeris celerius rotantur, gyratorio autem motu accelerato etiam calor increſcit (*); vnde mirum non eſt aera calidiorem maiorem vim elaſticam habere.

§. 22. Denique experientia docuit ſummum, qui in exteris ad hybernum occaſum ſolis ſitis regionibus obſeruatur, frigoris gradum ſuperari rigore hyemis huius noſtrae regionis, qui tandem ſaeuiſſimo gelu in Iacutarum regione omnia fere fluida praeter aerem conſtringenti multum cedit. Ratione autem conſequimur (vt in meditationibus noſtris de cauſa caloris et frigoris oſtenditur) nullibi in hoc telluris noſtrae globo abſolutum frigus dari poſſe, id circo neque atomos aereas vspiam a motu gyratorio aliquando ceſſare, atque adeo, neque aërem ſine elatere reperiri poſſe patet.

§. 23. Sonus producitur, quando corpus aliquod in motum tremulum excitatum, eundem imprimit particulis aeris ſibi proximis, quae cum ſequentibus continua ſerie

(*) Medit. de cal.

ſerie eum communicant ad diſtantiam vi percuſſionis proportionalem. Quoniam autem atomi aeris plerumque a contactu remotae ſunt; neceſſe eſt ergo, vt quaelibet atomus ad excitandum in altera motum ſonorum, ſibi a corpore ſonante impreſſum, ad eandem primo accedat atque tempuſculum infinite quidem paruum in motu conſumat, priusquam ictum illi impingat, quae infinite parva tempuſcula ab atomis numero fere infinitis in notabiliore diſtantia ad ſucceſſiuam communicationem adhibita infinities ſumta ſenſibile aliquod temporis momentum efficient. Vnde neceſſe eſt, vt ſonus poſt ictum, a quo producitur, notabili interuallo temporis e longinquo audiatur.

§. 42. Quando aer premit ſuperficiem alicuius corporis; cuius pori maiores quidem ſunt atomis aeris, diametros tamen habent minores diſtantiis, quae tremulatione illarum deſcribuntur; tum atomi aeris per repercuſſionem ad orificia pororum in peculiarem, quendam motum dirigantur, neceſſe eſt. Etenim ſit Porus P inter particulas A et B in ſuperficie corporis ſolidi, vel etiam fluidi denſioris, ſitus, quam premit aer; feriat atomus ali qua aeris particulam A ex *a* in *b*, ab illaque reſiliat verſus *c* ita vt lineam *m m* ſecet; eodem quoque modo incurrat alia aeris atomus in particulam B ex *d* in *e* et reſiliat verſus *c* ita vt linea *e c* cum *b c* efficiant angulum *b c e*. Denique in currant aliae atomi aeris in loca ſuperficiei vtriusque particulae poro P propiora vsque ad *f* et *g*, nempe donec a particulis reflexae via ſua deſcribant lineas efficientes angulum apicem ſuum *b* Fig. 5.

ex poro exferentem, vti linae *f b* et *g b* atque reliquae a poro P remotiores repraeſentat; tum omnes aeris atomi quae ſecundum has lineas tendunt, coniunctis et quidem pro ratione plani maioribus viribus atomos reliquas, quae inter lineas *n n* et *r r* in porum diriguntur, repellere debent, adeoque ab ingreſſu, quem in illum adornant, prohibere. Haec ſunt de iis, quae perpendiculariter in planum corporis incidunt; ſed pleraeque fere omnes aeris atomi, quae obliquae illud feriunt, ſimilem effectum producant neceſſe eſt. Feriat enim atomus aeris particulam A ex *a* in *b*; reſiliet ab illa verſus *c*. Percutiat denique alia atomus eandem particulam ex *d* in *e*; tum reſiliet et impinget in particulam B in *f* atque tandem reflectetur verſus *g*. Vtrumque tamen vrgebit contra atomos aeris inporum recta tendentes. Mirum igitur non eſt aerem multorum corporum poros, quibus atomos eius minores eſſe aliunde patet, vix aut ne vix quidem penetrare. Denique ſequitur aerem eo fortius a poris corporum arceri, quo labia eorum extrorſum verſus magis diducuntur; quod ex figura facile intelligitur. Fig. 6.

§. 25. Sonus tremulo motu atomorum propagatur. Verum ſecundum noſtram theoriam elater conſiſtit in iſtiusmodi motu confuſo; quaeri igitur a nobis poteſt, cur non audiatur continuo quidam ſonus a continua vibratione atomorum elaſtici aeris. Ad quod reſpondemus, ſonum auri imprimi tympano vi aeris moto; eo autem quieſcente id non fieri. Tympanum vero quoniam tam externi aeris, quam interni, cauitatem ipſo munitam replentis, paribus iſtiusmodi tremulationibus ab vtraque parte afficitur, ideo

in

in aequilibrio conſtitutum, nullo motu agitatur, nullasque ideas ſonus imprimit. Quamprimum autem hoc aequilibrium tollitur, ſubſequuntur etiam tympani motus ſonusque percipitur. Id circo vaſculo duro et concauo auri admoto reſilientium alateribus eius atomorum elaſtici aeris tremulationes concentrantur, maiore vi in tympanum agunt, quam arietationes atomorum internarum in cauitate poſt tympanum incluſarum, atque adeo illo in motum hac ratione excitato, confuſo quodam ſono aurem afficiunt. Qui ſuſurrus quoniam ſemper in conuexis percipitur, quandocunque auri admouentur; apparet igitur manifeſto, in elaſtico aere atomos iugiter tremulo motu agitari.

§ 26. Aer tamdiu perſiſtere poteſt elaſticus, quamdiu cauſa elateris, hoc eſt mutua atomorum arietatio non ceſſat. Contra vero ſublata quocunque modo hac actione, elaterem eius etiam tolli neceſſe eſt. Si igitur atomi aeris ſingulae ſeorſim, vel paucae ſimul particulis alicuius corporis inter ſe ſatis cohaerentibus in earum interſtitiis ita comprehendantur, vt nec illas a cohaeſione ſeparare nec in ſe inuicem agere poſſint; aerem tum vi elaſtica orbari debere dubium non eſt. Porro cohaeſione particularum corporis illius ſublata, atomi aeris ſibi relictae elaſticam virtutem denuo recuperabunt. Et, ſi particulae corporis, quae aerem hac ratione in poris captiuum detinuerunt, diametros habent minores iis diſtantiis, quas percurrunt atomi aeris liberae tremulatione qualibet; tum aer ex poris liberatus in ſpatium expandetur maius, quam quod corpus accupat, in cuius poris latitabat.

§. 27. Id vero iam olim re ipſa experti ſunt viri celeberrimi et de orbe litterario optime meriti Robertus Boyle, Hermannus Boerhaaue, et recentius clariſſ. Haleſius, qui ſubtilem et elaſticam illam materiam, ex corporibus reſolutis productam, aerem appellare non dubitauerunt. Et nos met ipſos multiplex experientia docuit idem, praeſertim vbi ex ſolutione cupri, aqua forti inſtituta, elaſticum fluidum copioſe productum verum aere eſſe deprehendimus. Etenim in vaſe quo fluidum illud captum erat, continebatur alcali fixum, in aqua copioſe ſolutum, quo rutilus ille vapor, ſolutione durante aſcendens, acidoque ſubtili turgidus, capiebatur: huic enim nonnulli, qui renatum aerem ſuo nomine appellare metuunt, et neſcio quod Gas vocitare amant, elaſticam, vim fluidi tribuunt. Nihilo tamen minus per aliquot hebdommadas fluidum illud perſtitit, omnes veri aeris qualitates retinens.

§. 28. Plura quidem de aere in poris corporum deliteſcente, eaque varia, et quaedam forte noua proponere hic poſſemus; verum cum ea ad ſingulares eiuſdem captiui aeris effectus explicandos pertineant potius, quam ad cauſam elateris illius illuſtrandam; quamobrem illa ad peculiarem tractationem reſeruamus.

DISSER-

DISSERTATIO
DE ACTIONE MENSTRVORVM
CHYMICORVM IN GENERE

Auctore M. Lomonoſow.

§. 1.

Quamuis ab omni aeuo multam curam atque operam viri ſolertes ad Chymiam contulerint, et praeſertim centum retro annis quaſi conſpirati eius cultores penitiorem corporum naturalium mixtionem certatim indagauerint; nihilominus tamen ſcientiae naturalis pars nobiliſſima profundis etiamnum tenebris inuoluitur et propria ſua mole laborat. Latent genuinae rationes mirabilium phaenomenorum, quae per labores Chymicos natura producit, ideoque ignoratur adhuc rectior via, cuius ductu multa detegi poſſent, quae vtilia forent ad promouendam humani generis felicitatem. Equidem fatendum eſt, proſtare plurima experimenta Chymica, de quorum certitudine non dubitamus; inde tamen pauca ratiocinia, in quibus iudicia Geometricis demonſtrationibus exercitata acquiſcere poſſunt, deducta eſſe iure querimur.

§. 2. Inter palmarias operationes Chymicas eſt corporum ſolutio, quae ante reliquas meretur, vt examini Phyſico ſubiiciatur; nam et in Chymicorum officinis corporibus examinandis ſaepiſſime inſeruit, et in collegiis Phyſicis inter alia experimenta curioſorum oculis ſubiici ſolet; verum tamen cauſae eius nondum ita perſpectae habentur, vt phaenomena, quae in hoc negotio ſeſe exſerunt, inde explicari poſſint.

§. 3. Qui ſolutionum cauſas vulgo exponunt, menſtrua omnia ſoluendorum corporum poros ingredi (quod tamen non vbiuis locum habere inferius patebit) et tandem eorum particulas abrumpere affirmant. Sed quibus viribus iſte abruptionis effectus producatur, praeter cuneos, vncinulos et alia neſcio quae inſtrumenta, quae menſtruis precario tribuuntur, haud vlla ratio vel vtcunque plauſibilis affertur.

§. 4. Vnum idemque menſtruum non in ſingula corpora agere potis eſt, ſed ad quodlibet ſoluendum adhibetur menſtruum conueniens; quod explicaturi in diuerſa magnitudine et figura pororum ſoluendi corporis et particularum menſtrui opem quaerere ſolent, quibus viam menſtruo poros ingredienti facilitari vel praecludi arbitrantur: eg. quod ſpiritus nitri argentum, cuprum, ferrum et reliqua metalla ignobiliora ſoluat, aurum vero non attingat, ratio reddi ſolet, poros auri prout omnium corporum denſiſſimi eſſe ſtrictiſſimos, eoque fieri vt particulae ſpiritus nitri eos ingredi nequeant. Equidem fatemur particulas menſtrui grandiores poros ſoluendi ſubtiliores ingredi non poſſe; particulas tamen ſpiritus nitri multo ſubtiliores eſſe poris auri ex ſequentibus colligimus. Spiritus nitri et ſpiritus ſalis ſeorſim ſumpta aurum quidem non ſoluunt; at in aquam regis commixti peculiare auri menſtruum exiſtunt. Conſequenter poros eius ingrediuntur (quod actu fieri §. 20. demonſtrabitur) vnde euidens eſt particulas ſpiritus nitri et ſpiritus ſalis, ſimul in corpuſcula mixta iunctas, eſſe poris auri minores, atque adeo a ſe inuicem ſeparatas multo minore extenſione praeditas eſſe debe-

debere iisdem auri meatibus. Non tamen dubito fore, pleroſque qui obiiciant ſpiritum nitri ſpiritu ſalis ſubtiliſari, hoc eſt, particulas eius minores reddi. Verum quodſi hoc verum foret, ſpiritus nitri a ſpiritu ſalis ſollicite ſeparatus, cum iam eſſet ſubtilior factus, ſolus aptus foret ad aurum ſoluendum, quod tamen nequaquam ſuccedit.

§. 5. Nec alia documenta deſunt, quibus euincitur magnitudine pororum ingreſſum liquidorum in corpora ſolida minime facilitari. Etenim Mercurius poros auri corporis denſiſſimi facile ſponte ſua peruadit, at ligna, corium, chartam, corpora poroſiſſima non penetrat, niſi vi adigatur.

§. 6. Nec maior ſane ſpes exponendi cauſas variis in poros corporum ingreſſus menſtruorum poſitu eſt in varia pororum et particularum figura. Enimuero ſi qualitates corporum particulares ab illa pendent, magna profecto figurae diſcrepantia particulas Mercurii et aquae fortis intercederet, cum tot qualitatibus, nempe transmiſſione et reflexione radiorum, ſapore, grauitate et diuerſis virtutibus, quas in homogenea corpora exercent, haec duo corpora inter ſe differant. Nihilominus tamen vtrumque menſtruum poros ſimiles, eiusdem quippe corporis e. g. argenti penetrat. Ceterum vbi meatus ſatis patent, figuram corporum eorundem ingreſſui minus obſtare etiam radior Minerua docet: ſiquidem per ampliorem portam homines, iumenta et plauſtra intrare videmus, figurae varietate nihil obſtante.

§. 7. Ingreſſus liquidi in poros ſolidi nil aliud eſt, quam vtriuſque corporis in vnum combinatio, qualis eſt liqui-

liquidorum corporum confusio. Quae in eo solum discrepant, quod vbi duo corpora liquida confunduntur, vtrumque motu intectino progressiuo alterius poros inuicem penetrat, verum vbi corpus liquidum cum solido iungitur, tum solum corpus liquidum mediante motu progressiuo intestino poros solidi ingreditur.

§. 8. Liquida per confusionem alia libentius alia difficilius permiscentur, e. g. aqua cum spiritibus aquosis, vt sunt acidi et ardentes, facile confunditur, at cum oleis iungi detrectat, pari ratione corpora solida liquefacta, vt metallica metallis, terrea terris, salina salibus multo facilius vniuntur, quam metallica corpora terris vel lapitibus aut salibus fixis. Ex quo elucet, particulas corporum fluidorum eiusdem generis facilius motu progressiuo inxta se inuicem serpere et poros peruadere, quam particulas corporum liquidorum heterogeneorum.

§. 9. Homogeneitatis igitur ratio etiam in *ingressu* liquidorum in poros solidorum corporum haberi debet. (§. 7) hoc est fluida poros solidi homogenei facilius, heterogenei difficilius ingrediantur necesse est. Quod sequenti experientia comprobatur. Metalla nobiliora vbi a vilioribus in furno decimastico secernuntur, tum plumbum fusum cupellam non ingreditur, quin prius vitrescat. Nimirum quamdiu inflammabilem materiam; quae metallis et splendorem et ductilitatem conciliat, in mixtione sua retinet, tamdiu cum cineribus cupellam constituentibus misceri et poros illorum peruadere non potest. At postquam phlogiston vi ignis a reliquis plumbi miscibilibus excutitur, tum id amissa ductilitate et splendore metallico vitrescit,

treſcit, poros cupellae prout corporis etiam vitreſcibilis et ideo ſibi homogenei penetrat, atque omnia quae vitreſactioni obnoxia ſunt, ſecum in eos inuehit. Vnde mirum non eſt, aurum et argentum intra cineres cupellae minus ingredi, cum nunquam vitreſcant.

§. 10. Quoniam igitur homogeneitas, qua ingreſſus liquidorum in ſolida facilitatur, conſiſtit in identitate ipſius materiae, fruſtra ſane ratio, ob quam certa quaedam menſtrua ſoluendorum corporum poros facile ingrediuntur, in poris ipſis, hoc eſt non in materia, quaeritur, cum pori nil aliud ſint, quam ſpatiola ab ipſa materia corporis vacua.

§ 11. Cum itaque fere omnia, quae hactenus de cauſis ſolutionum alias propoſita ſunt, haud firmo pede nitantur, ideo non inutile fore iudicauimus, vt experimentis Chymicis et Phyſicis, quae ad explicandam ſolutionem conferre aliquid viſa ſunt, ſeuerius excuſſis et inter ſe collatis, magis exactam theoriam de hoc themate conderemus. Non tamen hic apud nos ſtatuimus enucleare ſingulas virtutes ſpecificas, quibus diuerſa menſtrua agunt in diuerſa corpora ſoluenda (quod non ante exponi et dilucidari poterit, quam vbi principiorum Chymicorum numerus fuerit deciſus, eorumque natura diſtincte cognita) ſed tantum in animum induximus exponere ſolutionum cauſas in genere.

§. 12. Genericas igitur ſolutionum cauſas daturi oſtendere tenemur, quibus viribus, quaque ratione menſtruum ſoluendi particulas diuellere poſſit, ſublata mutua earum cohaeſione. Verum cum particulae menſtrui agentes, tum etiam ipſa actio, ſenſibus haud diſtincte re-

praeſentantur; reſtat itaque vt ad ſola phaenomena ſolutiones comitantia attenti veritatem inueſtigare pericli-temur.

§. 13. Quae cum inter ſe conferimus, alia aliis gemina, alia vero contraria offendimus. Ad poſteriora ſpectant illa notiſſima, quod nempe ſpiritus acidi ſoluendo metalla incaleſcant, aqua vero ſoluendo ſales magis frigida reddatur. Contraria iſta phaenomena cauſa exſtiterunt, vt ſuſpicaremur, metalla in ſpiritibus acidis alia ratione ſolui, quam ſales in aqua. Et cum experimenta circa ſolutiones in vacuo a nobis inſtituta conceptae antea noſtrae theoriae ex aſſe reſpondere videremus, eandem nunc certis principiis ſuperſtructam, dictis experimentis confirmamus.

§. 14. Aquis fortibus in metalla agentibus efferuescentia ſuboriri ſolet, quam contemplaturus accepi filum ferreum breue et tenue, vtramque eius extremitatem orbiculo vitreo agglutinaui cera; ſuper medium fili inſtillaui guttam ſpiritus nitri, aqua diluti, eum in finem, vt ſolutio leni paſſu procederet (praeceps enim eiusmodi operatio eſt nimium confuſa, contemplationemque turbat) in guttulam ferrum ſoluentem direxi microſcopium ſatis acutum. Prorumpebant a ſuperficie fili bullulae aereae ſimul cum particulis ferri, quae erant colore fuſco, et non ſecus ac ipſae bullulae, vitrabantur ſecundum directionem filo ferreo perpendicularem, et quamuis ſitum eius ſaepius immutarem, perpendicularis tamen directio durabat. Poſt haec adhibito ſpiritu fortiore ſolutionem fili rurſus per microſcopium luſtrabam; vibrabatur ingens vis particula-

cularum cum innumeris bullulis continua ſerie ſuccedentibus, quae perpendiculari directione a ſuperficie fili ferebantur, et ad lumen candelae innumeros fontes ſalientes lucidos, vel potius ignes feſtiuos cumulatim per aerem miſſos repraeſentabant. Particulae ferri in caſu poſteriore non prius conſpiciebantur, quam vbi a filo longius repulſae confuſis motibus in menſtruo agitarentur.

§. 15. Quoniam itaque particulae metalli vibrantur vi menſtrui ſecundum directionem perpendicularem ad corporis ſoluendi ſuperficiem, quamobrem ponamus particulam *a f* propellendam eſſe actione menſtrui a ſuperficie BC corporis BCDE ſecundum directionem *ag*; neceſſe igitur eſt, vt menſtruum agat in illam ſecundum eandem directionem; hoc eſt, eam impellat ex *a* verſus *g*. ſed impellere ex *a* verſus *g* non poteſt, quin impingat in partem ſuperficiei eius *ff* a proxima ſoluendi ſuperficie BC averſam, in hanc vero impingere menſtruum nequit, niſi prius ſit inter particulam *a f* et reliquas partes ſoluendi, in ſpatiolis *ff* conſtitutum; hoc eſt ſpiritus acidi ſoluere metalla nequeunt, niſi ingrediantur poros eorum.

§. 16. Metalla validiſſimo igne fuſa feruent, et non ſecus ac ſpiritus acidi atque aqua bullas aereas proiiciunt, manifeſto indicio in metallis non aliter ac in ſpiritibus acidis atque aqua contineri aerem per poros eorum diſſeminatum, qui calore ex illis excutitur, propria leuitate ſurſum aſcendit et bullas format.

§. 17. Quamprimum metallum ſpiritui acido immergitur, ſtatim bullas aereas a ſuperficie ſua vibrat; vnde patet aerem per poros vtriuſque vel alteriusvtrius

corporis diſſeminatum tempore ſolutionis expandi, conſequenter vim eius elaſticam actu exſerit; quod triplici de cauſa proficiſci ſolet; 1.) quando preſſio aeris externi tollitur; 2.) ſi aer ipſe maiorem gradum caloris in ſe recipit; 3.) denique quando maior quantitas aeris in idem receptaculum intruditur.

§. 18. Cum autem ſolutiones metallorum, comitante effervescentia menſtrui, ſub graui atmoſphaera ſemper ſuccedant; a cauſa igitur priore memoratam aeris expanſionem haud proficiſci euidentiſſimum eſt. Porro ſpiritus acidus metalla ſoluens prius ebullit, quam incaleſcit, et calor qui ebullitionem ſequitur, ſemper multo minor eſt, quam qui alias in ſpiritibus acidis igni expoſitis effervescentiam excitat, expanſio igitur aeris, quae in ſpiritibus acidis metalla ſoluentibus ebullitionem generat, ab aucto calore minime dependet, atque adeo ratio ſufficiens ebullitionis aquae fortis continetur in conſtipatione aeris diſſeminati per poros ipſius aquae fortis, vel metalli.

§. 19. Indigitata aeris condenſatio vel in poris ſpiritus ſoluentis vel ipſius metalli fiat neceſſe eſt. Verum quoniam particulae ſpiritus tanquam corporis fluidi leuiſſime cohaerent, vnde aeri in poris ſuis ſeſe condenſanti et ob maiorem elaterem expandenti reſiſtere non poſſunt, adeoque illi creſcenti cedere debent, vt aer placide in bullulas expanſus leuitate ſua ad liquoris ſuperficiem ſine vlla agitatione aſcendat. Verum bullulae aereae durante ſolutione expanſae a ſuperficie metalli perpendiculariter cum impetu vibrantur in quolibet eius ſitu (§. 14.) fieri igitur nequit, vt aer ille in poris ſpiritus ſoluentis condenſe-

denſetur, conſequenter in poris corporis ſolidi, hoc eſt, metalli ipſius, a cuius ſuperficie minutis bullulis proſilit.

§. 20. Cum vero in poris metalli aer condenſari nequeat, niſi haerenti in illis aeri nouus accedat, durante autem ſolutione, nullus accedere poteſt, quin cum menſtruo in poros ingrediatur, is nimirum qui in poris eius continetur. Quod etiam ſequentibus comprobatur.

§. 21. Aer per poros fluidi diſſeminatus etiam anguſtiſſimos et compreſſos ſolidorum poros penetrat, quos ſolus peruadere nequit. Ratio huius rei ex theoria noſtra de vi aeris elaſtica §. 24 et 26, facile perſpici poteſt, et veritas ipſa experimentis ab Excell. Wolfio circa poros veſicae inſtitutis comprobata Phyſicis eſt notiſſima.

§. 22. In ſpiritibus acidis ſub campana Antliae conſtitutis, ſubducto per ſuctionem aere, ebullitio multo difficilius excitatur, quam in aqua, vnde apparet, aerem poris ſpirituum acidorum firmius inhaerere, quam poris aquae, conſequenter eundem aerem poros corporum ſolidorum facilius penetrare cum dictis ſpiritibus quam cum aqua.

§. 23. Corpora fluida homogenea quamprimum ſe mutuo contingunt, in vnum confluunt, vt gutta aquae guttam aquae alteram ſibi admotam aſſociat, duo globuli Mercurii quamprimum ad mutuum contactum admittuntur, repente ſe inuicem amplectuntur et vnicum efformant globulum; dubitari igitur nequit, quin etiam particulae aeris cum ſpiritu acido in poros metalli aduectae, et per tam minutam diuiſionem menſtrui liberiores factae

cum haerentibus inter metalli particulas aereis moleculis coaceruentur.

§. 24. His ita comparatis quid ſequi debeat, facilius perſpici poteſt, ſi prius proprietas illa aeris, quae ſuperius (*) explicatur, quaeque a nobis *vis aeris elaſtica renata* ſolutatur, in mentem reuocetur.

§. 25. Nimirum aeris indoles ea eſt, vt quamdiu particulae eius minutiſſimae a mutuo contactu ſemotae et particulis alicuius corporis denſioris intercluſae haerent, nulla fere vi elaſtica pollent; Verum hiſce carceribus liberatae, ſuique iuris factae et ad mutuum contactum admiſſae emortuum quaſi elaterem recuperant, eumque in obſtantia corpora exercent. Quod multis experimentis clariſſimus Haleſius euidentiſſime oſtendit, et nos non pauca in eundem finem inſtituimus, ex quibus ſequens experimentum ad propoſitam noſtram theoriam condendam prae reliquis conuenit. Spiritus nitri drachmas 5 infudi vitro colli anguſtioris eique immiſi cupri drachmas 2, et ſtatim collo vitri veſicam compreſſam, aere, quantum fieri potuit, expulſo firmiter alligaui, ſolutio poſt horae circiter $\frac{3}{4}$ quadrantem ceſſauit, et veſica aere ex metallo et ſpiritu egreſſo fuit valide inflata. Quam poſtquam ſuper collum vitri filo conſtrixi, a vitro remoui, vero aere plenam eſſe non dubitaui: nam digito compreſſa rurſus priſtinam figuram recuperabat, et niui admota flaccidior, camino autem appoſita rurſus turgida facta eſt, et acu perforata et compreſſa expulſo aere leuia obiecta et flammam candelae agitabat. Dimenſione ſollicite inſtituta deprehendi

(*) Tentamen theoriae de vi aeris elaſtica. §. 26.

di volumen aeris renato elatere expanſi ad volumem ſpiritus et mettalli fuiſſe vt 68 ad 1; ad metallum vero, cuius vna drachma erat ſoluta, vt 2312: 1. Ex his experimentis euidentiſſime elucet, aerem per poros corporum diſſeminatum integro fere ſui elatere deſtitui, et contra particulis eius ex anguſtiis corporum liberatis et ſe mutuo contingentibus, elaterem illius denuo reſtitui.

§. 26. Renata haec aeris elaſtica virtus quam ſit valida, ſtupendi eius effectus loquuntur. Ea enim vaſa, in quibus aqua in glaciem conſtringitur, rumpuntur, ſclopeta ferrea vaſto fragore edito diſſiliunt. Nimirum urgente frigore, aqua in minus ſpatium coercetur, pori eius ſtrictiores redduntur, aer ex illis eliditur, eeſtantibus bullis frequentibus, quas frigens aqua emittere ſolet, particulae eius eliſae ſibi mutuo occurrunt, et homogeneitatis cauſa in vnum coaceruantur, innatum ſibi, ſed ante per ſegregationem amiſſum, elaterem recuperant, extenduntur, bullulas formant, et ſic ex concurſu innumerarum aeris particularum innumeris bullis natis aqua in glaciem iamiam abiens expanditur, et ſolidiſſima illa vaſa, quibus incluſa eſt; disrumpit. Veritas haec eo etiam demonſtratur, quod glacies ex diſruptis vaſis recepta innumeris ſcateat bullis, ideoque omni fere pelluciditate caret.

§. 27. His conſideratis non erit arduum oſtendere ipſam vim, qua particulae metalli auulſae per ſpiritus acidos vibrantur. Siquidem particulae aeris, quae cum ſpiritu poros metalli ſoluendi intrant, iunguntur cum illis, quae antea in metallo haerebant (§. 21.) quo facto amiſſam vim elaſticam reſumunt, (§. 24. 25. 26.) in

maius

maius ſpatium expandi conantur; et cum pororum angustias ferre nequeant, exitum quaerunt; qui quoniam ſuccedentibus acidi corpusculis obſeſſus et obſtructus eſt, obſtantes igitur ſibi particulas metalli abrumpunt et per ſpiritum vibrant. Ex quo patet, particularum ſpiritus acidi in ſoluendo officium eſſe, particulas aeris in poros metalli inuehere, aeris vero, renato elatere particulas metalli auellere.

§. 28. Ad hanc theoriam examinandam et confirmandam ſequentia experimenta inſtituta ſunt. Aquae fortis drachmas quinque vitro cylindrico infudi, atque ſub campana antliae pneumaticae conſtitui. Aliquot agitationibus emboli aere exantlato, ſurgebant bullae aereae ex aqua forti vtcunque frequentes, tamen exiguae; poſt horae quadrantem, menſtruum expoſui aeri libero, eique nummulum cupreum, qui noſtratibus Denga dicitur, immiſi. Poſt 20 minuta prima, affuſa aqua copioſa nummulum a ſordibus et adhaerente humore liberatum ponderaui, quo conſtitit eum 74 grana amiſiſſe. Denique alterum cupreum nummulum, priori aequalem et ſimilem, eiusdem aquae fortis drachmis 5, ſed ex qua aer non erat ſubductus, in eodem vaſculo immerſum ſolutioni expoſui eodem in loco. Poſt 20 minuta prima nummulus 85 granis leuior factus eſt. Ex hoc experimento elucet, acidum ſpiritum fortius in metalla agere, ſi maiore copia aeris diſſeminati fuerit praeditus, ſcilicet quaelibet aquae fortis portiuncula maiorem quantitatem aeris ſecum in poros metalli inuehit, vis elaſtica celerius renaſcitur, frequentius fruſtula metalli abrumpit.

§. 29.

§. 29. Deinde accepi aquae fortis eiusdem duas portiones aequales et in duo vitra aequalia et similia infudi, vtrique immisi eodem momento singulos nummulos cupreos nostratibus Poluschkas dictos, quorum quilibet pendebat grana 50, altero vasculo relicto in aere libero, alterum sub campana Antliae constitui. Vterque nummulus primo cum pari effervescentia menstrui soluebatur. Verum repetitis aliquot agitationibus emboli et aere ex campana subducto menstruum multo vehementius ebulliebat, maioribus et frequentioribus bullis surgentibus, quam experimento praecedente. Praeterlapsis 11 minutis primis vtrumque nummulum ex menstruo simul depromtum et a sordibus atque adhaerente humore liberatum ponderaui. Qui sub campana solutioni erat expositus, amisit grana 10, qui vero in libero aere soluebatur, perdidit grana 26. In hoc igitur experimento excessus cupri soluti in aqua forti integro aere disseminato praedita multo maior est ratione praecedentis: nimirum in priore erat vt 11 ad 74, in posteriore vt 16 ad 10. Facti ratio sequens est. Aqua fortis metallum sub campana antliae soluens incaluit, maiorem quantitatem aeris dimisit quam experimento praecedente, vnde maiore etiam copia aeris disseminati menstruum fuit priuatum, atque adeo minori vi in metallum agere debuit.

§. 30. Nec tamen alia quoque phaenomena solutiones metallorum comitantia propositae hactenus theoriae non respondent, in quibus primas obtinet cum ebullitione menstrui coniunctus calor. Renato in poris metalli aeris elatere particulae ipsius abripiuntur, per menstruum

vibrantur, particulas illius fricant et in motum gyratorium excitant, qui quoniam caloris causa exiſtit (*), mirum igitur non eſt, aquas fortes metalla ſoluentes incaleſcere.

§. 31. Spiritus nitri cum zinco maxime efferuescit et incaleſcit valide, cum ferro paulo minus, ſed plus minus cum cupro, multo lenius cum argento, admodum parum cum plumbo et Mercurio. Vnde patet metalla et ſemimetalla ſpecifice leuiora maiorem ebullitionem et calorem in ſpiritu nitri producere, quam ſpecifice grauiora; quod cum noſtra theoriae gregie conſentit. Etenim metalla et ſemimetalla ſpecifice leuiora ex minore quantitate materiae cohaerentis conſtare Phyſici non dubitant, conſequenter maioribus vel frequentioribus poris praedita eſſe, quam ſpecifice grauiora. Vnde maiorem quantitatem aeris diſſeminati in iis contineri, copioſioremque aerem cum menſtruo ingeri, atque adeo maiorem vim elaſticam renaſci, fortius in particulas metalli agere, violentius easdem vibrare, particulas ſpiritus nitri pernicius in gyrum agi, atque validiorem ebullitionem et calorem gigni.

§. 32. Si ferrum in alcali diſſoluitur et aceto praecipitatur, calcem ſpiritus nitri ſoluit ſine ſtrepitu. Item quando viride aeris in aceto deſtillato ſolutum cum aqua forti confunditur; aqua fortis cuprum in ſe recipit, ſed nulla efferuescentia ſiboritur. In vtroque caſu quoniam particulae metallorum mutua cohaeſione deſtitutae ſunt, vi igitur non indigent, qua alias diuelli ſolent; ſed

(*) De cauſa caloris et frigoris meditationes. §. 11.

ſed ſtatim particulis menſtrui accedentibus adhaerent, cumque illis progreſſiuo motu incedentibus diſtrahuntur. Vnde nulla conſtipatio particularum aeris diſſeminati ſubſequitur, vis elaſtica non reuiuiſcit, nulla effervescentia aut calor exoritur.

§. 33. Quando duae portiones aequales eiusdem ſpiritus acidi, ſatis concentrati, ad ſoluendum metallum adhibentur, vna tamen earum diluitur modice aqua affuſa. Poſterior maiorem quantitatem ſoluit, quam prior, ob maiorem ſcilicet quantitatem aeris per maius volumen diſſeminati.

§. 34. Ad ſoluendum metallum adhibito ſpiritu nitri ſatis valido, ſolutio breui tempore abſoluitur, menſtruo non amplius agente. Verum ſi poſt aliquot dies metallum eidem ſpiritui rurſus immergitur; quantitas eius non contemnenda denuo ſoluitur. Nimirum praecipiti ſolutione furente, ſpiritus aere ita orbatur, vt in metallum amplius agere nequeat. At ſuper incumbentis aeris particulis ſucceſſu temporis in poros ſuos receptis, rurſus ſolvendi, virtutem acquirit.

§. 35. Summa certitudo in rebus Phyſicis comparatur, ſi theſes a priori erutae et dumonſtratae atque experimentis et phaenomenis confirmatae etiam Mathematico examini reſpondent. Ad hunc itaque euidentiae gradum propoſitam theoriam deducturi oſtendere tenemur, nunquid vis aeris elaſtica in poro metalli renata ad auellendam eius particulam ſufficiat.

§. 36. Primo igitur videndum eſt quanta ſit vis, quae ad hunc effectum producendum requiritur, h. e.

quam firma sit mutua cohaesio particulae, quae renata vi aeris in poro metalli ab eius superficie auellitur. Celeberrimus Musschenbroekius per experimenta inuenit ad rumpendum filum cupreum, cuius diameter est $\frac{1}{10}$ pollicis pedis Rhenani in 12 eiusmodi partes diuisi, seu 1 $\frac{19}{120}$ lineae pedis regii Parisini requiri pondus 299$\frac{1}{4}$ librae Amstelodamensis, quae aequalis est Parisinae. Per Microscopium, quod diametrum corporis auget ad 360 obseruaui particulas minimas cupri soluti in spiritu nitri habere in diametro apparenti $\frac{1}{2}$ lineae pedis Parisini. Vera igitur earum diameter aequalis est $\frac{1}{720}$ lineae. Concipiamus ex particulis istius modi iuxta se inuicem continua serie dispositis et cohaerentibus constare filum, cuius diameter aequalis est diametro ipsarum particularum. Quoniam vires, ad rumpenda corpora homogenea necessariae, sunt in ratione duplicata diametrorum ipsorum corporum; ad rumpendum igitur tenuissimum illud filum requisita vis erit ad pondus 299$\frac{1}{4}$ lib. vt diameter eiusdem fili quadrata ad quadratam diametrum fili pondere 299$\frac{1}{4}$ librarum rupti, hoc est $= (\frac{1}{720})^2 : (1\frac{19}{120})^2 = (\frac{1}{720})^2 : (\frac{834}{720})^2 = 1 : 695556$; consequenter aequalis $\frac{1197}{2782224}$ librae seu 3 $\frac{846288}{2782224}$ grani. Quae vis aequalis est cohaesioni particulae cupri, auellendae elatere aeris, renato in poro metalli.

§. 37. Qui aerem ex metallo cumulatim prorumpentem durante solutione considerat, facile concedet, eum magnam partem spatii in vesica collo vitri alligata occupasse (§. 25). Non equidem negamus surgentibus ex cupro bullis et per spiritum ad superficiem eius tendentibus aeris particulas per menstruum disseminatas accrescere,

ſcere, ſimul veſicam ingredi, eamque diſtendere; verum tamen hoc ſub initium ſolutionis fieri ſolet. Etenim eadem diutius durante bullae ex metallo prorumpentes non ſolum minus ampliores redduntur, verum etiam prorſus euaneſcunt, priusquam ſuperficiem menſtrui attingunt, avido nempe aeris menſtruo (§. 25) eas rurſus per poros diſtrahente, id vero non ſolum in cupro, verum etiam in plumbo et Mercurio ſolutioni expoſito obſeruauimus. Eo autem fit vt non minor copia aeris in metallo renati per poros menſtrui rurſus diſpergatur, nec veſicam ingrediatur, quam initio ſolutionis bullis ſurgentibus in illam accedit. Adde quod ſtatim poſt ſolutionem affuſo alcali fixo ſpiritus vehementer ebulliebat, manifeſto indicio magnam vim aeris in poris eius actui ſolutionis ſuperfuiſſe. Verum ne quid precario aſſumere videamur, ponamus 1312 partes (§. 25) aeris expanſi ex poris menſtrui in veſicam acceſſiſſe, reliquas autem 1000 partes reuera in poris metalli renatas et dilatatas fuiſſe. Erit ergo volumen metalli ſoluti ad volumen aeris in poris eius renati et in veſica expanſi vt 1 ad 1000; conſequenter in quamlibet particulam cupri auellendam agebat portio aeris, quae expanſa erat ad particulam ipſam ratione voluminis vt 1000 ad 1; atque adeo diameter bullae aeris poſt auulſionem corpuſculi expanſae erat ad diametrum corpuſculi vt 10 ad 1, hoc eſt aequalis $\frac{1}{72}$ lin.

§. 38. Mercurii pollex cubicus ponderat vncias 8, drachmas 6 et grana 8. Cylindrus ergo Mercurii ab aere ſuſtentatus, 28 pollices Pariſinos altus, cuius diameter eſt $\frac{1}{72}$ lineae, ponderat fere $\frac{7838595072}{[illegible]}$ grani, quod

 pon-

pondus quoniam aequale est pressioni columnae aeris super bullulam ex poro metalli egressam incumbentis, (§. 37.) quae illum sustentat, quamobrem elater bullulae illius aequalis est ponderi dictae columnae Mercurii. Verum quoniam haec bullula ante expansionem, dum in poro metalli in corpusculum agebat, coarctata erat in spatium millies angustius. (§. 37.) (Praetereo hic pororum angustias: nam aer ante renatam elaterem non integrum metalli volumen occupabat, sed propria huius materia magnam partem tenebat) elater igitur eius erat tum millies maius, hoc est, aequalis ponderi 124 $\frac{888717312}{8320730931 2}$ grani, adeoque cohaesionem particulae cupri (§. 37.) superabat plus quam duabus drachmis. Vnde mirum sane non est particulas cupri abruptas tam ceceleri motu a superficie ipsius metalli per menstruum vibrari.

§. 39. His expositis inuestiganda nobis restat illa vis, qua salium aquae immersorum particulae a mutua cohaesione seiunguntur et per aquam distrahuntur. Quod vt in apricum prodeat, primo notandum est omnes sales abundare insigni quantitate aquae, quae per destillationem in vas recipiens copiosa ex illis elicitur. Et quamuis a quibusdam salibus volatilibus nulla separari potest, ex analogia tamen et facili cum aqua coniunctione idem de illis asserimus.

§. 40. Sales in aqua soluti post lenem euaporationem in crystallos pellucidas concrescunt, consequenter in aqua formam suam induunt, atque adeo necessarium est, vt pori salium sint aqua pleni. Quod etiam eorum pel-

pellucidítate comprobatur: corpora enim porosa et alias minus pellucida, aqua tamen imbuta diaphana fieri solent. Vnde vitriolum leni tepore ad albedinem calcinatum, ita tamen, vt partes eius minutissimae non dilabantur, opacum redditur; at postquam affusam aquam poris imbibit, rursum pelluciuitatem recuperat. Saccharum per crystallisationem in aqua concretum pellucidum est, at quod per inspissationem in conis cauis formari solet, vix aut ne vix quidem radios lucis transmittit; verum aqua in poros eius accedente ad pellucidítatem propius accedit.

§. 41. Cum itaque salium (nempe non calcinatorum) pori aqua pleni sint, fieri igitur nequit, vt aquae immersi eam in se recipiant. Vnde patet etiam aerem per aquam disseminatum poros salium minus ingredi, adeoque nec in illis renato elatere expandi, nec in particulas salium agere posse.

§. 42. Asserti veritatem confirmat sequens experimentum. Vasculum vitreum aquae semiplenum posui sub campana Antliae et reiteratis aliquot agitationibus emboli aerem subducebam; surgebant bullae aereae vtcunque frequentes. Tandem aerem ex aqua abunde subductum esse ratus, vasculum exposui aeri libero simul cum altero vasculo aequali et simili, in quo eiusdem aquae (ex qua aer non erat subductus) aequalis quantitas continebatur. Vtrique immisi salis gemmae singula frustula aequalia figurae cubicae, quorum quodlibet pendebat grana 50; post horae vnius spatium frustulum salis, quod solvebatur in aqua exantlata, amisit grana 27, alterum vero grana 15.

§. 43.

§. 43. Ex hoc experimento patet 1) aerem per poros aquae diſſeminatum non ſolum ad ſolutionem ſalium nihil conferre, verum eidem eſſe impedimento. Quomodo autem impedimento eſſe poſſit §. 47. exponimus et hoc ipſo noſtram theoriam confirmamus; 2) neceſſario ſequitur particulas ſalium ſeparari actione particularum ipſius aquae.

§. 44. Quando corpora ſolida liquida redduntur, particulae eorum excitantur in motum gyratorium celeriorem. Quando igitur ſal in aqua liqueſcit, motus gyratorius particularum eius accederatur. Ceterum quoniam ſales ſoluuntur actione particularum ipſius aquae (§. 43.) conſequenter particulae aquae tanquam corporis liquidi celeriore motu gyratorio rotatae et particulis ſalis aquae immerſi admotae, eas, ſimulque homogeneas ſibi particulas aqueas mixtionem ſalis conſtituentes raduut, et motum earum gyratorium accelerant. Quo facto particulae ſalis a reliqua maſſa ſeparantur, et aqueis particulis adhaerentes motu progreſſiuo cum illis incedunt et per ipſum menſtruum diſtrahuntur.

§. 46. Quando aliquod corpus alterius motum accelerat, eidem partem ſui motus communicat, communicare autem partem non poteſt, quin illi eadem pars decedat. Quamobrem particulae aquae accelerando motum gyratorium particularum ſalis, partem ſui motus gyratorii ammitunt. Qui quoniam caloris cauſa exiſtit, mirum igitur non eſt, aquam ſoluto ſale refrigerari.

§. 47.

§. 47. Aere per poros aquae diſſeminato, particulae aquae, aereis interpoſitae, aliquantum rariores ſunt; quod ſequenti experimento demonſtratur. Aqua exantlata infundatur vitro colli anguſtioris, relicto ſuper ea ſpatiolo aere pleno. Collum obturatum operculo oblinatur cera, ne aeri externo pateat aditus, poſt diem vnum aut alterum aer ſuper aquam relictus eam ingredietur et vas aqua plenum reddetur, certo indicio aquam ab aere per eum diſſeminato diſtendi. Submerſo igitur ſale in aqua, aere diſſeminato turgida, minor copia particularum ipſius menſtrui ſuperficiem ſalis attingit, in eamque remiſſius agit; atque adeo ſolutio fit tardior.

§. 48. Expoſitarum hactenus actionum, quibus menſtrua ſoluunt corpora ſibi immerſa, priorem *mediatam*, poſteriorem *immediatam* appellare lubet. Etenim in caſu priore menſtruum abripit particulas corporis ſoluendi mediante renato elatere aeris, in caſu poſteriore ipſum menſtruum agit propriis ſuis particulis. Cum vero mediata ſolutio calorem, immediata autem frigus producat, phaenomena haec tanquam ſigna vtriusque cenſeri debent.

§. 49. Praeter ſolutiones metallorum in ſpiritibus acidis, et ſalium in aqua, exponendae ſuperſunt amalgamationes, ſolutiones partiales, nempe extractiones et decoctiones, item ſolutiones bituminum in oleoſis etc. quae licet ab illis diſcrepare videntur, tamen alterutro vel vtroque ſimul modo eas perfici non dubitamus. Sed quoniam pauca experimenta extant, quae ad eas exponendas quid confe-

(**) Ibidem §. 14. 15.

runt, nec nobis ad noua instituenda commoditas data fuit, quamobrem illis exponendis in praesentia supersedemus.

§. 50. Caeterum muneris nostri erat, vt rationem redderemus, quare particulae metallorum et salium specifice grauiores in menstruis suis pendeant, nec lege communi in liquoribus specifice leuioribus subsidant. Verum quoniam hoc ante nos iam a viris eruditissimis Freindio (*) et Heinsio (**) satis dilucide explicatum habemus, ideo eidem reiterando non immorabimur.

(*) In praelectionibus Chymicis. (**) In descriptione cometae Anni 1744.

DE

DE MOTV AERIS IN FODINIS OBSERVATO.

AVCTORE
Michaele Lomonosow.

Cum anno 1740 Freibergae in Misnia degerem, vbi Chymiae et rei metallicae operam dabam; accidit aliquoties, vt fodinas inuisens obseruarem motum aeris, qui per puteos, cuniculos et fossas latentes etiam tranquillissimo coelo nullis machinis pneumaticis impulsus ita ferebatur, vt aliquando lampades fossoribus vsitatas extingueret. Huius tunc phaenomeni proprietates satis perspicere non mihi licuit, cum aliis rebus, quae ad praxim metallicam spectabant et vbique annotandae occurrebant, essem intendus. Verum postquam in patriam redux Georgii Agricolae libros de re metallica euoluerem, memoratum phaenomenon distincte descriptum inueni. (*) Verba laudati auctoris haec sunt: „Aer exterior se sua „sponte fundit in caua terrae, atque cum per ea pene„trare potest, rursus euolat foras: sed diuersa ratione hoc „fieri solet. Etenim vernis et aestiuis diebus in altiorem „puteum influit et per cuniculum vel fossam latentem, „permeat, ac ex humiliori effluit: similiter iisdem die„bus in altiorem cuniculum infunditur et interiecto puteo „defluit in humiliorem cuniculum atque ex eo emanat. „Autumnali autem et hyberno tempore in cuniculum vel „puteum humiliorem intrat et ex altiori exit. Verum

(*) Lib. 5. pag. 82.

„ea fluxionum aeris mutatio in temperatis regionibus et „locis fit initio veris et fine autumni; in frigidis vero in „fine veris et in initio autumni. Sed aer vtroque tempo„re, antequam curſum ſuum illum conſtanter teneat, ple„rumque quatuordecim dierum ſpatio crebras habet muta„tiones, modo in altiorem puteum vel cuniculum influens, „modo in humiliorem. Hanc igitur deſcriptionem a viro rei metallicae peritiſſimo nobis relictam cum viderim legibus aerometricis et hydroſtaticis eſſe conſonam, nullus dubitaui theoriam huius phaenomeni iisdem legibus ſuperſtrui et Geometrarum methodo concinnari poſſe.

Tab. VI. Fig. 1.

Definitio 1.

§. 1. Puteus eſt foſſa profunda anguſtior, ad horizontem perpendicularis A B, vel ad eundem plus aut minus inclinata C E.

Definitio 2.

§. 2. Foſſa lateris B E dicitur, quae ab ima parte putei B ad imam partem alterius putei E horizontaliter ducta illos coniungit ſeu communicat.

Corollarium.

§. 3. Fodina, quae conſtat ex duobus puteis, foſſa latente coniunctis ſeu communicatis, refert exacte tubos communicantes, quibus vtuntur Phyſici ad aequilibrium fluidorum demonſtrandum, quamobrem corpora fluida eiusmodi fodinae inſuſa legibus hydroſtaticis vt in ſyphonibus obtemperare debent.

Scholium

Scholium.

§. 4. Putei A B et E C crurum ſyphonis, foſſa autem latens B E baſeos illius vicem explent.

Definitio 3.

§. 5. Puteus altior C E dicitur, cuius apertura ſuperior C patet in parte montis editiore. Puteus humilior A B eſt, cuius apertura ſuperior A patet in parte montis humiliore.

Corollarium.

§. 6. Si vterque puteus et foſſa latens replentur fluido, quod aerem externum grauitate ſpecifica ſuperat, fluidum in puteo altiore praeponderabit fluido in puteo humiliori.

Definitio 4.

§. 7. Cuniculus eſt foſſa horizontalis F G vel H K, cuius apertura patet in parte montis decliri, ſuperior F G dicitur, quae montis partem editiorem occupat, inferior H K, quae humiliorem. Fig. 2.

Definitio 5.

§. 8. Puteus interiectus G K eſt, qui cuniculum ſuperiorem F G cum cuniculo inferiore H K coniugit ſeu communicat.

Corollarium.

§. 9. Cum etiam fodina FGKH tubos communicantes horizontaliter inclinatos repraeſentet, quamobrem circa aequilibrium corporum fluidorum illorum officio fungi poteſt.

Experientia 1.

§. 10. Aer in fodinis qualibet anni tempestate habet eundem gradum caloris, vbi fossores nullam iniuriam a frigore vel aestu sentiunt. Contra vero in libero aere hyberno tempore frigus, aestiuo aestus dominatur.

Corollarium.

§. 11. Aestate igitur aer in fodinis est frigidior externo, hyeme autem eodem calidior, adeoque aestate specifice grauior externo, hyeme specifice leuior.

Experientia 2.

§. 12. Aer externus tempore aestiuo vel hyberno dum sponte sua vel industria fossorum in cauia terrae infunditur, calorem vel frigus foris sibi impressum repente ammittit, et eandem temperiem in se recipit, qua latera fossarum sunt praedita, seu quam habebat aer, qui ante fodinam replebat.

Scholium.

§. 13. Quam repente aer calorem acquirit et amittit, respiratio quolibet momento temporis loquitur, vbi frigidum aera pulmonibus haurimus, calidum effundimus, qui ex ore emanans proxime admotam manum tepore, remotiorem vero leui frigore afficit.

Corollarium.

§. 14. Aer, qui in fodinas infunditur aestate redditur externo specifice grauior, hyeme eodem specifice leuior. (§. 11.)

Theorema

Theorema 1.

§. 15. Tempore aestiuo aer debet infundi in puteum altiorem C E et ex puteo humiliori A B egredi. Fig. 1.

Demonstratio.

Aer in fodinis aestiuo tempore est specifice grauior quam externus (§. 11.) quamobrem aer in puteo altioto C E praeponderabit aeri in puteo himiliori A B, (§. 6.) Consequenter ex C descendet vsque ad D, vt cum aere in puteo A B contento aequilibrium acquirat; post descensum expellet ex puteo A B quantitatem aeris aequalem quantitati, quae continebatur in parte C D putei E C. Interea aer externus propria sua grauitate descendet in puteum EC vsque ad D, habebitque eundem gradum caloris, quem habet reliqua pars aeris in fodina contenta (§. 12.) h. e. erit specifice grauior externo (§. 14.) Consequenter aer in puteo C E eadem ratione vt ante, praeponderabit aeri in puteo A B contento, et descendens vsque in D, illum per A expellet ex puteo A B, in partem C D putei E C, externum aerem rursum admissurus. Et hac ratione iste aeris motus tamdiu continuabitur, quousque aer in fodina contentus manebit specifice grauior externo, hoc est, tempore aestiuo aer infundetur in puteum altiorem, ex humiliore effluet. Q. E. D.

Scholium.

§. 16. Aer ex puteo humiliore A B egressus in eum qui succedit, integro suo pondere agere et aequilibrium in fodina restituere non potest; quippe quam primum

mum ex apertura A verſus L effluit, calore rarefit, cum reliquo aere commiscetur et diſtrahitur.

Theorema 2.

Fig. 2. §. 17. Tempore aeſtiuo aer debet infundi in cuniculum ſuperiorem F G, et e cuniculo inferiore H K effluere.

Demonſtratio.

Vtriusque putei aperturis H et F inſiſtunt columnae aeris ad ſuperficiem atmoſpherae exporrectae. Quae inſiſtit aperturae F, breuior eſt altera columna inſiſtente aperturae H, parte H P, quem defectum ſubſtituit columna aeris in puteo interiecto G K contenta. Quoniam autem tempore aeſtiuo aer in fodinis eſt ſpecifice grauior aere externo (§. 11.) quamobrem pars columnae atmoſphaericae in puteo interiecto contenta G K erit ſpecifice grauior parte columnae P H. Reliquae autem columnarum partes ad ſuperficiem atmoſphaerae exporrectae ſunt eiusdem altitudinis et grauitatis ſpecifice (nam in eadem fere atmoſphaerae parte ſubdio ad vnum terminum extenduntur) quamobrem columna aeris, quae inſiſtit aperturae F cum parte ſpecifice grauiore G K praeponderabit columnae inſiſtenti aperturae H cum parte ſpecifice leuiore H P. Conſequenter ſublato aequilibrio aer in puteo interiecto G K deſcendet in cuniculum inferiorem H K, et quantitatem aeris ſibi aequalem ex eo foras per H protrudet. In puteum interiectum G K aer defluet ex cuniculo F G, eique ſuccedet externus; qui tandem refrigeratus (§. 12.) in puteum G K influet, et ſublato iterum aequilibrio per cuniculum H K foras egredietur; et

et ſic continuo aer in cuniculum ſuperiorem ingredietur, ex inferiore effluet, quousque aer externus manebit ſpecifice leuior interno, hoc eſt, quamdiu aeſtas durabit. (§. 11.) Q. E. D.

Corollarium 1.

§. 18. Vbi aeſtas longiori tempore permanet, ibi etiam aer diutius eam directionem motus conſeruabit, qua ingreditur in puteum vel cuniculum altiorem ex humiliore effluit. Et contra vbi aeſtas breuis eſt, ibi etiam haec fluxio aeris breuiore tempore durabit.

Corollarium 2.

§. 19. Mirum profecto non eſt in oris temperatis eiusmodi fluxionem incipere initio veris et fine autumni ceſſare, in frigidis autem initium capere ſub finem veris et ſub initium autumni deſinere.

Theorema 3.

§. 20. Brumali tempore aer infundi debet in puteum humiliorem A B, et ex puteo altiore E C effluere.

Demonſtratio.

Puteus CE eſt altior puteo AB (per hypoth.) et aer in fodinis tempore hyberno ſpecifice leuior externo (§. 11.). Igitur pars A L columnae inſiſtentis extremitati B erit ſpecifice grauior parte DE columnae inſiſtentis extremitati E: (§. eod.) Quamobrem columna inſiſtens extremitati B praeponderabit columnae inſiſtenti extremitati E, adeoque aer exter-

nus irruet in aperturam A putei AB, ac illum, qui ceteras partes fodinae occupat per aperturam C protrudet foras. Et quoniam aer fodinam ingreſſus hyeme redditur ſpecifice grauior externo (§. 14.) quamobrem ſemper aequilibrio ſublato aer hyberno tempore in puteum humiorem influet, ex altiore effluet. Q. E. D.

Corollarium. 1.

§. 21. Quoniam fodina F G H K eadem ratione eſt comparata, vt fodina A B C E, nimirum pars H P columnae aeris ad ſuperficiem atmoſphaerae exporrectae, aperturae H inſiſtentis, tempore brumali eſt ſpecifice grauior parte G K, quae replet puteum interiectum, quamobrem aer hyberno tempore infundetur in cuniculum inferiorem, ex ſuperiore egredietur

Corollarium 2.

§. 22. Aer externus continuo ingreditur *in puteos* et cuniculos inferiores, ex ſuperioribus egreditur, quamdiu manet ſpecifice grauior interno, conſequenter vbi hyems pluribus menſibus dominatur, ibi etiam motus aeris ab apertura inferiore verſus ſuperiorem diutius durare debet, quam vbi hyems eſt breuior, adeoque in regionibus frigidis aer externus incipere debet fluxionem per fodinas ab apertura putei vel cuniculi humilioris verſus aperturam putei vel cuniculi altioris ſub initium autumni, eamque finire ſub exitum veris: ſub caelo autem tamperato motus hic initium capere debet ſub finem autumni, ſub initium veris ceſſare.

Co-

Corollarium 3.

§. 23. Vere et autumno, quando frigus et calor luctantur, aer externus tum calidior tum frigidior redditur interno, qui fodinas occupat, adeoque fit externo tum ſpecifice leuior, tum grauior. Mirum igitur non eſt his anni tempeſtatibus motum illius quatuordecim dierum circiter ſpatio contrariis directionibus fondinas alternatim permeare

Scholium 1.

§. 24. Hanc theoriam de aeris motu ſpontaneo in fodinis non inutilem fore arbitramur praefectis fodinarum et foſſoribſis. Etenim (ſi locorum ſitus patitur) puteis, cuniculis et foſſis ea ratione ductis, hi laboribus, illi ſumptibus parcere poſſunt: ſiquidem ad conſtruendas machinas pneumaticas, ad easque mouendas, propter aerem ſubterraneis vaporibus infectum expellendum, non exigua pecunia et opera impenditur.

Scholium 3.

§. 25. Nec in phaenominis rerum naturalium explicandis non aliqua hinc opera expectari poteſt. Athanaſius Kircherus in Mundo ſuo ſubterraneo refert, dari in Italia quasdem ſpeluncas, quae certis anni tempeſtatibus aerem effundunt et in agris vicinis ventum producunt, quod propoſitae huius theoriae auxilio dilucidari poſſe cenſemus.

DE INSIGNI PARADOXO PHYSICO,

AERE SCILICET IN 1837 VOLVMINIS PARTEM AQVA GELASCENTE REDVCTO, ET DE COMPVTATIONE VIS, QVAM AQVA GELASCENS ET SESE IN VOLVMEN MAIVS EXPANDENS IN SPHAERA CAVA FERREA, BOMBA DICTA, AD EAM DISRVMPENDAM IMPENDIT,

COGITATIONES

G. W. Richmanni.

§. 1.

Nobiliores quidem videntur illius in rebus phyſicis partes, qui nouis inueniendis occupatus eſt, quam eius, qui in ea, quae pro certis et veris habentur, inquirit, et nonſolum, quae talia deprehendit, ſed etiam quae incerta et falſa detegit, notat, vt aliis in errores incidendi occaſio praecidatur. Non tamen prorſus negligendas ſed omnino ſcientiae naturalis cultore dignas et vtiles puto has poſteriores etiam curas. Hinc non inutile arbitror, ſi paradoxon Celeb. Haleſi experimentum examinavero et inquiram, quantum illi tribuendum ſit.

§. 2. Deſcribit illud Celeb. autor. in egregio ſuo opere, ſtatica vegetabilium dicto, in appendice. Merita huius viri in ſcientiam naturalem tanti aeſtimo, vt tantum abſit, vt celeberrimi et ingenioſiſſimi experimentatoris laudi dubiis meis detrahere velim, vt ſemper mihi glorioſum ducam ipſius veſtigia premere et ad exemplum eius de ſcientia naturali bene mereri. Improuiſis et

variis

variis circumſtantiis concurrentibus perſpicaciſſimus ſaepius experimentator confunditur vt interdum falſa pro experientia comprobatis commendet. Imprimis hoc fit, ſi ob celeritatem phaenomeni omnes circumſtantias obſeruare non licet. Caute hinc procedendum eſt in aſſenſu experimentis eiusmodi praebendo, inprimis ſi aliquod paradoxon continent, et prius, quomodo inſtituta ſint exactiſſime noſſe debemus, antequam iudicium de iis ferre licet.

§. 3. Compreſſio aëris tanta, qua in 1837 voluminis partem reductus, hincque duplam aquae et lapidis ferme denſitatem obtinuiſſe aſſeritur, omnino tale paradoxon phyſicum mihi eſt, et hinc priusquam aſſenſus praeberi poterit, antea, quomodo inſtitutum ſit experimentum, bene examinandum eſt.

§. 4. Ad hanc ſtupendam denſitatem aëri tribuendam ſequenti methodo ingenioſiſſima vſus eſt Cel. Hales. Elegit ſphaeram ferream cauam, cuius capacitatis diameter $6^{II}5^{III}$ Lond. erat, et minima parietum craſſities $1^{II}\,2^{III}$ L. Hanc ſphaeram cum vehementer gelabat, aqua impleuit, et tubum vitreum ab vna parte hermetice clauſum, cuius capacitatis longitudo erat $4^{II}.\,0^{III}\,6^{IV}$ et diameter $1^{III}\,6^{IV}$. vt drachmam vnam et ſex grana aquae recipere poſſet, phialae paruae vitreae immiſit, in cuius fundo parum argenti viui cum ſupernatante ſpiritu Terebinthinae per Indigo colorato ſtagnabat, phialam deinde cum tubo vitreo aquae ſphaera ferrea contentae immerſit. Hoc facto foramini ſphaerae ferreae lignum denſum rite tornatum immiſit et ope praeli adegit fortiſſime, ligno prius materia ex maſtige, cera et Terebinthina parata obducto. Tandem ma-

teria frigorifica ex copiosa glacie contusa et tertia parte salis marini parata sphaeram operuit. Post paruum temporis interuallum sphaera fracta in tres partes dissiliit, quae tamen ab inferiore parte sese contingebant. Glacie copiosis bullulis aereis distincta parietes partium dictarum sphaerae obducti obseruabantur, et crassities glaciei erat ferme $\frac{3}{4}$ partium digiti. Phiala et tubus vitreus in frustula parua dissilierant. Vtraque tamen extremitas tubi, cum ibi finiretur, vbi glacies parietes obduxit, cum glacie coaluerat. Interna superficies frustulorum tubi vitrei fracti in ipso vertice etiam Terebinthina colorata et mercurio maculata obseruabatur.

§. 5. Dum celeb. Hales hoc phaenomenon contemplatur, putat, hinc concludi posse aerem in tubo vitreo sic compressum fuisse, vt spiritus Terebinthinae tantum non ipsum tubi verticem attingere debuerit. Per mercurium enim vel vitrum aerem transisse *et se cum* aqua miscuisse impossibile iudicat. Vt vero condensationem definiret, inquisiuit in cohaesionem ferri, quam aquae gelascentis pressioni in sectionem capacitatis sphaerae maximam circularem et hanc aeris in tubo inclusi elasticitati aequalem posuit, et hinc deduxit, aerem in 1837 voluminis partem coactum fuisse. Hinc cel. Musschenbroek *in* elem. Phys. §. 794. sequentem legitime elicit conclusionem: *ita aer fuisset duplo densior quam aqua, et vltra, adeoque, cum incondensabilis sit, particulae aerem componentes, erunt prorsus diuersae indolis, quam aqueae; caeteroquin enim modo in volumen* 800 *minus circiter comprimi potuissent, tumque eiusdem densitatis ac aqua, viribus quibusvis comprimentibus re-*

reſtitiſſent. Concluſio tamen haec, licet legitima, fit inanis, ſi experimentum ipſum eſt fallax. Minorem tamen Cel. Hales inuenit denſitatem, ac ex datis colligere licet.

§. 6. Plane aliter hinc ſentio ac Cel. de Buffon, qui in verſione operis ſtaticae vegetabilium in linguam Gallicam calculum Haleſi emendaturus minorem denſitatem inuenit, quia ſectionem ſphaerae maximam, cum ſectione capacitatis ſphaerae maxima comparaturus pro diametro ſphaerae aſſumſit diametrum capacitatis ſphaerae ſimplici craſſitie parietum auctam, cum tamen diametrum capacitatis ſphaerae duplici craſſitie parietum augere debuiſſet ad diametrum ſphaerae totius definiendam. Hoc errore admiſſo planum cohaeſionis multo minus inuenire debuit ac Cel. Hales, hinc denſitatem etiam aeris compreſſi minorem.

§. 7. Ad calculum rite inſtituendum, preſſio aquae gelaſcentis in ſectionem capacitatis ſphaerae maximam cohaeſioni parietum ſphaerae ferreae circiter aequalis poni debet. Ponatur nunc cum autore diameter capacitatis ſphaerae $= 6^{II}\ 5^{III}$, L. et craſſities parietum minima $= 1^{II}\ 2^{III}$ L. diameter ſphaerae ipſius erit $= 8^{II}\ 9^{III}$ L. Poſitaque diametro ad periph. $= 113 : 355$, erit ſectio capacitatis ſphaerae maxima $= 33^{II}\ 18^{III}$ □, et ſectio ſphaerae maxima $= 62^{II}\ 21^{III}$, □. Hinc ſectio annularis parietum ſphaerae, quae ſimul eſt planum cohaeſionis $= 29^{II}.\ 03^{III}$ □, quod Cel. Buffon ob errorem admiſſum $= 13^{II}.\ 40^{III}$ □ iuuenit. Sit cohaeſio fili ferrei diametri $\frac{1}{10}$ dig. Rhen. ſecundum experimenta Muſſchenbroeckii

broeckii in introd. de cohaerentia corporum, 450 librarum Amstelod. vel 418 ½ librar. Lond. posita libra Amst. ad libram Lond. vti 93 ad 100. Cum mensura Rhenana sit ad mensuram Lond. vt 139 ad 135, erit 1^{III} Rhen. = 103^{V} Lond. ferme, et hinc sectio fili ad axin normalis 8332^{V} □. Quoties haec sectio in plano cohaesionis 2903^{III} □ continetur, toties continentur $418\frac{1}{2}$ librae Lond. in numero librarum cohaesionem parietum sphaerae exprimente 1548120. Atmosphaera ponitur in pollicem Lond. quadratum premere pondere 15. $\frac{5}{12}$ libr. Lond. hinc pressio atmosphaerae in sectionem capacitatis sphaerae maximam erit 508 libr. Lond. ferme. Hinc tota resistentia quae aquae gelascenti fit est 1458628 libr. Lond. circiter, si cohaesio ferri fusi ponitur aequalis cohaesioni ferri cusi. Pressio gelascentis aquae in sectionem capacitatis sphaerae maximam 3318^{III} □ comparari potest cum pressione atmosphaerae in aequalem superficiem, quae *est 508 libr.* Lond. Est hinc pressio aquae gelascentis in sectionem capacitatis sphaerae maximam ad pressionem atmosphaerae in aequalem aream vt 1458628 ad 508, vt 2871 ad 1 ferme. Si tandem volumina aeris ponuntur in ratione inuersa virium comprimentium, aer in tubo vitreo compressione aquae gelascentis in partem voluminis 2871 reductus est, nisi se torturae huic subduxerit per poros vitri vel mercurii; quare vitri purissimi densitatem superaverit necessum est. Si ferri fusi tamen cohaesio ponitur ad cohaesionem ferri cusi vt 1:2, in partem voluminis 1435 aër redactus dici debet, discrepantiae huius Cel. Hales rationem habuisse non apparet.

§. 8.

§. 8. Si alia fluida praeter argentum viuum conſideramus, aër in eorum interſtitiis contentus ad aequilibrium quoddam videtur eniti, et ſi in fluidis tanta copia adeſt, vt externus premens et cohaeſio partium fluidi non ſufficiat illi coercendo, erumpere, ſi vero parciori adeſt copia, admittere aërem externum et cum illo vniri, hocque lentiſſime fieri, ſi differentia virium contranitentium minor eſt. Quo maior vero haec differentia eſt eo celerior eſt aëris in fluidis incluſi mixtio cum aëre externo, vel externi aëris receptio in interſtitia fluidi, ſi hic minus reſiſtitur. Sic videmus, aqua ſub campana orbi antliae pneumaticae impoſita et preſſione aëris externi minuta, ſtatim aërem in aqua contentum ex aqua forma minimarum bullularam aſcendere et campanam occupare, aquamque tali ratione aëre ſuo ex parte orbatam et aëri libero expoſitam ſenſim aërem recipere in interſtitia, non ſecus ac ſpongia aquam in ſua interſtitia recipit. Pariter aqua per poros ligni et multa alia corpora tranſit.

§. 9. Si ergo ad haec phaenomena non reſpicere licet, quia aër cum argento non aeque facile miſcetur ac cum aliis fluidis; obſeruauit enim celeb. Hales aërem in 37 voluminis partem reductum non penetraſſe neque vitrum neque argentum viuum; nondum tamen hinc certus eſſe poſſum, ne maiori quidem compreſſione adhibita mixtionem et penetrationem oriri poſſe. Si enim conſidero compreſſione aucta etiam particulas aëris minui debere, non videtur repugnare, particulas ita minui, vt interſtitiis et poris vitri et mercurii recipi poſſint, non minus ac particulae aeris naturalis denſitatis per poros ligni transeunt.

eunt. Si ergo ſpiritus tereb. verticem tubi plane attigit, vt experimentum docuit Clariſſ. Hales, exinde maiori cum veritatis ſpecie concludi poſſe videtur, particulas aëris ita paruas factas, vt tandem per poros vel vitri vel mercurii vel vtriusque tranſierint et ſpiritui terebinthinae et mercurio locum conceſſerint.

§. 10. Cum haec admodum ſpecioſa mihi videantur, repetendum puto experimentum cum ſphaeris diuerſis, quarum parietes craſſitie diſcrepent, vt pateat, an volumina aëris poſt compreſſionem ſint vt vires comprimentes inuerſe. Tubus vitreus in medio capacior adhibeatur, vt ſpatia aëris melius comparari poſſint maiori quantitate aëris compreſſa et ea quidem quam ipſe ſuadet Celeb. autor praecautione. Obſeruauit enim aquam in medio ſphaerae in glaciem non abiiſſe, et hinc iudicauit tubum vitreum cum phiala, ſi in medio ſphaerae rite fulciretur, nulli rupturae periculo obnoxium futurum et ſic altitudinem fluidi in tubum compreſſione eleuati et volumen aëris compreſſi poſt ruptam ſphaeram proditum iri colore coeruleo, quo parietes tubi interni maculari deberent.

§. 11. Si experimentum ſuccedit et 1) altitudo aſcenſus ſpir. tereb. colorati in tubo, poſt fractam ſphaeram ferream illibato, conſequenter ſpatium aëris poſt compreſſionem innoteſcit, et 2) ſpatium iſtud eſt inuerſe vt vis premens, ſi 3) aër in tubo vitreo compreſſione ceſſante idem volumen iterum habet, quod ante compreſſionem habebat, non dubitandum eſt amplius de iis, quae Celeber. Hales aſſeruit. Si vero totus tubus vs-

que

que ad verticem ſpiritu terebinthinae coloratus eſt, non dubitabo afferere, aërem ob diminutionem particularum compreſſione factam ſe per poros vitri vel mercurii ſubduxiſſe.

§. 12. Nihil reſtat, quam vt indicem, quomodo experimentum Haleſi repetendum ſit ita, vt tubus vitreus cum phiala non frangatur, conſequenter de ſtatu aëris, in tubo in ſtatu compreſſionis contenti, iudicium ferri poſſit. Vt hoc obtineatur, expedit conum ligneum, quo obturatur foramen ſphaerae ferreae, cum cauda parallelepipedali inſtruere, quae tantae longitudinis ſit, vt extremitas, ſi immititur ſphaerae, ſesquidigitum diſtet a parietibus ſphaerae. Huic parallelepipedo phiala cum tubo ita adplicanda et firmanda eſt, vt ſi longitudo tubi in duas partes diuidatur, punctum diuiſionis cum centro ſphaerae coincidat cono foramini immiſſo et praelo fortiſſime adacto. Si nunc totus apparatus ſphaerae immittitur et conus cum praelo ſic firmatur vt rupta ſphaera immobilis et praelo connexus maneat, totus apparatus immobilis manebit et illibatus, vt quid in tubo factum ſit, cognoſci poſſit.

TENTAMEN EXPLICANDI PHAENOMENON PARADOXON SCIL. THERMOMETRO MERCVRIALI EX AQVA EXTRACTO MERCVRIVM IN AERE, AQVA CALIDIORI, DESCENDERE ET OSTENDERE TEMPERIEM MINVS CALIDAM, AC AERIS AMBIENTIS EST.

AVCTORE
G. W. Richmann.

§. 1.

Cum experimenta de decremento caloris aquae inſtituerem, ſaepius turbatus ſum phaenomeno quodam, quod fruſtra diu animo volui, in rationem phaenomeni inquirens. Tandem vero aliquid, quod maxime probabile viſum eſt, ſubiit mentem, quod nunc cum ſocietate communicabo. Forte haec quaeſtiuncunque inquiſitio efficiet, vt paradoxa phaenomena de frigore horrendo aëris nebuloſi in Sibyria a Cel. Gmelino et aliis obſeruato, explicari ſaltim ex parte poſſint. Prius tamen obſeruationes paradoxi iſtius, ineratas ſaepius, recenſebo, quam rationem phaenomeni exponam.

§. 2. Experim. I. anno 1747 dei 7 Ian.

In temperie aëris 59 gr. Therm. Fhar. aqua temperiei 58 gr. collocata erat, cui thermometrum erat immerſum, extracto thermometro ex aqua, quinque minutis primis ad gr. 49 ¼ deſcedenbat mercurius in aëre temperiei 59 graduum; deinde aſcendebat in 25 min. pr. ſenſim ad gr. 56, decreuerat vero tem-

temperies aëris interea a gr. 59 ad gr. 57um. Dum aquae iterum immittebatur thermometrum, oſtendebat temperiem aquae 58¼ gr. Dum vero iterum extrahebam, deſcendebat mercurius ad gr. 54 vno minuto et dimidio, aſcendebat deinde in temperie aëris conſtanter eadem 58 gr. ad gr. 55¼ quatuor minutis primis, haerebat adhuc circa eundem gradum poſt 12 min. pr. Immerſo iterum thermometro aquae thermometrum oſtendebat temperiem aquae 58 gr.

§. 3. Experim. II. die 8 Ian. 1747.

Cum temperies aëris erat 64 graduum extracto thermometro ex aqua temperiei 63 graduum, mercurius deſcendebat quinque minutis primis ad gr. 54. Incepit deinde aſcendere iterum mercurius et in tribus minutis ad gr. 56, in 8 min. prim ad gradum 59, in 12 min. prim. ad gr. 60 et tandem in 25 min. pr. ad gr. 64 peruenit, aquae vero iterum immiſſum 63 gr. oſtendebat. Hoc experimentum eodem die ſexies repetii, et ſemper obſeruaui thermometro ex aqua 63 gr. extracto mercurium in aëre temperiei 64 graduum quinque ferme minutis primis deſcendiſſe ad gr. 54tum et deinde aſcendiſſe tardiori motu.

§. 4. Experim. III. die 9 Ian. 1747.

Extraxi thermometrum ex aqua temperiei 48 graduum in aëre temperiei 50 gr. et deſcendit mercurius ad gradum 46 et deinde iterum aſcendit ad gradum quinquageſimum temperiei aeris.

§. 5. Experim. IV. die 15. Ian. 1747.

In temperie aëris 62 graduum extraxi thermometrum ex aqua temperiei 60¼ gr. et deſcendebat mercu-

rius ad gr. 51 in quinque circiter minutis primis et dein in 9 min. pr. ad gr. 59 aſcendebat et in 12 min. pr. ad gr. 60 et poſt 17 min. pr. ad gr. 62¼. Aëris ambientis temperies interim ad gr. 63 creuerat, vt hinc mercurius in aëre, cuius temperies creuit, nihilominus deſcenderit. Paradoxon tali ratione augetur.

Immittebatur thermometrum iterum aquae et oſtendebat gr. 60¼, circa quem gradum per horam vnam atque alteram conſtanter haerebat mercurius, licet interea aëris temperies ad gr. 64 creuiſſet. Extracto thermometro etiam in tali aëre deſcendit mercurius tribus minutis primis ad gr. 54, poſtea vero incepit aſcendere et in duobus minutis primis attingebat 56 gr. in 4 min. primis 58 gr. in 6 min. pr. 60 gr. poſt 15 min. prim. adhuc circa 60 gr. haerebat, poſt 26 min. prima circa 61 gr. et poſt 30 min. pr. ad 62 gr. et poſt 35 min. pr. ad gr. 64 peruenerat. Haſtenus attonitus phaenomenon hoc obſeruavi et quantacunque ſolertia circumſtantias perpenderem, nullam phaenomeni cauſam detegere potui. Tandem incidit in mentem mutare experimentum.

§. 6. Experim. V. eodem die.

Sumſi manu, quae calidor erat ac aër et aqua, aquam temperiei 60¼ gr. et aſperſi thermometrum ſiccum, deſcendebatque mercurius a gr. 64 ad gr. 60 tribus min. pr. et deinde a gr. 60 ad gr. 59 min. primo temporis, haerebat circa 58½ per tria min pr. deinde aſcendere incipiebat, et 4 min. pr. ferme attingebat gr. 60, poſt 9 min pr. 62 gr. poſt 12 min. pr. 63 et tandem poſt 17 min. pr. gradum 64 aëris ambientis. Bulbus etiam thermometri, dum tangebam, ſiccus erat. §. 7.

§. 7. Experim. VI. die 5 Aug. 1748.

Thermometro in aëre externo oſtendente gr. 68 et in aqua 66 gradum Thermometrum ex aqua extractum poſt 9 min. prim. oſtendebat gr. 64.

§. 8. Experim. VII. die 6 Aug. 1748.

In aëre temperiei 63 gr. ex aqua temperiei 63 gr. thermometrum extraxi, mercurius poſt min. pr. oſtendit gr. 62, poſt duo min. pr. 61, poſt 3 min. pr. 60 gr. poſt 5 min. pr. adhuc haerebat circa 60 gr. Deinde aſcendere incepit, et poſt 9 min pr. aſcendit ad 60½ gr. poſt 15 min pr. ad 61. Tandem priorem terminum 63 gr. iterum attingebat, et bulbus thermometri proſus ſiccus deprehendebatur.

§. 9. Experim. VIII.

Eodem die in eadem aëris temperie aquae immerſi thermometrum, quod oſtendebat gr. 63 et deinde extraxi, poſt duo min. pr. oſtendebat gr. 61, poſt 4 min. pr. 60 gr. poſt 9 min. pr. adhuc oſtendebat gr. 60, cum contrectarem bulbum thermometri, deprehendi adhuc humidum. Simulac vero humiditatem abſterſi, ſtatim ad gr. 63 aëris ambientis eleuabatur mercurius. Hic illud notari meretur, tardum fuiſſe deſcenſum cum in omnibus ferme caeteris experimentis celerior fuerit. Coelum enim eo die fuit nubibus obtectum et vehemens ventus occidentalis flabat, praecedente proxima nocte pluuia vehementi; ob humiditatem hinc aëris difficulter thermometrum ſiccum reddebatur.

§. 10. Ex hiſce obſeruationibus ſatis patet,

1) Altitudinem mercurii in thermometro ex aqua extracto

tracto in temperie aëris maiori vel aequali temperiei aquae, ex qua extrahitur, decreſcere.

2) Deinde iterum creſcere, donec temperiem aëris oſtendere incipit.

3) Tempus, quo altitudo decreſcit brevius eſſe tempore quo iterum creſcit.

4) Simulac thermometrum ex aqua extractum eundem oſtendit gradum, quem aër, etiam thermometri bulbum ſiccum eſſe. §. 6. §. 8.

5) Quamdiu vero thermometrum ex aqua extractum non oſtendit temperiem aëris, tamdiu bulbum thermometri humidum eſſe. §. 9.

6) A ſola humectatione ergo oriri deſcenſum deſcriptum mercurii in thermometro, eaque quomodocunque facta deſcenſum fieri, et thermometrum ſiccum redditum oſtendere temperiem aëris.

7) Deſcenſum hunc mercurii modo maiorem modo minorem eſſe.

§. 11. Saepius etiam obſeruaui thermometrum in aëre libero oſtendere gradum quendam infra gradum congelationis aquae cum tempeſtas pluuioſa et mitior videbatur. Subiit animum ob humiditatem thermometro adhaerentem ſimile quid hic factum et thermometrum non oſtendiſſe veram aeris temperiem. Similis obſeruatio eſt Celeb. Krafftii in experimentis phyſicis ſuis p. 204. vbi ſcribit: *Si thermometrum libero aere quaquauerſum circum datum neque vlli alii corpori contiguum, quod calorem aliquem illi largiri poſſit, ſuſpendatur, et aqua ob eandem cauſam non vaſe contineatur, ſed in linteo tenuiſſimo et puriſ-*

puriſſimo madefacto expanſa ſit, obſeruabitur hoc linteum iam a frigore rigidum, cum gradum 33 *idem thermometrum notat.* Niſi dicere velis aëris temperiem reuera frigidiorem fuiſſe ac thermometrum notabat, mercuriumque nondum temperiem aëris aſſumiſſe, eaquepropter expanſam aquam ſec. legem decrem. caloris ob auctam ſuperficiem citius obtinuiſſe gr. 32. ac mercurius in bulbo thermometri.

§. 12. Cauſam phaenomeni quod attinet, a dilatatione vitri ob calorem aëris maiorem calore aquae fieri debere deſcenſum mercurii, nullo modo poteſt affirmari, cum differentia inter temperiem aëris et aquae ſit exigua et interdum nulla, interdum minor nihilo, et hinc dilatatio vitri ſit inſenſibilis vel prorſus nulla vel etiam in contractionem abeat. Idem iudicauit Cel. Gmelin in Praefatione Florae ſuae Sibiricae praemiſſa.

Humiditatem vero bulbi thermometrici cum hoc phaenomeno neceſſario connexam eſſe patet ex recenſitis experimentis. Exponendum ergo reſtat, quomodo humiditas huius phaenomeni cauſa eſſe queat.

§. 13. Si reſpicio ad quaedam experimenta, cum mixtione materiarum quarundam cum aqua frigus producitur, reuoco in memoriam inprimis ea, quae Cel. Muſchenbroeck in P. 2 tentaminum Acad. Flor. p. 135 in additamentis ſuis notauit: ſcil. ſalis vrinae volatilis drachmas duas affuſas ad aquae vnciam produxiſſe frigus, deſcendente liquore in thermoſcopio a gradu quadrageſimo quarto ad gr. 42. et ibid p. 136. ſesquiunciam aquae affuſam ſuliginis e camino vnciae ſemiſſi generaſſe frigus deſcendente thermoſcopio ex gr. 44to ad gr 42½.

§. 14. Oborta eſt ſuſpicio ſimiles materias in aëre tunc temporis volitaſſe, quae iunctae cuticulae aquae, qua obductum erat thermometrum, frigus produxerunt, quod mercurium in thermometro deſcendere coëgit. Vt rem ſtabilitum irem, tentaui vaporibus ſalis volatilis vrinae, ſale volatili ſub thermometri bulbo in quadam diſtantia poſito, cuticulam aqueam thermometri refrigerare, at nullam hinc mutationem, quam ſperaui tamen, factam eſſe ingenue confiteor.

§. 15. Interim tamen, quia non ſemper eadem mutatio, ſi experimentum inſtituitur, oritur, ſed modo minor modo maior, et mutatio haec neceſſario ab humiditate pendeat, ea vero ſemper eadem quantitate adhaereat, ſcil. ea, quae bulbo thermometri eiusdem adhaerere poteſt, cauſa mutationis ex parte in conſtitutione aëris ambientis latere videtur. Is vero cum calidior ſit aqua et nihilominus faciat, vt mercurius deſcendat, modo plus modo minus, peculiari materia frigoriſica modo minori modo maiori quantitate gravidus eſſe videtur, quae cum cuticula aquea concurrens refrigerii huius cauſa eſſe poteſt.

An in aëre ſalia talia volitent vel etiam tales materiae quae concurſu ſalia talia conſtituere poſſint, quae cum aqua concurrentia frigus producere queant, et qualia haec ſint? chymicis diiudicandum relinquo.

C. G.

C. G. KRATZENSTEIN

MECHANICAE COELESTIS SPECIMEN PRIMVM CONTINENS: NOVAM TVBOS LONGIORES COMMODISSIME TRACTANDI METHODVM.

§. 1.

Quotiescunque attentus coeli contemplator aut phaſes eclipſium ſolis et lunae determinare, aut maculas eorumdem delineare, aut diametrum planetarum adparentem per micrometrum dimetiri intendit; toties ipſi optandum ſoret, vt dicere poſſet: ſol ſiſte gradum; et luna, ne progrediaris vltra. Siquidem motus eorum diurnus aſtronomi operam quouis momento illudit.

§. 2. Nihil vero eſt tam arduum nihilque tam paradoxon, quod vnquam philoſophi efficere non conati ſint. Quamquam enim ſolem ipſum in motu ſuo apparente impedire non audeant, tentauerunt tamen radios eiusdem figere. Primus, qui, quantum ſcio, huius rei periculum fecit, fuit Farenheitius, qui duobus ſpeculis, ope manubrii verſatilibus, radios ſolares, quamdiu voluit, in eadem ſemper directione conſeruauit. Cum vero radii ſolares per duplicem reflexionem a ſpeculo metallico admodum debilitentur; et praeterea tractatio ſpeculorum manualis ſatis taedioſa ſit et ſocium expoſcat; cel. Graueſande in tomo II. edit. nouiſſ. elem. phyſ. cum publico communicauit machinam, huic ſcopo magis accommodatam; vbi ſcilicet ſpeculum ſimplex metallicum per horologium ita dirigitur, vt radius ſolis reflexus in eadem continuo, quae placuerit, maneat directione; eamdemque dicauit experimen-

tis opticis, circa radios ſolares in camera obſcura inſtituendis.

§. 3. Nouam vero haec machina nobis ſuppeditavit meditationem. Cum nimirum in aſtronomia practica ſuſtentatio, eleuatio et directio tuborum praeſertim longiorum ad deſideratam altitudinem et plagam maximas difficultates inuoluat; naturalis eſt concluſio, omnes haſce difficultates euanéſcere, ſi tubus ſemel pro ſemper in ſitu quodam commodo, e. g. horizontali, firmetur et obiectum deſideratum per radium reflexum et fixum continuo ad tubum deferatur; id quod per memoratam machinam praeſtare licet. Operae itaque pretium fore duco, ſi eam ex Graueſandio, quoad eſſentialia quidem non mutatam, emendatam tamen et huic ſcopo magis accommodatam, hic exponam.

§. 4. Vt eo facilius et iucundius diiudicari queat machinae effectus, in explanatione eiusdem *methodum* obſeruabimus heuriſticam. Erit haec ſimul demonſtrationis loco, quam Grauéſandius paullum intricatam, exque alio fonte deductam ſubiunxit. Concipiamus obſeruatorem in ſphaera parallela, i. e. ſub polo, ſolem vero vel quemuis planetam in aequatore eſſe conſtitutum; et radium reflexum continuo horizontaliter in linea meridiana, in qua tubus locatus ſit, eſſe ſeruandum. Iam ex catoptricis conſtat, radium reflexum ſemper duplum anguli, per motum ſpeculi deſcripti, percurrere. Si itaque ad motum radii incidentis accedat motus ſpeculi aequiualens motui radii reflexi, neceſſario ſequitur, ipſum tum radium reflexum perſiſtere debere immobilem. Si e. g. Sol ab hora

hora VI. matutina vsque ad horam VI. vespertinam semicirculum percurrit, speculum quadrantem tantum percurrere debebit. Iam ex natura circuli notum est, angulum ad peripheriam semper esse dimidium anguli centralis. Ideoque si speculum in peripheria circuli fuerit constitutum et promoueatur per radium circuli, mediante cruce ad centrum speculi affixo, quod crura anguli ad peripheriam repraesentat, statim quaesitum obtinebitur.

§. 4. Describatur itaque in plano horizontali circulus horarius *a b g d* (n. 1) circa cuius centrum *c* index in extremitate furcatus *c b* sit mobilis. In peripheria huius circuli, et quidem in puncto pro lubitu adsumto, e. g. meridiano, constituatur speculum, in centro auersae partis cauda ad superficiem perpendiculari instructum, quae ab extremitate indicis bifurcata excipi possit. Sit iam punctum orientis in O, meridiei in S et occidentis in W et index circa ortum solis ad horam VI. matutinam conuersus. Quoniam tum angulus *b a c* est semirectus, speculum ad radium incidentem erit inclinatum ad angulum itidem semirectum; vnde per principia catoptrica angulus, quem facit radius incidens cum reflexo, erit rectus; verget hic itaque secundum ductum lineae meridianae ad S. Hora meridiana index conuertatur in XII (n. 2) et radius incidens ad superficiem speculi erit perpendicularis; ideoque radius reflexus iterum in meridiana cogitur incedere. Hora VI. vespertina index ducatur ad *d* (n. 3) et planum speculi iterum efficiet angulum semirectum cum radio occidentalis solis incidente. Hic itaque eodem, vt priori, modo ad angulum rectum i. e. in linea meridia- Tab. VIII. Fig. 1.

na ad S (n. 3) reflectetur. Eadem ratione quauis intermedia hora radius in ea manebit fixus.

§. 5. In hoc casu, quia sol vel planeta nullam habet declinationem, sed in ipso horizonte mouetur, speculum in situ verticali horizontaliter conuertitur. Cum vero sol vel planeta habuerit aliquam declinationem ideoque et altitudinem supra horizontem, et tamen radius reflexus iterum desideratur horizontalis, speculum non retinere potest situm verticalem, sed obliquam obtinebit positionem, quam statim determinabimus.

§. 6. Ponamus itaque declinationem esse aequalem angulo cgh, radius solis, qui supra centrum c circulum diurnum describit erit $= hg$. Haec linea vero est $=$ secanti anguli declinationis cgh ad radium cg. Quoniam adeo per antecedentia speculum in peripheria circuli, circulum solis diurnum repraesentantis, constituendum est, eleuetur speculum ad altitudinem tangentis anguli declinationis vsque ad a distantia vero ah fiat $=$ secanti declinationis hg, patet centrum speculi iterum esse in peripheria circuli, radio obliquo $hg = ha$ descripti. Porro propter parallelismum linearum ah et cg angulus ahg est angulus complementi declinationis ad 180°; ideoque, quia triangulum ahg per constructionem est aequicrurum, angulorum a et g vterque erit $= \frac{1}{2}$ angulo declinationis cgh et hic est angulus inclinationis lineae perpendicularis ex centro speculi ductae ad horizontem. Cum iam sol continuo moueatur in eadem altitudine hc angulus inclinationis ad speculum erit aequalis dimidio angulo declinationis; ideoque, quia angulus, quem faciunt radius

Fig. 2.

in-

incidens et reflexus inter ſe, ſemper aequalis eſt duplo angulo inclinationis, hic aequabit angulum declinationis vel altitudinis ſolis ſupra horizontem, adeoque radius reflexus iterum redibit in linea horizontali. Redibit quoque ſecundum quamuis aliam directionem, quam habuit linea *a b*.

§. 7. Cum vero machina vtamur in ſphaera obliqua, planum circuli diurni ad planum aequatoris reddatur parallelum i. e. inclinetur ad eleuationem aequatoris, tum reliqua momenta inter ſe eamdem retinebunt relationem et diſtantia aeque ac altitudo centri ſpeculi ad quamvis declinationem ſolis vel planetae per trigonometriam facile poterit determinari, id quod in machina, ad noſtram eleuationem aequatoris compoſita, deinde ſuppeditabimus.

§. 8. Quoniam cel. Graueſand helioſtatae ſuae automaticae ſtructuram internam non determinauit ſed horologipoei iudicio reliquit, nos eam hic ſubiungimus. Fiat itaque 1) horologii theca ex duabus laminis quadratis 4 pollices latis, quibus rotarum axes inſinuari poſſint. Vnam harum ſiſtit *a b c d* 2) Rota prima (das Schneckenrad) inſtruatur dentibus 48 eiusdemque axi affigatur conus truncatus cochleatus *f*, cuius ſulcus vnam et dimidiam circiter conuerſionem faciat. Huic ſulco catenula vel chorda *g* inſeritur, qua mediante vi elateris in capſula cylindrica *h* incluſi rota in motum concitatur. 3) Rota haec prima impellat tympanum dentium 12 alterius rotae *k* dentium 36. 4) Haec impellat tympanum dentium 6 rotae tertiae *m* dentium 42, cuius axis indicem gerit minutorum primorum. 5) Haec circumagat rotam quartam et mediante hac quintam, quarum ambarum tympanum dentibus Tab. IX. Fig. 5.

6 et peripheria 42 dentibus eſt inſtructa. Poſterior harum vero non ſit coronaria, quemadmodum vulgo fieri ſolet, ſed radiata. 6) Haec quinta agitet rotam vltimam *s* ſerratam, 15 dentibus inclinatis inſtructam, mediante tympano 6 dentium. 7) Supra centrum huius rotae collocetur axis pinnatus *r*, cum pendulo *p*, 7″ circiter longo, connexus. Si iam axi rotae primae affigatur index, partes principales horologii erunt conſtructae.

§. 9. Opus erat in noſtro horologio euitare rotas loculamenti anterioris (das Vorlegewerck) quia alias index aliquantum hinc inde vacillat. Hinc etiam elater mediante ipſo indice intendendus eſt. Adducitur deinde index ad horam deſideratam, dum pendulum attollitur, ita, vt omnes rotae in motum concitentur; Attenditur tum ad indicem minutorum, et dum hic momentum praeſens indicat, pendulum liberatur et ad oſcillandum concitatur. Iam ex conſtructione horologii facile deducitur, quod ſi pendulum inſtruatur tanto ponduſculo, vt intra minutum primum $171\frac{1}{2}$ vibrationes abſoluat, rota prima intra 24 horas et tertia intra horam ſemel circuitum ſuum perficient.

§. 10. Quo vero index horarius ad ſpeculum convertendum ſit idoneus, in eius altera extremitate, ab axe 5 pollices diſtante, perpendiculariter adferruminetur tubulus *v* (n. 1) qui in cauitata ſua axin verſatilem furcae *u* (n. 3) gerat. Intra crura furcae ſuſpendatur axis *x* tubulum minorem prò inſinuanda cauda ſpeculi gerens. Et ſi machina etiam in minimis altitudinibus vſui eſſe debet, altitudo furcae ſupra indicem aequalis ſit tangenti eleuationis aequa-

Fig. 6.

quatoris ad radium diametri horologii cum excessu indicis. Adeoque in nostro horologio erit 4 pollicum.

§. 11. Vt horologium secundum eleuationem aequatoris disponi queat, in inferiori lamina firmetur arcus xy, n. 2. Tab. IX. fig. 6. in suos gradus diuisus, et per fulcimentum horologii transiens, ita, vt mediante cochlea z horologium in qualibet inclinatione firmari queat. Eadem ex ratione etiam pendulum mediante cochlea ad axin suum ita semper firmari potest, vt eo oscillante pinnae per dentes rotae vltimae vtrinque aequaliter attollantur.

§. 12. Deinde quoque circulus horarius in horologio ita construatur, vt circa centrum conuerti queat. Dum enim machina circa planetas vsu venit, pro ascensione recta planetae semper alia hora lineae meridianae horologii debet respondere.

§. 13. Adornandum iam erit speculum. Quia hoc mediante cauda sua horizontaliter et verticaliter mobile esse debet, suspendendum erit in linea per centrum ipsius transeunte intra furcam fe, n. 1. mediantibus cochleis acuminatis f et r. Fig. 6. Axis vero furcae canus ab versatilis sit super cylindro acuminato d, n. 2. cuius altera pars in arundine fulcimenti eg Fig. 6. pro lubitu attolli et deprimi et mediante cochlea k firmari potest.

§. 14. Paretur iam, asser rotundus planus, cuius alteratio per repagula in auersa parte firmata praecaueatur. In tribus punctis circa peripheriam instruatur cochleis, quarum ope in situm horizontalem disponi possit. Per eius medium ducatur linea, quae meridianam repraesentet, in cuius parte septentrionali disponatur horolo-

gibus, ita, vt linea horae duodecimae super eam transeat; quo in situ per cochleam in auersa afferis parte firmetur. In altera parte huius lineae fiat sulcus $mnop$, vt sulcimentum speculi mediante pede π in eo hinc inde duci et plus vel minus horologio admoueri possit.

15. Vt iam praeparata machina eo commodius ad obseruationes vti possimus, determinanda iam erit altitudo speculi et distantia eiusdem ab axe indicis in quouis casu necessaria. Cum ex superioribus constet, distantiam centri speculi aequalem esse secanti declinationis solis vel planetae; concipiamus axin indicis esse prolongatum vltra superficiem horologii tv vsque in f, ex a vero, extremitatem indicis designante, erigatur perpendiculum ab ad altitudinem furcae; et per b ducatur be, parallela ad ta Si iam declinatio solis sit $=$ angulo ebf erit ef tangens declinationis, a cuius vertice f distantia speculi fg in plano bn est determinanda. Demittatur ex f perpendicularis fx ad kb et in triangulo rectangulo bxf ex data hypothenusa bf et angulo f inueniatur crus oppositum bx, quod ad horizontalem $gf = fb$ adiunctum, dabit distantiam kb. Demittatur iam ex tubulo furcae indicis ad horam XII. conuersi perpendicularis bn ad planum afferis; et assumatur punctum n tanquam terminus, a quo distantia metienda sit; iuxta sulcum op vero notentur distantiae pro singulis declinationibus repertae. Ad altitudines vero correspondentes determinandas in eodem triangulo rectangulo bxf ex data hypothenusa bf et angulo xbf inueniatur crus fx, quod aequat altitudinem centri speculi supra axin tubuli, a fur-

Fig. 3.

ca

ca indicis geſtati. Singulae altitudines repertae notentur in atlante ſpeculi, qui pro lubitu attolli poteſt, initium faciendo, cum cauda ſpeculi per tubulum tranſiens fuerit in ſitu horizontali. Pro noſtra eleuatione aequatoris et machina ſequentes reperiuntur altitudines et diſtantiae centri ſpeculi a termino *b* in digitis eorumque partibus centeſimis.

	Borealis				Auſtralis		
Declinat.	30°	20°	10°	0°	10°	20°	30°
Diſtantiae	8″,66	8,74	8,97	9,33	9,85	10,56	11,54
Altitud.	5,00	4,08	3,26	2,50	1,74	0,92	0,60

§. 16. Redigatur iam baſis machinae in ſitum horizontalem ſuper menſa commoda et firma *abcd*. Ita, Fig. 4. vt eius linea meridiana cum vera congruat; et horologium inclinetur ad eleuationem aequatoris. Pendulum deinde et huic inclinationi horologii et quoad longitudinem motui diurno planetae conformetur, id quod per experientiam facile determinari poteſt; *e. g.* ad lunae obſeruationes in tantum erit elongandum vt index intra 25 horas periodum ſemel abſoluat, vel intra 24 horas vnam horam retardet. Quaeratur tum declinatio planetae et momentum culminationis eiusdem. Ad normam prioris diſponatur ſpeculum quoad altitudinem et diſtantiam ab horologio; ad poſterioris vero normam conſtituatur circulus horarius reſpectu meridiani horologii (§. 12.) Reducatur denique index ad momentum temporis veri; dico radium planetae reflexum iam continuo ſuper linea meridiana horizontaliter inceſſurum fore.

§. 17. Disponendus nunc erit tubus pro obseruatione. Hic licet longissimus sit et grauissimus, absque vllo prolixo adparatu tamen poterit reponi super aliquot scabellis vel mensis *e f g h* aut plane in pariete domus secundum lineam meridianam, boream versus, firmari. In foco vitri obiectiui ante micrometrum constituatur diaphragma ex charta tenui oleo imbuta vel vitro per attritionem leuiter obfuscato. In medio eiusdem sit apertura campo visionis tubi aequalis ad radios lucis transmittendos. Inseruit hoc diaphragma, in quo imago planetae delineatur, ad eam deinde facilius ad oculum deferendam. Arundo tubi ex asseribus in figura quadrata aut sexangulari potest conglutinari, vbi sufficit, si ad distantiam singulorum 10 pedum scabellis fulciatur. Vel etiam si tubis absque arundinibus vti placet, sufficit, si vitrum obiectiuum annulo inuestiatur et in scabello verticaliter firmetur. In altero scabello collocetur oculare cum diaphragmate et micrometro, breuiori tubo inclusum. Ambo scabella ita disponantur, vt axis per centra vitrorum transiens sit horizontalis et cum linea meridiana horologii simulque cum centro speculi congruat. Dico sub hac dispositione planetam quoad integram moram supra horizontem per tubum immobilem posse obseruari.

Tab. VIII. fig. 4.

§. 18. Collocauimus iam tubum in linea horizontali versus septentrionem. Potest vero habere quemuis alium situm et inclinationem, quem locus obseruationis concedit, dummodo planeta radios suos ad speculum transmittere possit, et speculi altitudo et distantia secundum inclinationem lineae *g f* fuerint determinatae. Potest etiam

etiam haec determinatio mechanice fieri absque calculo. Axi scilicet indicis excauato immittatur stilus tenuis ad eam altitudinem, in qua per tubulum super indice, ad horam praesentem conuerso, planeta extremitatem stili stringere videatur, sic habebitur simul et linea meridiana horologii, et tangens et secans declinationis, quae posteriore in cauda speculi signata quamlibet eius positionem concedit, si modo terminus iste signatus cum extremitate stili congruat. Sed quoniam in omnibus aliis dispositionibus aliquo tempore apparitionis planetae radius incidens angulum facit nimis acutum, vnde viuidum obiectum in tubum deferri nequit, nostra reliquis erit praeferenda, vbi angulus incidentiae raro infra 45° descendit, adeoque repraesentationes magis viuidae sunt.

§. 19 Attendamus nunc ad commoditatem, quae ex nostra methodo in obseruatorem redundat. Hic sellae coram vitro oculari insidens otiosum agit spectatorem respectu directionis tubi. Haec sua otia vero impendere potest ad eo adcuratiorem obseruationem phaenomenorum coelestium. Diametros adparentes planetarum iam ope micrometri nullo fere negotio determinat, expectant enim mensurationem. Eclipses solis et lunae earumque phases quietus attendit. Macularum solarium et lunarium figuram et situm commode delineat. In genere omnia redeunt inde commoda, quae et ex fixatione radiorum et ex firmo et commodo situ tubi fluunt. Longissimi tubi centum et vltra pedum, licet optimae notae, nullius tamen fere vsus sunt, dum vix vltra altitudinem viginti aut triginta graduum attolli, ideoque in contemplandis

planetis tantum vsui esse possunt, dum versantur circa horizontem. Hic vero vaporibus plerumque obnubilati adparent et potiora phaenomena sua abscondunt; de qua re in astrotheologia sua conqueritur Derhamus. Hinc procul dubio neque de satellite Veneris neque de motu vertiginis Mercurii satis constat. Concidit hic titubatio tubi, quae etiam in minoribus, praesertim vento eos feriente, observatorem turbat. Euanescit hic incommoda corporis inflexio, cum altitudo planetae vltra 45° ascendit; quae simul efficit, vt observator tantum per vices tubum in spicere queat. Abest difficultas planetam ad oculum redigendi. Carere denique possumus praegrandi illo et pretioso adparatu, qui ad methodum hugenianam, cassinianam et bianchinianam requiritur. Tacemus, quod hac methodo optime curiosis aliis, tubi tractationem ignorantibus, quaenis phaenomena coelestia facillime monstrare possimus; nec non, quod observator hyemali tempore in cubiculo persistere possit, si tantum machinam ante fenestram reponat, et radiis transitum per foramen concedat.

§. 20. Nec vero silentio praetereundum erit, quibusnam nostra methodus prematur difficultatibus. Grauissima harum consistit in exquisita praeparatione speculi metallici, dum vitreum propter duplicem reflexionem adhiberi nequit. Desideratur vero in eo perfectio superficiei in eodem gradu, ac in maioribus vitris obiectiuis. Interim, licet plana superficies admodum difficile in eiusmodi perfectionis gradu speculis concilietur, valent tamen nostri aeui artifices eis superficiem conuexam vel concavam

vam satis adcuratam inducere, quemadmodum nouissime fabricati tubi newtoniani et gregoriani docent. Conducit tamen, si radius sphaericitatis speculi, quantum fieri potest, superet radium sphaericitatis vitri obiectiui. Alias enim longitudo tubi sensibiliter augetur vel minuitur. Contrahitur nimirum per speculum concauum et elongatur per conuexum. In priori casu augetur quidem claritas obiecti sed minuitur vis augens tubi. In posteriori casu tubus quidem magis auget diametrum obiecti, sed paullo obscurius illud sistit, cui tamen per vitrum oculare maioris foci facile succurritur. Magnitudinem speculi determinat secans anguli semirecti ad radium diametri aperturae vitri obiectiui. Reliquae difficultates omnes per adcuratam machinae dispositionem euitantur.

§. 21. Indicabimus quoque paucis differentiam inter nostram machinae adornationem et inter grauesandianam. Haec in eo consistit vt 1) in nostra dispositio speculi et horologii per huius motum non tam facile turbari queat. 2) Grauesandius opus habet peculiari instrumento, quod positorem vocat, cuius ope situm speculi determinat, dum hunc positorem in quauis noua dispositione fulcimento speculi imponit illudque ad distantiam secantis declinationis, quae in positore designata est, ab axe horologii remouet, qua prolixitate in nostra supersedere possumus. 3) Propter exiguam nimis furcae indicis altitudinem radius in minori altitudine supra horizontem meridiem versus horizontaliter plane reflecti nequit, quae directio tamen potissimum desideratur. 4) Grauesandiana propter immobilitatem circuli horarii motui

tui ſolis tantum quadrat, noſtra vero pro omnibus planetis accommodari poteſt. Denique 5) noſtra ſub qualibet eleuatione aequatoris inſeruit, cum graueſandiana tantum in illis locis adhiberi queat, vbi eleuatio aequatoris ab obliquitate horologii non multum diſcrepat.

§. 22. Superaddimus adhuc, quod M. Boffat iam inciderit in eiusmodi methodum, obiecta per duo ſpecula, manu conuertenda, in tubum reflectendi. Haec vero partim propter taedioſam tractationem manualem, partim propter inſignem difficultatem, planetam hac ratione ad oculum redigendi, partim etiam propter obſcuritatem obiecti ex duplici reflexione ab aſtronomis non fuit recepta.

SVP-

SVPPLEMENTVM
AD MEDITATIONES
DE VI AERIS ELASTICA,

AVCTORE
Michaele Lomonosow.

§. 1.

Cum meditationes nostrae de vi aeris elastica in conventu Academicorum praelegerentur, monuit clarissimus Richmannus nos proprietatem aeris elastici palmariam praeteriisse; nempe ex theoria nostra rationem nullam reddidisse, cur elastica vis aeris proportionalis sit eiusdem densitatibus: tum id me dubitatione turbatum praetermisisse, respondi, promisique me inposterum satisfacturum. Dubitatio vero hac de lege orta est primum ex inconuenientia theoriae nostrae cum illa, quam dubitationem tandem assertum celeberrimi Bernoullii magnopere auxit.

§. 2. Deduxit nempe Bernoullius(*) ex ictibus globorum tormentariorum *auram illam elasticam, quae ex puluere pyrio accenso elicitur, aut non aerem esse communem, aut elasticitates in maiore ratione crescere, quam densitates: non posse enim densitatem aeris, qui a puluere pyrio inflammato oritur, esse plus quam millies densitate aeris ordinarii maiorem, si puluis pyrius vel totus ex aere compresso compositus sit, quod ex grauitate pulueris specifica*

 concludit

(*) Hydrodynamica p. 243.

concludit. Imo elaſticitatem aurae illius longe maiorem fieri oportere affirmat, ſi omnis puluis ad explodenda tormenta adhibitus et quidem in inſtanti flamma conſumeretur.

§. 3. Quod aura illa ſit verus aer atmoſphaericus, demonſtramus alias (*) An vero affirmandum ſit, elaſticitates aeris denſitatibus eius proportionales eſſe, id non obſcure patebit, ſi ex aliis experimentis ob id inſtitutis deductiones Bernoullianis ſimiles, ipſasque corroborantes elici potuerint. Hunc in finem nulla alia experimenta aptius adhiberi poſſe cenſemus, quam vbi compreſſus admodum aer, in cohibentia vaſa agit, ipſaque diſrumpit, ex quorum reſiſtentia vis eius elaſtica determinari et cum volumine comparari poteſt.

§. 4. Cum vero notiſſimum ſit, aqua in glaciem abeunte, volumen eius creſcere, et ſtupenda vi cohibentia vaſa rumpere. Id autem ab aere ex poris aquae iam iam congelaſcentis liberato, et in bullas collecto proficiſci, extra omne dubium eſt. Hunc in finem confici curauimus aliquot globos vitreos diuerſae magnitudinis, canos, cum tubulis craſſis anguſti luminis, quos aqua repletos exponebamus magno, qui hac (**) hyeme ſaeuiebat, frigori. Conglaciata aquae portio, quae quaſi cruſta quaedam latera cauitatis occupabat, ſingulos globos diſrupit, praeter eos quorum foramen conglaciata prius aqua non ſatis obturatum fuit, ideoque vi glaciei internae cylindrus glacialis *d* ex lumine extrudebatur. Disruptio facta eſt ſecundum varias directiones, plerumque tamen ſecundum

Tab. X. Fig. 1. 2. 3. 4.

(*) Meditationibus ipſis (§. 27.) et ſingulari diſſertatione quam parauimus.
(**) Anno 1749.

dum longitudinem tubuli, vt in figuris 2. 3, 4, oſtenditur lineis *m m*. Poſt ruptionem reliquum aquae effluebat, et cauitatem *c* relinquebat.

§. 5. Huiusmodi globorum vitreorum maximus, quem adhibuimus, habebat diametrum 26 linearum Pariſini Regii pedis, diameter cauitatis erat 8 linearum, cruſta glacialis $1\frac{1}{2}$ lineas circiter craſſa (hanc menſurare cum debita accuratione non potuimus ob inaequalitates, quas effluentis ex medio *c* reſiduae aquae repertina ad ipſam cruſtam congelatio, praeſertim in parte interiore cruſtae produxerat, et craſſiciem illius augebat; maximam tamen, quam fieri potuit, hic aſſumimus) adeoque diameter cauitatis in cruſta erat 5 linearum. Hinc per calculum deducitur planum ruptionis, excepto tubulo, fuiſſe 480 lineas quadratas, planum circuli maximi, quem habere debet globus ex cruſta glaciali formatus, 41 lin. quadratas. Cylindrus vitreus $\frac{25}{100}$ pollicis Rhenani ruptus eſt 150 libris(*) vnde per calculum deducitur cylindrum vitreum 1 pollicem Regium Pariſinum in diametro habentem rumpi debere 2572 libris; adeoque cylindrum, cuius planum ruptionis eſt 480 lin. qu. ad ruptionem requirere libras 10925 circiter.

§. 6. Si aqua integra in cauitate globi vitrei conglaciata fuiſſet, vis glaciei disrumpens aeſtimanda foret explano circuli cauitatem integram bifariam diuidentis; ſed quoniam in medio remanſit aqua a conglaciatione libera, quae idcirco non producebat aerem, nec agebat in vitrum; aeſtimari ergo vis agens debet, explano circuli maximi, quem habere debet globus ex cruſta glaciali formatus, quod eſt aequale 41 line-

(*) Muſchenbroeck in notis ad experimenta Academiae del' Cimento p. P.

is quadratis. Columna Mercurii aereae aequipollens 41 linearum quadratarum baſi incumbens, 28 pollices alta, ponderat grana 40242, ſeu libras 4 et grana 3378. Hinc ſi aqua in cruſtam conglaciata vel integra eſſet aer, condenſatum fuiſſe oporteret in $\frac{1}{513}$ circiter ſpatii, quod in atmoſphaera occupat, vt globum hunc disrumpere potuiſſet. Vnde ſi denſitates aeris elateri proportionales eſſent, aquam ſe ipſam $2\frac{1}{2}$ plo ſpecifice reddi grauiorem neceſſe foret, cum in glaciem conuerteretur; quod cum abſonum ſit, non obſcure igitur apparet cum Bernouliana deductione noſtram magnopere conſentire.

§. 7. Suſpectam eſſe materiam vitri ingenue fatemur, nempe eam rumpi poſſe etiam ob repentinam refrigerationem ſine conglaciatione aquae in cauitate globi. Verum tamen hoc experimentum duobus aliis globis vitreis aqua repletis et frigori expoſitis repetitum fuit, eodem ſemper ſucceſſu, cum plerique eiusmodi vitrei globi alii, caui, et ab aqua vacui, cum illis ſimul frigori expoſiti ſine ruptionis damno perſtiterint. Vnius diameter erat 18 linearum, cauitatis $5\frac{2}{3}$, cruſtae glacialis craſſities lineae 1 —, alterius diameter 17 lineas cauitatis $5\frac{1}{4}$ lineae, cruſta glacialis $\frac{3}{4}$ lineae craſſa.

§. 8. Commodum clariſſimus collega noſter Richmannus inſtituit, eodem gelu durante, ad aerem vi frigoris in bombis comprimendum experimenta, quae vi congelaſcentis aquae ruptae erant. Vna earum a nobis menſurata fuit, quae habuit in diametro 94 lineas Pariſinas, cavitatis diameter media erat 60 linearum, cruſta vero glacialis 4 linearum, adeoque diameter aquae, quae ad momentum ruptionis

tionis nondum conglaciata fuit, 52 lin. Quod phaenomenon quoniam cum eis, quae ipsi experti sumus, omni ratione conuenit, optime ad propositum nostrum adhiberi potest.

§. 9. Ponamus firmitatem ferri fusi, ex quo bombae parari solent, inter ferri et vitri firmitatem esse mediam, ob mixtas in illo vitrescentes particulas cum ferreis. Quoniam ex Muschenbroeckianis experimentis colligitur firmitatem vitri ad firmitatem ferri esse vt 24 ad 450, erit media 237, adeoque vires ad bombam rumpendam requiri aequales 90410$\frac{5}{7}$ librae. Pollex cubicus Mercurii ponderat grana 5048; columna igitur Mercurialis aereae aequipolens, insistens plano sectionis circuli maximi crustae glacialis in globum reductae ponderabit grana 1375159 seu libras prope 150. Hinc ad rumpendam bombam, si vel integra crusta glacialis fuisset nil nisi compressus aer, requireretur 6000 ies densior atmospherico, atque adeo crusta glacialis plusquam sexies semet ipsa grauior esse deberet.

§. 10. Aqua sub campana antliae exteriore aere decedente multo maiorem capiam aeris emittit, quam quae ex congelascente aqua gelu elicitur et in bullas vasa rupturas colligitur. Vnde apparet aerem in aqua contentum non omnem resumere vim suam elasticam per congelationem, adeoque nec integrum in cohibentia vasa agere. Id autem si obtineret, multo maiores effectus ab eadem vel iidem a minori copia glaciei exsererentur. Ex hac itaque circumstantia illi, quam Cel. Bernoullius annotavit (*) gemina, etiam apparet aeris elasticitatibus densi-

(*) Hydrod. p. 242.

tates illius in magnis compreſſionibus proportionales non eſſe. Accedit quod etiam Cl. Muſchenbroeckius (*) obſeruauit, cum aerem pluſquam in quadruplo minus ſpatium redigeret, ipſum non amplius auſcultare regulae traditae, ſed plus reſiſtere viribus comprimentibus. Id autem quomodo ex noſtra theoria ſequatur, videamus.

§. 11. Sint maſſae aeris duae pondere aequales A et B, ſpatiola vero vibrationis inter corpuſcula maſſae A ad ſpatiola vibrationis inter corpuſcula maſſae B vt a ad $a-b$, erit volumen maſſae B ad volumen maſſae A $= a^3 : (a-b)^3$. Quoniam autem globuli aerei eo frequentius reciprocant vibrationes ſuas, quo minora habent ſpatiola vibrationis, erit frequentia ictuum inter globulos, vt ſpatiola reciproce. Hinc frequentia ictuum inter omnes globulos, maſſae aereae A ſecundum omnes tres dimenſiones ad ſimilem frequentiam ictuum inter omnes globulos aereos maſſae B erit $= (a-b)^3 : a^3$. Cum vero ictus reciproci globulorum aeris quo frequentiores ſunt, eo fortius a ſe inuicem illos repelli et vim elaſticam aeris eo magis inualeſcere oportet. Erit ergo vis elaſtica maſſae aeris A ad eam maſſae aeris B $= a-b^3 : a^3$, adeoque elaſticitates aeris erunt vt volumina reciproce, ſeu quod idem eſt, denſitatibus proportionales.

§. 12. Veriſſimum hoc foret, ſi reciprocantes globuli aerei B et C poſt quemlibet impactum reſiliendo ſemper in proximum aliquem globulum A directe incurrerent, nec per interſtitia tranſſilientes illos ſaepius praetergrederentur ad alios globulos remotiores ſibi obuios tardius impetum ſi- Fig. 5.

cturi

(*) Elem. Phyſ. Cap. 36. §. 794.

etiam et ſupradictae rationi derogaturi. Sed quoniam hoc ſupponi non poſſe ſatis apparet, alia igitur ratio intercedat neceſſe eſt. In quo autem ea conſiſtat et vnde proveniat, id, vibrationum varietates attentius conſiderando, inueniri poſſe certum habemus.

§. 13. Corpuſcula aeris B et C poſt colliſionem ſaepius etiam per ſpatiola AA tranſſiliunt, corpuſculis A intactis, et corpuſculorum aeris diametros eo maiorem rationem ad ſpatiola vabrationis habere, quo magis aer comprimitur, nemo dubitabit. Porro vibrationibus numero infinitis ſimul conſideratis, dari oportet rationem aliquam vibrationum, quae in proximos globulos A impetum faciunt ad vibrationes, quibus per interſtitia AA globuli motu in remotiores D incurrunt. Illam autem ad hanc eſſe vt numerum globulorum aereorum, qui in ſuperficiae ſphaerae, ſemicirculo AFAB deſcriptae inter globulos A collocari poſſunt, ad numerum globulorum A, qui ſinguli a ſe inuicem diſtant tantum quantum a centro B. Creſcente denſitate aeris globuli A propius ad ſe inuicem accedent, interſtitia inter illos decreſcent, minor numerus vibrationum globulis A intactis fiet, atque adeo ratio vibrationum, quibus per interſtitia AA globuli tranſſilientes in remotiores D incurrunt, minor erit ad vibrationes, quibus proximi globuli A feriuntur. Hinc maiori frequentiae ictuum a minori diſtantia globulorum aeris profecta (§. 11.) id quoque accedet, vt propter contracta interſticia AA inter proximos aeris globulos frequentiores quoque impactus fient in ipſos, et hoc ipſo reſi-

reſiſtentia aeris elaſtici augebitur vltra aſſignatam rationem (§. 11.) In ea compreſſione aeris, in qua vibrationum ſpatiola minora ſunt diametris globulorum, omnes conflictus globulorum erunt cum proximis A; cum per interſtitia A A ſine impactu penetrare non potuerint. Vnde perſpicitur, quantum ratio elaſticitatum aeris diſcrepare debeat a ratione denſitatum in ſumma illius compreſſione.

PHYSICA.

HISTORIA ANATOMICA
OVIS PRO HERMAPHRODITO HABITI.

AVCTORE
Abr. Kaau Boerhaaue.

Vt in reliquis partibus, tam externis, quam internis, corpora humana inter ſe differunt, non modo ratione regionis, natiuitatis, aetatis, vitae et laborum generis, exercitationisue, ſed et earumdem diſpoſitione et lineamentis, ita in vtroque ſexu genitalia interne, externe pudenda, ſedulo obſeruata, raro ita inter ſe conueniunt, vt nulla oculo attentiſſimo notetur ſitus vel figurae alia facies, quam in caeteris. Dicta firmant partes: quae vteri fundo appenſae, per duplicatos peritonaei proceſſus, easdem ambientes, inter ſe nectuntur, ouaria ſcilicet, tubae Fallopianae, ligamenta dicta rotunda, in foeminis. Has nunquam fere obſeruaui, eadem plane ratione diſpoſitas in pelui; contigit tamen multa diuerſae aetatis diſſecta mulierum examinare corpora ad hoc attento. Idem in viris obtinet, ſiue reſpiciamus ad organa, quae prolificum ſemen perficiunt et conſeruant, ſiue ad illa, quae hoc, tempore orgaſmi venerei, expellunt.

Vti autem in internis, ita in externis, vix vnquam obſeruatur eadem perfecte figura pudendorum, in vtroque ſexu, licet partes conſtituentes ſint in genere ſimiles. Quoties vero a naturali ſtatu ita decedunt, vt, vel defectu, vel augmento, oriatur quaedam deformatio, ſtatim de Her-

maphroditis cogitatur atque decantatur. Tales an dentur veri, qui ſcilicet in vtramque venerem parati cum foeminis concumbunt, atque viciſſim viros admittunt, vix credere poſſum; ipſa fabuloſa antiquitas talem deſcribit,

nec foemnia dici,

Ouid. Metam IV. Fab. XI. *Nec puer vt poſſit, neutrumque et vtrumque videtur.*

Imo vero an illi quidem exſtant, in quibus vnus ſexus praeualet, addito genitalium alterius quodam ſupplemento, vehementer dubito, quoniam hi attentius examinati, ex teſtimonio Auctorum, vltimum hoc deformatum nec peruium, nec ad opus aliquod venereum, aut ad vrinae excretionem, aptum gerunt. Si puero, rite formatis caeterum genitalibus, intra ſcrotum et anum, cutis perinaei complicata ſulcum, ſed inperuium, ita format, vt inde labia leuiter protuberent, vel ſi ipſum ſcrotum ad ſeptum medium, quod externe ſutura notatur, fiſſum rimam facit, non video, cur illi Hermaphroditi vile nomen imponatur, inprimis, ſi ad procreationem caeterum aptus ſit. Dicam, quid ſentio; omne, quod in vtroque ſexu mixtum ex forma duplici perhibetur, alterius modo credo informem figuram, ſiue aucta, ſiue imminuta, partium ſubſtantia.

Memorabilis eſt Hiſtoria, quam narrat Regnerus de Graaf (1) de Infante, cui baptiſmo nomen Cornelii imponebatur, ob partium genitalium externam figuram, quae deprauata ſexum virilem mentiebatur (2), quae mortua diſſecta inuenta eſt puella (3). Sola clitoris, mole aucta, atque labiorum pudendi tumor errorem impoſuerat.

(1) De Mulier: organ. gener. inſerv. pag. 299.
(2) Ibi. Tab XXIII.
(3) Ibid. Tab. XXIV.

Ta-

Talem examinaui pauperam, ſtolidam, foeminam, viginti et vltra annos Hermaphroditum a natiuitate declamatam. Haec mammoſa in parte ſuperiore rimae pudendi pendulam gerebat, figura ſimilem peni verili virgam, glande rubeſcente, ſed inperforato coronatam, praeputio inſtructam breuiore, quam vt totum glandem tegeret, haec ſesquiunciam circiter longa, minimum digitum craſſa, manibus tractata erigebatur antrorſum, et, vt penis, duplo maior et craſſior, rigeſcebat. Rite autem examinata erat ipſa clitoris, ſub qua, labiis diductis, conſpiciebantur muliebria perfectiſſima, et orificium vrethrae, ſuo loco prominens, patulum. Figura pudendorum externa multum conueniebat cum illa, quam exhibet de Graaf in mox memorata puella, niſi, quod pudendi labia non ita tumeſcebant ad inferiora, in quibus etiam nullum veſtigium tangebatur teſtium. Talem caſum narrat Bartholinus de muliere Haſnia, Hermaphrodito credita, ob elongatam et craſſam clitoridem, quae tamen vera foemina, in itinere, militibus vſum corporis ſui concedebat (1). Et Isbrandus de Diemerbroeck audacter affirmat, eſſe hanc partem increscentem, quae virgam virilem effingit in foeminis, vnde Hermaphroditi creduntur (2), affert ſimul duo memorabilia exempla, quae ipſe vidit et examinauit, ad hoc affirmandum (4). Plures ego Auctores non adducam, etſi plurimos hac de materia compilare poſſem; et nugas omitto refutare de foeminis in viros mutatis, ſatis hoc ſuperque fecit modo laudatus Diemerbroekius (5).

(1) Anat. reform. cap. XXXIV.

(3) Oper. anatom. cap. XXVI.

(4) Ibid.

(5) Ibid.

Vti in foeminis, aucta mole, clitoris, ita in viris, praeter memoratas rationes, ſulcum ſcilicet in perinaeo, vel ſcroti fiſſuram, quandoque defectu partium oritur deformatio in genitalibus, vnde illi Hermaphroditi creduntur. Rarus habetur, et forſitan in hiſtoria naturali nuſquam notatus, caſus quatuor hominum Sibiricorum ex duobus parentibus natorum, eadem exacte genitalium deformatione praeditorum, vti recte memorat Cl. Gmelinus, qui primus hos in patria vidit, examinauit, et accuratiſſimam partium genitalium deformatarum deſcriptionem ad Academiam miſit. Ex qua operae pretium viſum fuit, ex Sibiria hos homines Petropolin accerſere, vbi et illos coram Academia examinauit et deſcripſit Cel. Wildius. Vtriuſque accuratiſſima genitalium deformatarum deſcriptio inter ſe collata conuenit ſatis pulchre, ſententia tamen diuerſa eſt de definiendo ſexu. Pro foeminino ſtat Cl. Gmelin, contrarium opponit Cel. Wildius; vterque ſua attulit argumenta, aliorum Scriptorum etiam auctoritate firmata. Diſſertationes autem hae prolixiores a magnis his Viris non in eum finem deſcriptae ſunt, vt publicarentur, multo minus hiſce commentariis inſererentur. Sufficiet ergo Beati Weitbrechti prima, et vltima inquiſitio poſt triennium repetita, vtpote quae continent, accuratiſſimam ſimul et breuem deſcriptionem. Prima quidem in definiendo ſexu ambigua, altera, in prouectiore aetate de ſexu certior, concludit ad maſculinum. Interim non poſſum, quin hoc addam. Miror ſcilicet, lite orta de ſexu, quod ad hanc componendam, vel ſaltem ad ſententiam alteram firmandam, nemo

mo cogitauerit de dimetiendo corpore, quoniam conſtat, ambitum pectoris ad peluis eſſe in foeminis circiter, vt duo ad tria, in viris contra, thoracem latiorem tres habere partes ad duas peluis, vnde viri corporis truncus conuergit inferiora verſus, foeminae contra latior diuergit (1): quare, ex amplitudine coxarum, in foeminis artus inferiores (femora ſcilicet et crura) iterum ad ſe inuicem conuergunt, in maribus diuergunt: quod optime expreſſit Veſalius iſtis figuris, quarum altera Herculem, altera Venerem depingit (2). Multum hoc feciſſet tentamen ad enucleandum genus, quoniam reliquae corporis partes rite formatae et ad modulum erant compoſitae.

(1) Accuratam dimenſionem collegit Cl. Hallerus DCCIX. inſt. Boerhauii Tom V. par. II.

(2) In Epitome lib. de corp. hum. Fabr. ad pag. 608.

Beatus Weitbrechtus autem hos iuuenes primo examinauit anni 1743 menſe Octobri, atque illos his verbis deſcripſit.

1. *Abraham Kuſnezov*, 2. *Terentius Kuſnezov*, 3. *Michael Luganof*, *Iohanis Luganof*.

Memoratu dignum eſt omnino, vti Cl. Dn. D. Gmelinus, cum haec ſubiecta inuenerat, recte iudicauit, quatuor pueros, (tali enim habitu incedunt) binos quosque fratres, intra paucos annos in eodem loco natos, eandem fere genitalium externorum deformationem a natura paſſos eſſe. Omnem rem Cl. Gmelinus ita accurate deſcripſit, vt pauca mihi addenda videantur, quae fortaſſe non niſi temporis diuturnitate diuerſitatem quandam induxerunt; duo enim iam anni ſunt, ex quo Cl. Gmelinus obſeruationes ſuas, dum in Sibiria viueret, inſtituit; et experientia docet, iſtiusmodi deformitates mirum quantum mutationibus obnoxias eſſe. Dicam igitur primo

mo, quid mihi in his ſubiectis apparuerit, tum vero, quid mihi exinde ſequi videatur, adiungam.

In omnibus quatuor pueris propendet in pubis regione media membrum aliquod ſolitarium, fere cylindricum, non plane rectum, ſed aliqua ex parte recuruum, ſubdurum, quod vel peni maſculo vel clitoridi foemininae quodammodo, neutri perfecte, aſſimiliari poteſt. Quantum tactu diiudicare licet, vnico tantum corpore conſtat, quod cauernoſum dicere licet: nam membrum, teſtantibus pueris, ſub diluculum plerumque rigidum euadit, quod et accidit, dum illud diutius manu palpes. In apice corpore ſpongioſo rubicundo, vt glans eſſe ſolet, munitur. Vrethra autem, dum ex curuatura oſſium pubis extrorſum aſſurgere debebat, non tota cum corpore cauernoſo adunatur, ſed in media via, quaſi truncata ſiſtitur; hinc orificium huius meatus eo loco, quo foeminis eſſe ſolet, conſpicitur. Limbus orificii ob vrethrae *ſpongioſas reliquias* per cutem teneram transparentes liuidiusculo colore gaudet. Meatum autem vrinarium reuera tanquam detruncatum haberi debere, docet ſulcus aliquis ſuperficiarius, longitudinalis, eo loco, quo vrethra ſub corporibus cauernoſis ſitus eſſe ſolet, inſculptus, ab ipſo illo orificio ad glandis apicem vsque prolongatus. Hic ſulcus ſpeciem dimidiatae cauitatis vrethrae plane prae ſe fert, vtpote lacunis conſuetis, imo et minutis corpuſculis glandulioſis, ſcatens. Glans ipſa inferne in medio hiulca eſt pro ſulci continuatione, et corona ad latera ſulci paulum protuberat, vt ſulcus quaſi in ſemi-canalem conuertatur, quod imprimis in Iohanne optime patet. Membrum peniforme in dorſo re-

gitur

gitur cute admodum laxa, plerumque transuerſim rugoſa, poſt glandis coronam, vt in aliis ſolet, annexa; quo propius glandem accedit, eo amplior, hinc ob ſpatioſam largitatem ſuam glandi amplum praeputium paebens. Cutis autem non totum membrum ambit, ſed in auerſa ſede ad compenſandum fraenulum, quod propter hiulcum glandis ſtatum, de quo diximus, in medio locari non poterat, ex vtroque latere poſt memoratam coronae protuberantiam affigitur, et porro ſulco ipſi, ſecundum longitudinem marginis eius, ſtricte adnaſcitur; quae quidem ſtricta atque arcta cutis connexio efficit, vt membrum, quando riget, incuruetur, quia haec ſtrictura non ita facile extenſioni cedere poteſt, ac ſuperior cutis laxior et mobilis. Iuxta membri originem vtrinque cutis protuberat turgidiuscula, laxa in rugas profundas, eleganter criſpatas, quemadmodum ſcrotum corrugatum eſſe ſolet, oblique lunatim incuruatas et perinaeum verſus deſcendentes, complicata. Haec cutis ſtructura non inepte quidem pro ruderibus ſcroti dimidiati et vtrinque ſurſum retracti haberi poteſt; ſed et labia ſinus muliebris ſimulat. Certe in Michaële ſuperficiario obtuitu perfectam et elegantem concham muliebrem refert. Quid autem in harum rugarum cauitate interna lateat, teſtes an ouaria? difficile eſt dictu; ſolus tactus ad quaeſtionem ſoluendam non ſufficit. In Abrahamo nulla teſticulorum veſtigia deprehenduntur; in Terentio autem vtrinque corpus aliquod oblongum veſiculare ſubeſſe, et in inguine vsque ad annulos proceſſibus peritonei transmittendis inſeruientes pertingere, tactu dignoſcitur, quod an pro teſticuli ſimulacro

an pro hernia ventoſa, an pro membrana δάρτος incraſſata et inflata haberi debeat, ante ſectionem diiudicari nequit. Imo, etiamſi certo conſtaret de teſtibus, nulla tamen vaſa deferentia tetigi. Denique in nullo horum puerorum vaginae veſtigium vllum apparet; in Michaële et Iohanne ſub vrethrae orificio cutis perinaei vtrinque in labiorum formam turget. Quid ſub cute lateat? ignoratur.

Huc vsque Cl. Weitbrechtius prima ſua inquiſitione: cum autem in initio huius diſſertationis recte annotat, temporis tractu multa poſſe mutari in eiusmodi ſubiectis, ad elucidationem triennio circiter poſtea, menſe nempe Auguſto Anni 1746, disquiſitionem ſuam repetiuit, atque figuris ad viuos delineatis ornauit alteram concinne et breuiter his verbis deſcriptam diſſertationem.

In tribus illis Hermaphroditis, Abrahamo et Terentio Kusnezof fratribus, itemque Iohanne Luganof (Michaël enim Iohannis frater clam euaſiſſe *dicitur*) repetita inquiſitione ſequentia inueni.

I. In Abrahamo decimum quintum annum agente pubis regio turget. Lateri dextro membri penduli adiacet burſula, in qua teſticulus et epidydimis, et vas deferens diſtincte tangi queunt. In latere ſiniſtro autem burſula eſt vacua et pectinatim rugoſa. Membrum tegitur cute laxiſſima amplum praeputium formante. Orificium vrethrae diſtat a radice glandis pollicem circiter. Sulcus inter hos duos terminos comprehenſus ſcatet lacunulis longitudinalibus a foramine vrethrae glandem verſus radiatim aſſurgentibus, in quibus et minuta corpuſcula, glandularum ſpeciem prae ſe ferentia. Glans hiulca et quaſi fiſſa. Ad huius fiſſu-

fiſſurae margines cutis fraenulum vtrinque laxum format, lateribus ſulci autem vtrinque ſtricte adhaerens impedit membrum, ne rectum extendi queat.

II. In Terentio tredecim annorum, ambae burſulae eleganter rugoſae. Quando inſpirat, corpora veſicularia vacua, vel aëre, vt videtur, plena in inguina retrahuntur, in exſpiratione autem in burſulas exprimuntur. Huic penis multum riget. In ſulco ſunt quidem lacunae, ſed non ita radiatim diſpoſitae; aliqua earum ſatis profunda, longitudinalis, immediate poſt glandem ſita, foueolam coecam gerit vix aciculae caput capientem. Reliqua vt in Abrahamo.

III. In Iohanne Luganof duodecim annorum, cutis ad latus membri rugoſa, et ad burſulas formandas apta. Membrum et praeputium congruit cum figura Gmeliniana. In burſulis nihil tangi poteſt, quando puer iacet; quando autem ſedet, corpora ſolida, globoſa, quae prius in inguine delibuerant, in burſulas deſcendunt, ſulcus brevior eſt ac in reliquis, et in eo aliquae lacunulae perpendiculariter ſibi ſuccedentes. Glans profundius fiſſa.

IV. In omnibus totus horum genitalium apparatus cum reliquo corporis habitu in maiorem molem increuit. Omnibus membrum tractatum riget. Omnibus corpora cauernoſa membri ſecundum ſynchondroſin oſſium pubis aſſurgentia tanguntur. Omnes hactenus bene valuerunt. Nulla vocis mutatio hactenus, nulla barba, nulla pubes, nullum ſemen.

Hac noua disquiſitione ego in mea priſtina ſententia confirmor: In his tribus ſubiectis eſſe ſolam deſor-

mationem externarum partium genitalium maſculinarum; videlicet, membrum pendulum, incuruum eſſe penem, ſulcum eſſe vrethram fiſſam, burſulas eſſe ſcrotum diuiſum et translocatum. An partes genitales internae etiam deformatae ſint? definiri certo nequit. In Terentio et Iohanne ſuſpicandum eſt, teſticulos aliquid paſſos eſſe. Abrahami autem teſticulum, ſaltem dextrum, ad elaborandum ſemen aptum fore, maxime probabile videtur.

Haec altera indagine enucleauit, atque ſententiam hiſce expoſuit Ille: mihi vero hos homines in patriam remiſſos, nec videre, nec examinare, contigit; rogatus interim ſententiam, de ſexu, dum magnorum Virorum inter ſe confero obſeruationes adeo conſentientes, atque inſpicio figuras cura Cel. Weitbrechti depictas, quas ad rei veritatem elaboratas affirmat Doctiſſimus Kleinfeldius, tum illi, iam mihi, in Academia Adiunctus, atque anxius haereo, tantam inter tantos Viros componere litem, *licet pleraque* pro virili ſexu pugnarent argumenta, ecce! bono quidem fortunato adfertur ouis ad Academiam habitus pro Hermaphrodito ob partium genitalium deformationem, quam dum examino, laetus video, eſſe obſeruatis in hominibus Sibiricis ſimillimam: ſic putabam, nactum eſſe occaſionem memet ipſum inſtruendi de rei veritate, atque ex hac magis tuto concludendi ad illa. Alacris ergo examen aggreſſus, comperta in illo refero, data ſimul partium deformatarum vera figura, vt haec cum Sibiricorum comparata, multum tollat de ſcrupulo.

Ouis erat adultus iuſtae magnitudinis, cornubus ad poſteriora circumflexis ornatus, emaciatus, vt puto, ab vlce-

vlcere ventriculi, in aperto, inuento: nec ad figuram totius corporis aliquid praeternaturale gerebat.

Infra coniunctionem vero ossium pubis, vbi illa in media pube synchondrosi iunguntur, prominebat corpusculum teres, medium circiter digitum crassum, anum versus et sinistrorsum incuruum, penem referens, praeputio mobili, laxo, amplo, leuiter in rugas complicato, naturaliter ornatum, quod in parte anteriore, superiore, constans cute crassa pilis hirta, eleuabatur in apicem acutum (1): inde vero deorsum et ad posteriora versus excrine tenuius porrigebatur, et breuius deficiebat, quam vt totum penem, eiusque glandem, tegeret (2). (1) Tab. XI. fig. 2. C (2) ibid. D

Extra hoc autem praeputium extendebatur penis ipse, ad finem suum valde incuruatus (3), glande ibidem rubescente ornatus (4), qui, oue supino iacente, fere totus a corpore penis tegebatur, sub illo delitescens, et ab eiusdem curuitate parum sursum disponebatur, abdomen versus. (3) ibid. E (4) ibid. F

Eleuato praeputii apice crassiore (5) vna cum pene, apparebat praeputium, extenuatum, laxum, amplum sensim oblique posteriora versus, et pene iam sursum reclinato, inferiora versus, descendere (6), atque vtrimque in arcum quasi excisum, iterum ad glandem adscendendo formare fraenulum (7). (5) Tab. XI. Fig. 3. C (6) ibid. D (7) ibid. E

Arcus autem hic praeputii plus lunatim excindebatur in latere dextro, quam in sinistro, vnde ille ibidem laxior erat (8): inde penis sinistrorsum trahebatur (9) a vinculo fraenuli arctiore ad hoc latus: fraenulum (8) ibid. D E (9) Fig. 2. E F

antem, ex vtroque arcu vtrimque formatum, inſerebatur coronae glandi, ſed in medio, vbi ſub illo vrethra tranſire ſolet, deliquium patiebatur (1): id inde fiebat, quia eo loco ſemicanalis vrethrae deſinebat, glandem non perforans. Vrethra nempe, qua parte illa ſub coniunctione oſſium pubis emergit, atque infra corpora cauernoſa penis decurrit, iuxta longitudinem quaſi transuerſim deſciſſa, parte diſſecta ablata, formabat ſemicanalem a perinaeo ad glandem exporrecta, atque ibidem deſinebat (2). In parte autem inferiore vrethra ad perinaeum exhibebat canalem integrum, inde eo loco a lateribus parietum ſemicanalis et ab ambitu perinaei integri, formabatur foramen ouale, ea perfecte ratione, ac illud tum oritur in calamo ſcriptorio, quando, ad illum litteris exarandis adaptandum, partem dimidiam canalis auferemus (3). Per hoc foramen tubus immiſſus tranſibat ſub perinaeum, atque per illum aëre inflato, eleuabatur ſupra oſſa pubis leniter abdomen: vnde ſtatim concludebam, eſſe foramen hoc vrethrae aperturam, non vuluae, quia vterus non tam facile flatu extenditur ac veſica, neque, vt haec, abdomen eleuat tunc, ob molem minorem.

(1) Tab. XI. Fig. 3. H

(2) Fig. 3. HI

(3) ibid. I

Anus (4) ſuo loco ad exortum caudae et ſub eo aperiebatur naturaliter; diſtantia autem hunc inter et exortum penis, perinaei erat vnius et quartae partis pollicis Rhenolandici longa (4), ſed nullum in illa prominentis ſcroti veſtigium, aut teſtium protuberantia percipiebatur, at vero leuis eminentia, quaſi in ſuturam acta, hoc medium diuidebat (6).

(4) Fig. 2. et 3. G.

(5) fig 2. GE Fig. 3 GB

(6) Fig. 3. L

Supra

Supra decurſum oſſium pubis, ad latera inguinum, conſpiciebatur ab vtraque parte papilla, et iuxta hanc a latere externo, cutis quaſi leuiter perforata, quod foramen rotundulum, caecum tamen, mox finiebatur, capitulum acus maximae circiter admittens; ibidem vero, et inguina verſus, vtrimque tactus percipiebat corpus ouale, rotundum, durum, mobile verſus annulos muſculorum abdominalium, et ſub cute fluxile, quod ſtatim propter figuram teſtium, epididymidum, vaſorum dictorum praeparantium et deferentium funiculi, digitis diſtiguendam, teſtem vtrumque cum ſuis vaſis ſuſpicabar. Qua in re vt certior eſſem, cutim incidi, et inueni, in vtroque inguine, bene formatum teſtem cum ſuo funiculo vaſorum praeparantium et deferentium extra abdomen haerere, et erat in abdominalium muſculorum parte infima annulus dictus perfecte, vt ſolet eſſe, naturalis a fiſſura tendinis obliqui externi atque carne muſculi interni, vnde oriebatur, ſparſis fibris carneis, cremaſter validiſſimus, funiculum ſpermaticorum vaſorum ambiens. Vt per hunc annulum vaſa exibant, ita deferentia redibant, atque tam laxe hoc loco teſtes haerebant ſub cute ſtrictore, vt ſi naturali loco ſcrotum adfuiſſet, facile in illud dilapſi fuiſſent, iam enim, cute inciſa, ſuis inuoluti membranis ſponte, ſine vi adhibita, vſque ad perinaeum, et ſub mentula extendebantur.

Aperto igitur abdomine, exemi omnes partes pelvi contentas vna cum adhaerentibus genitalibus externis, ano et cauda, tumque accuratiſſime examinaui, nec vllum inveni in internis praeternaturale phaenomenon notandum. Vas

de

deferens vtrumque, poſt veſicam, ad ſe inuicem conuergens, pone collum eiusdem et initium vrethrae, formabat, vt fieri ſolet in illis animalibus, quae coitum non cito repetunt, extenſum ſaccum, qui in collum anguſtabatur, et in ſuperiore parte vrethrae aperiebatur, vti haec omnia flatus et liquor per vtrumque vas deferens immiſſus, indicabat.

Aëre deinde inflato in alterum cauernoſum penis corpus, altero ita detento, vt inde non exiret, penis erigebatur duplo maior et incuruus. Idem ſi adigeretur intra corpus ſpongioſum vrethrae, quod hanc ad initium integrum circumambibat, et hoc eleuabatur, ſimulque glans penis erigebatur. Tum vero apparebat ibi, vbi vrethra perinaeum inter et glandem exſcindebatur, ablato qnaſi ſegmento, quod inferne iuxta ſemicanalem ſemi-corpus ſpongioſum hunc ambiret, atque in fungoſitatem glandis abiret. Aderant et in cauitate vrethrae in ſemicanalem exſectae paruulae cryptae, quae digito ſuppoſito preſſae apparebant, ſed tantillae, vt pictor has exprimere commode non potuerit.

Patet, ni fallor, ex hac deſcriptione, partes genitales viriles eſſe naturales internas, nec hic aliquid culpandum in externis, niſi, quod *primo* ſcrotum ſuo loco in burſam non fuit extenſum ad recipiendos teſtes, vnde illi in inguinibus, ſub ſtrictiore cute, latuerunt extra abdomen. *Secundo*, quod vrethra, ad ortum ſuum integra, ad decurſum naturalis, extra perinaeum non eſt continuata in canalem, ſed ſtatim ac inde emergebat, ſemidiſſecta fuit, et ſic ſemicanalis ad penis glandis coronam expore-

recta, vnde, et quaſi ſemicanali hoc altero ablato, itidem ibi deficiebat corpus ſpongioſum vrethrae. *Tertio* quod praeputium et naturali breuius, et in formando fraenulo aliquo modo luſit.

Ouis ergo hic, pro Hermaphrodito habitus, fuit verus mas, in quo partes genitales externae peccant defectu, et nihil omnino in his apparuit, quod alterius ſexus ſignum indicabat aut additamentum, quare et illi nomen maſculinum, minus caeterum uſitatum, apud Varronem et Gellium tamen inueniendum, paſſim impoſui. Tandem ſi deſcriptio partium genitalium externarum atque harum figura in oue comparatur cum deſcriptione et figuris, quas laudati Viri celeberrimi dederunt de hominibus Sibiricis, puto apparere, has ita inter ſe conuenire, vt facile ex inquiſitione Anatomica partium internarum, quam in oue inſtituere ego potui, non illi in viuis hominibus, lis de ſexu finita ſit: quodque, vt hic ouis, ita homines Sibirici habendi ſint pro maribus, non pro foeminis, quod que mixtus neutiquam ſit ſexus, et immerito illis nomen Hermaphroditorum imponatur.

Conſtat ergo, in vtroque ſexu quidem inuenire homines, quibus partes genitales externae ita ſunt deformatae, vt alterum mentiantur, deſideratur interim, cui fidem adhibemus, hiſtoria, et quidem Anatomica, Hermaphroditi veri, qui easdem ex vtroque mixtas, vel ſeparatim diſpoſitas in corpore geſſit externe diſtinguendas, vel interne. Ruyſchius fidelis Naturae ille indagator annuit, multos quidem ſibi exhibitos, nullos vero fuiſſe deprehenſos, Hermaphroditos, atque definit, membrum

quod in Pseudo Hermophroditis solet haberi pro pene virili, esse semper inuentum clitoridem praeter naturam elongatam et incrassatam: vnde quidem concludere videtur, in solo sexu foeminino fallaciam apparere Androgyni: declarauit inde foeminam hominem, qui iam vigesimum quartum annum agens primo intuitu vir apparebat, idque vnice, quia membrum prominens erat in perforatum. Hoc tamen argumentum solum, nisi alia simul adsint phoenomena, nihil declarat, cum prostant innumera exempla hominum, quibus vrethra neque ad apicem glandis penis pertingit, nec ibidem perforatur, qui, alio loco apertura orta, vrinam et semen emittunt, imo vero foeminas impraegnant, liberos procreant, de quibus in fine dicam; vnde nimis praecox iudicium magni Viri existimo, et marem fuisse pueris Sibiricis simillimum et nostro arieti inde suspicor, quod ad aspectum formosarum Foeminarum non Virorum sibi *erigi hoc* membrum fassus est, et ipse bene meritus Ruyschius affirmat, duos testes, seu turbercula, in vtroque inguine vnum, repertos fuisse, quale et phaenomenon in pueris Sibiricis et in oue nostro apparuit. Concludo tandem, in sexu masculino, si non frequentiorem, quam in foeminis, saltem multiplicem adeo ac in illis obseruari errorem in genitalibus, vt alterum sexum imponat: vti hanc sententiam exponunt iam enarrata, ita affirmat eandem casus Petropoli visus, contrarius illi, de quo memorat Regnerus de Graaf (1): hic scilicet puero datum est, ob genitalia informia, baptismo nomen foemininum.

1 De mul. org. p. 299.

Anna

Anna Maria coniux Tubicinis, cui nomen Carolus Lang eſt, nono puerperio enixa eſt infantem tempore natiuitatis pro puella habitum, quare illi nomen Charlottae datum eſt. Tractu autem temporis, orta parentibus ſuſpicione circa ſexum, Mater filiolam ſuam putatitiam, iam ſeptem annos natam, Scientiarum Academiae praebet ſpectandam, vt ſcrupulus tollatur. Data tum fuit rei inquiſitio, beato iam Weitbrechto, qui et tum inuentorum amplam reddidit relationem, et merito concluſit creditam puellam fuiſſe puerum, atque defectum genitalium ſolum impoſuiſſe errorem: relata atque argumenta, in compendium contracta, hac occaſione addam.

In elatiore ſede ſynchondroſios oſſium pubis, inter capita prima muſculorum tricipitum (1), ortum membrum peni virili ſimile, nunc flaccidum, nunc rigidum, incuruum terminatur, in glandem penis, non clitoridis, ſimilem (2), corpus autem membri tegitur cute, glandem nudam relinquente, poſt coronam illi loco conſuto alligata (3); glans ipſa ſulcum leuiter profundum ſed coecum gerit, dum eo vsque vrethra non pertingit. (1) Tab. XI. Fig. 1. 3. (2) ibid. C. (3) ibid. B.

Infra hoc membrum vtrimque prominet tumor cutaneus oblongus, turgidus, rugoſus, tactu cauus percipiendus (4), vnde apparet, quaſi ſcrotum iuxta longitudinem futurae diſſectum ab vtroque parte ad latus internum reflexum et iterum adunatum foret, vt ita ſeparatum et ſingularem ſaccum vtrimque conſtituat, qui proprio motu flacceſſit, et corrugatur. Vterque autem ſaccus continet corpuſculum quoddam, duriuſculum, ſubrotundum, lubricum, pro teſticulo habendum, quod con- (4) ibid. D. D.

trectarur, corpore erecto, resupino vero eodem, inguina versus attrahitur. Rugae vtriusque sacculi interiores sunt transuersae et sibi parallelae, exteriores irregulares; adductis cruribus sacculi tumentes sese mutuo exosculantur, sola relicta rima, tumque speciem labiorum foeminini pudendi prae se ferunt. Diductis autem cruribus, adeoque et sacculis, paulo infra horum partem mediam apparet orificium aliquod, quod est vrethrae apertura sub cute in
(1) ibid. E. perinaeo descendentis (1), cuius pars exterior cutanea ablata, vnde in adscensu ad glandem, finditur in semica-
(2) ibid. F. nalem (2). Latera autem huius fissurae cutanea, turgidula prominent rubicunda, et ligamentum habent vtrimque cutaneum horizontaliter dispositum, quibus cum cu-
(3) ibid. GG te sacculorum colliguntur (3). Ligamenta haec latera fissurae diuidunt; pars superior glandem versus latior, inferior vrethrae aperturam versus, arctior, latissima circa ligamenta est. Latus autem dextrum in genere, latere sinistro, latius est: maxima vero laterum latitudo vix lineam geometricam aequat. Ipsa autem fissura exiguam habet profunditatem, in qua conspiciuntur vascula quaedam sanguinea, iuxta longitudinem decurrentia, aliaque
(4) Ibid. F. exigua splendentia granula, quae glandulae videntur (4). Fissura decem circiter lineas pollicis Londinensis progreditur, neque pertingit ad glandem, sed media via sistitur, succedente in eius locum cute, quae integra aliquantum prominet, suturae scroti corrugati instar: haec infra sulcum coecum, vt fraenulum glandi adnascitur, atque ipsa, ob strictvram incurua, aliquantulum membrum incuruans, impedit, ne illud satis eleuetur atque extendatur,

datur, nec in longitudinem sufficientem excrescere possit; gerit autem leues quasdam impressiones discretas, quae, tanquam vestigia fissurae oriundae, apparent (1). Vbi autem inferne apertura canalis terminatur et perineum incipit, superficiarias quasdam foueolas itidem hoc gerit (2). Tandem dum mouetur vel rigescit membrum, secundum longitudinem fissurae sub cute obseruatur aliqua, eleuatio, quae a motu corporum cauernosorum subiacentium prouenit.

(1) Ibid. n

(2) Ibid. I

Primo intuitu quidem apparet deformis partium fabrica sexum exhibere foemininum; contrarium autem patet.

1. Propter sedem et positionem pudendorum elatiorem, quam in foeminis, in quibus haec sub curuatura ossium pubis est, hic supra eandem.

2. Propter tumores laterales per fissuram distinctos, qui veri sacculi caui, cutanei, iam flaccidi, iam rugosi corpora globosa, lubrica, veros testes habenda, continent, et scrotum diuisum non labia pudendi foeminini declarant, quae scilicet a subiecta pinguedine dura, solida tumescunt.

3. Propter membrum pendulum penem, non clitoridem, referens; vt arguit 1. situs elatior 2. directio corporum cauernosorum, quae in pene recta descendunt iuxta longitudinem synchondrosios, indicante hoc motu illorum iuxta fissuram in attractione et erectione. Clitoridi vero, propter meatum vrinarium, nullus descendendi locus relinquitur, sed diuaricatis cruribus, sequitur directionem processuum inferiorum ossis pubis, lateraliter. 3. Tota glans, vt in viro, ab apice coronam ver-

fus craſſeſcens, totam penis extremitatem ad fraenulum vsque ambiens rotunditate vngulaeformi: dum apex clitoridis lateraliter compreſſus, in duas portiones fiſſus, abit in Nymphas. 4. Magnitudo totius membri conuenit huic aetati pro pene, dum clitoris in illa eſt adeo exigua. Nec ſi quis aſſerat, eſſe clitoridem in maiorem molem excretam, pudendum reliqua requiſita in foemina poſſidet, contra in viro, etſi mutilatas, gerit partes.

Hinc merito concludo cum beato Anteceſſore meo, fuiſſe hunc puerum, in quo contra naturam ſcrotum in duos ſaculos diuiſum vtrimque teſticulum continet, et vrethra laeſa et fiſſa non penitus deducta eſt ad glandis extremitatem, vt eandem perforet, ſed media via truncata iuxta longitudinem.

Cum ergo in oue diſſecto certum apparet, in pueris vero ſuspicandum eſt, partes generationi inſeruientes internas eſſe integras, vt ſemen conficere atque emittere valeant prolificum, quaeritur an illi, vel illis ſimiles adulti ad matrimonium apti ſint admittendi? An doli mali accuſandi ſi, ſimulata partium integritate, vxorem duxerunt, et an tum huic exceptio competit iuris ſui ſibi non tributi? Conceſſo, partes internas, vt in oue, eſſe perfectas, externas vero, vt in his hominibus, mutilatas, ſed ad coeundum habiles, puto, non modo illis nuptias contrahere permiſſum, ſed et ab omni querela eſſe arcendam vxorem; quia conſtant exempla hominum, qui, glande penis imperforata, apertura alio loco infra illam in vrethra orta, cum mulieribus concubuerunt, atque easdem impregnauerunt. Narrat Melchior Fribe (1), vi-

(1) Miſcell. Med. Phyſic. Germ. An. 3. Ob. 98.

virum, cui glans penis deformis et imperforata erat, apertã vero infra fraenulum vrethra, bis vxorem duxisse et sex procreasse liberos non sine voluptate in coitu. Et Vander Herre (1) testatur, se plurimos nouisse, qui pene ad fraenum, imo vero pollicem vnum et dimidium ab extremitate perforato, liberos ex vxoribus procreauerunt. Nec ratio physica latet. Feruente Venere, semen non lente vel iugis fluxu exstillat, sed ad distantiam impetu violento eiicitur, musculis huic operi destinatis vi conuulsiva contractis; vnde etsi non immediate ante os vteri emittitur, hac ex causa eo vsque facillime peruenit. Et hac ratione puto, clausiris virginitatis illaesis, semine ante vulnam a viro emisso, nec pene intromisso, puellas factas fuisse grauidas, cuius rei prostant apud Auctores quamplurima exempla; et hac ratione mulieres imperforatas concepisse, certum est. Accusatur tunc vtplurimum vis vuluae attractrix, et hiantis vteri auidus ad resorbendum semen appetitus: credo tamen, licet concedam, incitatae libidine foeminae partes inflammatione calescentes et tensione magis patulas, ad recipiendum semen plus esse, ac secus, dispositas, id obtinere ab impetu, quo semen a Viro emissum ad apertum os vteri defertur, et ipsum intrat; imprimis cum tota copia seminis, vna vice emissi, non requiritur ad conceptum, sed vnica vel minima guttula sufficit, quod iam Aristoteles notauit (2), et hodie ex historia seminis et conceptus firmatur. Cum ergo Virgo, hymene integro, per eiusdem foramen potest recipere vtero semen absque intromissione penis intra vuluam, vti hoc testatur Fabritius

(1) De generatione

(2) Histor. animal. L. X.

ab

ab Aquapendente (1) Riolanus, quatuor obſeruatis hiſtoriis (2) Grafius (3) Stalpartus vander Wiel (4). Vtque mulier imperforata grauida fit, ſiue magnitudo penis virilis deficiat, ſiue membrana vuluae interpoſita durior obſtat, quale exemplum legimus apud Hildanum (5) Diemerbroeckum (6) Ruyſchium (7), ita credo; omnes memoratos pueros, iuuenes adultos factos, atque alios illis ſimiles, non modo poſſe cum foeminis concumbere, ſed et illas grauidas reddere, quoniam multae adſunt circumſtantiae, propter verecundiam reticendae, et quas vnisquisque facile conſiderando percipit, quae facilius ſemen ad os vteri deducunt (inter quas ipſa directio ſemicanalis vrethrae eſt) quam factum hoc eſt in memoratis caſibus, locis citatis perlegendis.

(1) Chirurg. oper. part. 1.
(2) Anthropol. L. 2. c. 31.
(3) De mul. org. p. 51
(4) ad obſerv. 39.
(5) cent. 3. obſ. 60.
(6) Anat. L. 1. c. 23.
(7) Obſer. 22

Explicatio Figurarum Tab. XI.

Figura prima

A Membrum peniforme.
B Cutis tegens et praeputium formans
C Glans fulcata.
DD Scrotum diuiſum in duos ſaccos a ſe inuicem diductos.
E Apertura vrethrae.
F Eiusdem ſemicanalis, in quo vaſa et glandulae.
GG Ligamenta.
H Cutis integra cum foueolis.
I Perinaeum cum foueolis.

Figura ſecunda

AA Ambitus regionis pubis.
B Exortus penis, ſeu radix.
C Praeputium in apicem eleuatum, pilis hirtum.
D Idem extenuatum in rugas excrine.
E Penis extra praeputium incurruus.
F Glans ſub pene delitescens.
G Anus.
HH Initium caudae.

Figura tertia

AA Ambitus regionis pubis.
B Radix penis.
C Praeputii apex eleuatus, et ſurſum reclinatus.
DD Eiusdem ſuperficies interna rugoſa tenuis a ſiniſtro arcum faciens breuiorem.
E Praeputium in arcum exſciſſum re-adſcendens ad glandem, et a latere dextro fraenulum formans.
F Glans penis eleuata.
G Anus
H Vrethra in ſemicanalem quaſi exſciſſa, deficiente parte dimidia, inferiore.
I Foramen ouale in perinaeo, vbi integra vrethra deficere incipit.
L Cutis perinaei in eminentiam diſtinguentem, ſuturae inſtar, eleuata.

DE

DE VTERO MVLIEBRI OBSERVATIONES ANATOMICAE.

AVCTORE
Iosia Weitbrecht.

Fortunatum accidit, vt hoc anno quatuor cadauera feminina, mulieris septem menses praegnantis, duarum vetularum et virginis, theatro nostro anatomico inferentur. Quam opportunitatem vt in vsus conuenientes vertere non destiti, sic nunc ex pluribus obseruationibus factis eas potissimum, quae ad vterum imprimis praegnantem pertinent, seligere, et cum Academia communicare, mihi est propositum. In quibus exponendis etsi non omnia noua Vobis videbuntur, aliqua tamen erunt, quae ad huius partis historiam amplificandam et perficiendam facere poterunt.

I. Principio de vteri praegnantis habitu externo aliqua monebo. Dum resupinum iacebat cadauer, abdomen ab vmbilici regione ad pubem vsque omnino protuberabat. Non erat autem tumor rotundus, durus, aequabiliter tensus, vti in hydropicis esse solet, sed mollis, inaequalis, in supremo abdomine latissimus, altissimus immediate infra vmbilicum, ad cuius latus dextrum durities aliqua sentiebatur, tum vero paullatim, pubem versus in pyri formam coangustatus. Hi quidem characteres iustam spem ex mariti testimonio conceptam, vterum grauidum subfore confirmabant. Remotis enim integumentis nudus ap-

parebat vterus a peritoneo immediate tactus et tectus, occupans omnem cauitatem abdominis ab vmbilico ad os pubis, et peluim ipſam, cuius latera exacte claudebat.

II. Circumſtantiae longe aliae comitabantur inſignem tumorem, quem altera vetularum in inferiore abdomine ita geſtabat, vt primo quidem obtuitu ſtatum feminae praegnantis mentiretur, re autem propius examinata, corpus longe diuerſum eſſe deprehenderetur. Erat enim ille tumor rotundus, eleuatus, cuius quaſi centrum vmbilicus. Praeterea ſupra tumorem in regione epigaſtrica cutis erat collapſa, quaſi ibi ventriculus et inteſtina vacua iacerent. Similiter ad lumbos macilenta flaccíditas. Infra tumorem denique in hypogaſtrio et ſupra pubem denuo profunda fouea; ita, vt extremitas ſterni, et vmbilicus et os pubis prominerent et tumor medius ſolitarius tamquam foſſa quadam circumdatus eſſet. Hunc tumorem vt nec anaſarcoden macilenta cutis, nec aſciticum vicina collapſa flacciditas teſtabatur: ſic nec de grauiditate quicquam certo affirmare licebat. Vterus enim praegnans nec ita praeciſe in globi formam turgeſcere, neque hiatum ſupra pubem relinquere debebat. Sed dubium omne ſuſtulit inciſio abdominis, quae ovarium dextrum in tumorem globoſum, ex membrana pellucida, tenui, lympham claram, transparentem continente conſtantem excreuiſſe, commonſtrauit. Quam obſeruationem priori propterea vtile duxi adiungere, quia cautelas quasdam ſuggerit, quae in mulierculis vere an falſo grauidis ex ſolo habitu externo diiudicandis, obſcurae ſaepe rei lumen ad ſpergere queunt. Sed ad vterum redeo.

III.

III. Tunica vteri exterior eſt vera peritonei continuatio (1). Quod poſtquam veſicae planitiem obduxit, et iam ad vterum acceſſit, ſuperata ceruice et vtero ampliari incipiente, haec tunica paullo craſſior euadit, et cinguli albicantis, vteri fibras corroborantis ſpeciem prae ſe fert, cuius figura quodammodo falcata eſt (2). (1) Tab. XII. fig. 1. aa (2) Ibid. d.

IV. Antequam aperiretur vterus, putaſſes, illum vix tenue linteum vel papyrum craſſitudine ſuperare, adeo tactu mollis erat, et adeo facile contentum foetum tangere, et membra diſtinguere licebat. Sed facta inciſione res aliter ſe habere intelligebatur. Re vera enim craſſities laterum ſectionis tres ſaltem lineas geometricas aequabat. Subſtantia autem vteri erat, vt cum Arantio loquar, fungoſa, ſpongioſa, inſignibus hiatibus et ſinibus venoſis perterebrata, ſed vacuis, ita vt ſectio plane incruenta eſſet (3). Haec craſſitudo in toto vteri ambitu propemodum aequalis erat, aucta tamen parumper circa fundum. Vbi autem vterus a maxima amplitudine anguſtari coepit et cingulum illud (III.) acceſſit, ibi paullo tenuior factus erat vsque ad ceruicis principium (4). Contra vero parietes vterorum reliquorum non praegnantium vltra eam menſuram, ad quatuor et quinque lineas craſſi fuere; imo diſciſſus vterus vetulae, quae ouario laborauerat, etſi praeter ceruicem plus iuſto elongatam nihil a natura aberraſſet, duplam tamen latitudinem parietum vteri praegnantis exhibuerat. In his autem conſiſtentia parietum triplex eſt. Ea enim pars, quae proxima tunicae peritonei eſt, eſt compacta et quodammodo muſculoſa. In me- (3) Ibid. e. (4) Ibid. e.

dio vterus eſt magis ſpongioſus et plurimis cauernulis ac ſinulis venoſis diuerſae amplitudinis interſtinctus. Proxime autem cauitatem internam ſubſtantia iterum compactior euadit. Haec phaenomena magis fauere videntur ſententiae illorum, qui vterum grauidum attenuari docent. Quamquam, ſi meam mentem interponere licebit diſputationi iſti, quae de diuerſa vteri craſſitudine inter artis obſtetricandi magiſtros viget in determinatione menſurae, multum difficultatis et praeterea amphibolice quid ſubeſſe mihi videatur. Qui enim quantitatem iſtam diuerſam iuſte inter ſe comparare volunt, neceſſario obſeruationes ſuas in vno et eodem ſubiecto inſtituere debent. At vero cum hoc fieri nequeat, nulla prior via ad veritatem eſt, quam vt plura exempla colligantur, et, qui modus frequentior ſit, diſpiciatur, in quo exacte determinando a nimis vaga illa per digitos transuerſos dimetiendi methodo abſtinendum, aliamque magis accuratam menſuram in vſum vocandam eſſe putauerim; quo facto vereor, ne, qui a Mauricello diſſentiunt, cauſſa ſua cadant, imprimis vero illi, qui per dilatatum vterum non ſolum maiorem latitudinem parietum vteri in transuerſum ſecti intelligunt, ſed etiam per maiorem craſſitiem, vocabulo hoc amphibolice ſumto, adauctam denſitatem eſſe volunt, qualis Graſii ſententia videtur eſſe. Quamuis enim non negandum ſit, et venoſos ductus ampliari, et fibrarum ſtrata interiecta diſtingui ac in apricum produci vtero praegnante; cum vteri virginei denſa, compacta et ceu in rude corium compacta ſubſtantia appareat: iſta euolutio tamen et ampliatio eo ipſo non ſolum maiorem rari-

raritatem et ſpongioſitatem inducit, ſed etiam, quidquid incrementi totus vterus in longitudinem et latitudinem cepit, id omne craſſitiei virgineae decedat neceſſe eſt.

V. Vaſorum ſanguineorum vteri praegnantis diſcrimen inſigne deprehendi. Venae quidem, vt iam ſupra dixi, et olim ab aliis notatum eſt, amplos ſinus et cauernas intra parietes efformabant, ſed vacuae tamen erant et collapſae; ad latera autem tam eae, quae ex ſpermaticis, quam quae ex hypogaſtricis accedunt, vehementer ſanguine turgebant (1); ipſae ſpermaticae a primo ortu ſuo ex emulgente et caua calami ſcriptorii mediocris amplitudinem aequabant. Ligamenta rotunda, fusca, et fere nigricantia turgida, vt calamum maiorem admitterent, nudae venae ſed ſerpentino ductu inflexae habitum prae ſe ferebant (2). Arteriae contra tam ſpermaticarum exilium, quam hypogaſtricarum propagines tam inſignibus cauitatibus neutiquam luxuriabantur, ſed quod oppido elegans viſu erat, propriis ſuis tunicis gaudentes interna latera ſinuum venoſorum exiguis vltimis canaliculis et ramificationibus perreptabant, ita, vt hae arteriolae intra ſinuum cauitates in ipſo ſanguine venoſo lauarentur, propemodum vti neruus ſextus in durae matris ſinibus balneo quaſi ſanguineo immergi ſolet.

(1) Ibid. ii.

(2) ibid. h.

VI. Iniectione per arterias hypogaſtricas facta ceracea materia etiam in ipſam vteri cauitatem penetrauit ſub ſpecie globulorum exiguorum per arteriolarum extremitates eiectorum, et quidem non ſolum iis in locis, vbi per ſeparationem humoris cuiusdam lymphatici coagulati vteri parietem et chorion interiacentis tunica vteri interna laeſionibus quibusdam

noxia fuerat; ſed et ibi, vbi huius humoris portiones adhuc firmiter cohaerebant, per ipſum hunc humorem ſimilium globulorum forma tranſudauit. Imprimis vero ea in regione, vbi placenta adhaeſerat, plurimis in locis ſingulares congeries vaſculorum arterioſorum in elegantia glomeramina conuolutorum apparebant, quae denique ex vno aut altero oſculo materiam ceraceam in cauitatem vteri eructabant. Hae vero extremitates an immediate cum placentae venis cohaereant, an vero ſolum illum ſuccum lymphaticum, de quo mox plura, ſecernant, occaſione data diligentius ſcrutari, omnino erit operae praetium.

(1) Ibid. b. VII. An vteri interna cauitas (1) ſingulari tunica inueſtiatur, vt difficile indagatu eſt, ſic obſeruationes meae illorum ſententiae magis fauent, qui illam negant. Saltem in nullo, praeter vltimum, membranam diſtinctam laeuore quodam conſpicuam deprehendi. In vtero praegnante inter membranam chorion et vteri parietes interſperſa erat, vt monui (VI), lympha quaedam coagulata in formam ſingularis membranae extenſa, albicans ad flauedinem tantillum vergens, glutinoſa quidem, ſed non admodum tenax. Difficulter ſeparabatur a chorio, quippe quae membrana vaſculis ſuis ſanguineis in hanc ipſam lympham membraniformem immergebatur; ſed arcte etiam cohaerebat cum ipſo vtero, vt laeſiones aliquas euitare nequirem, et hac de cauſſa nihil de natura ſuperficiei internae affirmare aut negare audeam. In vtero vetulae, cuius ouarium hydropicum, paries anterior et poſterior muco quodam, ſeu ſanie cruenta nigricante diſcernebantur;

tur, quo caute ablato, ſuperficies interna non videbatur inueſtita eſſe ſingulari tunica laeui neque etiam villoſa; ſed erat potius laciniis filamentoſis, tenuibus, irregularibus, quales per detractionem alicuius membranae generari ſolent, obſita. Quamuis nulla diſtincta oſcula cernebantur: tamen vtero paullum compreſſo mox plurimi canaliculi ſubtiles repentes detegebantur ſanguine turgidi, quem in cauitatem vteri effundebant. Virgineus vterus exhibuit ſuperficiem non membranaceam, ſed ſubtiliſſime villoſam. Vterus autem vetulae alterius aſciticae, qui toto habitu ſuo indurationem quandam prae ſe ferebat, non ſolum ſuperficiem leuigata membrana inductam ſed eam quoque expanſionibus ſuis varios loculos eſſormantem commonſtrauit.

VIII. Detracta penitus, qualis mihi videbatur, interiore tunica vteri praegnantis apparuere plurima ſtrata fibrarum muſcularium. Hae fibrae ſunt planae, compreſſae, ad dimidiam lineam latiuſculae rugoſae, vti fibrae carnis coctae, ſibi inuicem parallelae accubantes. Muſculares voco, quia partim ob colorem rubicundum carneum, partim ob ſtructuram nulli alii rei aequiparandos noui. Directio earum varia eſt, nec adeo exacte determinanda. Muſculum illum orbicularem Ruyſchianum in fundo vteri non inueni, ſed eius loco in vtroque latere circa oſcula tubarum fallopianarum detexi inſigne ſtratum circulare, tanquam orbem muſcularem, ita vt oſculum tubae orbis centrum ſit, et latitudo orbis ad pollicum duorum latitudinem quaquauorſum excurrat. Haec igitur ſtrata conſiderari poſſunt ceu duo muſculi orbiculares laterales, orificio

rificio tubarum circumpositi. In anteriore pariete parum a se inuicem distant (quippe omnino distantia orificiorum anterius mensurata minor est, quam posterius); in quo interuallo aliud stratum longitudinale a fundo ad cernicem decurrit, cuius fibrae quo propius huc appulerant, eo magis disiiciuntur et cum aliis transuersis confunduntur. In interuallo posteriore erat illa regio, vbi placenta adhaeserat, et vbi glomeramina ista arteriolarum exsurgebant; quae regio igitur aliquam vtriusque orbis portionem obtegit. Denique infra istos orbes stratum aliquod transversale totam cauitatem vteri tamquam zona lata ambiebat, directione ad axin vteri vel ad fibras longitudinales perpendiculari. Quo propius autem haec zona ad cernicem accesserat, eo magis eius fibrae disiiciebantur, et cum aliis irregularibus commiscebantur.

IX. Cauitas vteri pragnantis et virginei multum inter si differunt. Hic non dici potest concauus, siue non debet in eo fingi cauitas aliqua spatiosa, *laqueata*, turgidula; sed paries eius anterior et posterior sibi ceu planum plano accumbunt, et solo muco interstinguuntur, ne concrescant. Ille vero in ampullam expanditur. Praegnans igitur vterus recte vesicae inflatae, virgineus lagenae compressae aequiparatur.

X. Cernix, siue collum vteri non exigua huius organi portio est. Sed in statu pragnante non in eadem temporis proportione mutationibus et extensioni obnoxiam esse ac fundum, obseruationes nostrae luculenter docuerunt. In virgine et vetulis dimidiam propemodum longitudinem totius vteri, quae vt notum est, vix

duos

duos pollices aequat, compleuerat. In praegnante perparum ab hac forma et quantitate receſſerat, niſi quod ante diſſectionem conſiderata habitum paullo turgidiorem prae ſe ferret et duritie fundum ſuperaret. Contra vteri caui longitudo erat vltra octo pollices, latitudo maxima ſeptem propemodum pollices; qua extenſione tanta caverna efformabatur, quae foetum ſeptimeſtrem cum membranis liquore et placenta facile complecteretur. Haec tota ſpecus ex tam ſpatioſa amplitudine coarctabatur inferius in foraminulum adeo exiguum, vt vix piſum admitteret, ceu oſculum vrethrae internum ex contractis veſicae vrinariae tunicis generatur. Hoc foraminulum vocare placet oſculum ceruicis internum, vt diſtinguatur ab altero vulgo cognito, os vteri dicto, tranſuerſa rima in vaginam hiante, quod oſculum ceruicis externum appellabimus.

XI. Totum oſculum internum occluſum erat muco quodam albicante, pellucido ſummo glutinoſo et tenaci, qui intra ipſam vteri cauitatem paullum exturgeſcebat. Idem mucus extuberabat ex oſculo externo. Erat autem eius tanta copia, vt ob inſignem glutinoſitatem ad multos pollices abſque ruptura extraherem. Eundem mucum in virgine et vetulis circa oſculi externi rimam, etſi non tam copioſum deprehendi.

XII. Poſtquam ceruicem, continuata vteri ſectione longitudinali, aperui: tota diſtantia ab vno oſculo ad alterum pollicem circiter aequauerat (1); craſſitudo parietum, ſolidiorum quam vteri parietes, quatuor lineas excedebat (2), quam ſubſtantiam intimam, tenacem compactam

(1) Tab. XII. fig. 11. e

(2) Ibid. a.

perreptabant vaſcula ſanguinea arterioſa, quae, vt arbitror materiam apportant ad ſecernendum mucum iſtum glutinoſum, quo cauitas ceruicis, tota quanta eſt, infarcta fuerat, et omnes receſſus ac latebrae rugoſae ſcatebant.

XIII. Per hunc mucum transparebant elegantiſſime rugae illae pennatae Huberi, ſiue, vt alii vocant, valuulae, cum columnis intermediis, quarum aliquae vaſculis ſanguineis ſuperbiebant (1). Erant autem hae rugae et columnae nihil aliud, niſi ipſiſſimae membranulae tenues, aliquae dimidiam lineam, aliquae integram lineam latae quae altero ſuo margine parieti ceruicis innascuntur, altero autem libere fluctuant, quemadmodum laminae ſeu folia membranea in omaſis ruminantium fluctuant; quae, quia a muco viſcido, perparum fluido ſuſtinebantur, iucundum ſpectaculum exhibebant. Quod cum raro accidat, eas delineari curaui, hac cum cautela, vt, donec delineatio facta eſſet, obiectum liquore balſamico, quo Theſauri Ruyſchiani conſeruantur, immerſum teneretur. Columnae intermediae eminent tam in pariete antico, quam poſtico. Ad has columnas tendunt rugae laterales, et quidem ita, vt ab interno oſculo externum verſus deſcendendo conuergant; quamuis in latere ſiniſtro poſteriore paullulum ab hoc ordine recedant, et irregulariter diſcurrant. Similiter vbi ad oſculum vteri externum peruenere, paullo craſſiores et breuiores fiunt, et hinc magis rugarum formam induunt; terminantur etiam aliquae in ipſo limbo oſculi in extremitates pendulas, rotundiuſculas. Inter has membranas rugoſas obliquas maiores, deliteſcunt aliae minores, anguſtiores, hinc pro-

(1) Ibid. b. c. d.

profundius et transuersim sitae. Omnes vero rugae vel lamellulae ita positae sunt respectu fundi parietum, vt ad angulum acutum inclinent, et deorsum nutent; hinc quando directione ab osculo interno externum versus tendente comprimuntur, squamarum instar sibi accumbunt, et superficies cauitatis plana fit. Si digitum ordine contrario ducas, superficies aspera oritur et multis scrobibus interstincta. Nam inter omnes has membranulas, tam maiores, quam minores, deteguntur profundae lacunulae, foraminula, sinuli, in ipsam substantiam ceruicis penetrantes, quibus liquor ille viscidus tenaciter inhaerescebat, et ex quibus copiose exprimi poterat. Non autem existimandum est, has rugas in omnibus subiectis tam distincte euolutas esse. In virgine vestigia lamellarum multo tenviora erant. In vetularum altera apparebant columnae crassiores quidem, sed non adeo profundae, et sensim euanescentes, eodem fere modo ac a Graafio pinguntur. In altera autem, quae ouario laborauerat, et propter quem tumorem vterus in pelui extensionem aliquam passus erat, manifestabantur membranulae fluctuantes intermediae perpaucae; columnae autem plures, compactiores, solidiores, maiores. Nam in pariete postico erant columnae quatuor, fere omnes parallelae, carnosae ceu auricularum cordis lacertuli, breuissimis membranulis transuersalibus itidem crassiusculis cohaerentes, quae membranulae diductis columnis apparent, sed clausa ceruice et columnis compressis absconduntur. In pariete antico autem erat columna vnica, ad quam lacertuli transuersales ex parietis posterioris columnis pertigere, hoc ordine, vt vtrinque a dextris ad sinistras oblique deorsum vergerent. XIV.

XIV. Quae hactenus de vteri ceruice (X. XI. XII.) annotauimus, ad multas veritates viam nobis pandunt. Primo quidem abunde confirmatur assertum Graafii (1) qui stabiliuit „collum non insequi dilatationem vteri grauidi, sed pristinum fere statum retinere„ id quod de mediis gestationis mensibus intellectum vult. Cum natura rei igitur plane non congruit idea illorum, qui vteri praegnantis ceruicem sibi fingunt ceu vnicum osculum, aunulo quasi membraneo occlusum, qui paullatim mollior fiat et amplior, donec ita hiet, vt foetum transmittere possit, qualem e. g. Deuenter (2) pingit. Hoc enim non nisi de vltimis diebus grauiditatis, quando partus appropinquat et imminet, intelligi debet; tum enim orificium paullatim distenditur et annuli simplicis formam nanciscitur, per quem vix vnum alterumue digitum traiicere liceret. Totalis autem dilatatio tum demum, vti obstetricando experimur, locum habet, quando iam parturiens aliquos dolorum prodromos persentiscere incipit, aquae rumpuntur, et caput foetus ad ceruicis orificium adigitur. Qua lege autem ceruix post partum contrahatur, nondum memini ab Autoribus determinatum esse. Per experientiam constat, partes animalium vehementer pressas et contusas intumescere solere; credibile est, idem accidere lateribus ceruicis et columnulis ibi ex foetus transitu multum et diu saepe distentis et pressis. Dicam quid ipse expertus fuerim. Cum nuper protractum a rudi obstetrice vterum et vaginam reponerem tertia post partum hora: non solum orificium ceruicis ita hiabat, vt duos digitos facile

(1) Cap. VIII. pag. 95.

(2) In nou. lum. obst. F. 4

le intrudere potuerim, ſed etiam vt rugas craſſas (1), queis margo obſeſſus erat, tactu diſtincte dignoſcerem. (1) T. XII Fig. III.

XV. Exinde porro apparet, quam difficile ſit primis menſibus ex ſolo tactu diiudicare, num femina praegnans ſit nec ne? quia tangens omnino nil, niſi veram ceruicem oblongam duriusculam cum oſculo labiis mollibus in vaginam prominente perſentiſcit, vnde facile in eam opinionem deduci poteſt ac ſi femina non praegnans eſſet. Certe ex ſolo augmento ceruicis aliquid veri concludere exercitatiſſimam manum et acutum iudicium requirit, quod ab obſtetricibus popularibus non facile expectaveris.

XVI. Neque minus ratio patet, (aliis cauſſis tamen neutiquam poſthabitis) quare mulieres, quae primis vel mediis menſibus abortum patiuntur, doloribus multo vehementioribus et acutioribus diſcrutiari ſoleant, quam ſi iuſtum parturiendi terminum attigerint. In his enim cervix vteri laxior paullatim diſtenditur, et vltimis tandem diebus in ſimplicem annulum efformatur; hinc diſtractionem facilius perferunt, quia pedetentim fit. In illis contra cauitas ceruicis eſt anguſta, ſubſtantia craſſior et ſolidior, fibrarum vis ſtrictior; quae res vt in partu tam immaturo et anticipato multo fortius extenſioni reſiſtunt, ne foetus tam facilem et planam viam inueniat: ita non poſſunt non maximum et acerbiſſimum dolorem mulierculis commouere.

XVII. Ex compreſſa ceruicis figura, et ex muco iſto lento, tenaci, totam cauitatem et omnia eius foraminula ab vno oſculo ad aliud obſidente certe meo qui-

dem iudicio, colligitur: vterum praegnantem perfecte clauſum eſſe; omnem igitur introitum vel aëri vel alii cuipiam humori denegari, nullam igitur ſuperfoetationem fieri poſſe in ſyſtemato vermiculari, neque etiam in non pragnantibus ſemen in vteri cauitatem aſcendere poſſe, quia idem mucus in omnibus aliis ceruicum oſculis, ſaltem externis, adeſt.

XVIII. Denique liceat ex obſeruationibus meis ea commemorare, quae ad illuſtrandam hiſtoriam ouulorum Nabothianorum facere, et fortaſſis haud obſcuram facem in diiudicanda controuerſia afferre poterunt; Memini quidem me olim tales veſiculas vidiſſe, et conuentui quoque ſpectandas exhibuiſſe. Memini etiam, me alio tempore fruſtra quaeſiuiſſe; memini, quae pridie aderant, poſtridie euanuiſſe. Sed de ſubiectis hoc anno oblatis aſſeuerare queo, me easdem et non vidiſſe et vidiſſe in eadem ceruice, veſiculas adeſſe et non adeſſe poſſe. Explicabo paradoxon. Primo quidem obtuitu illae in nulla ceruice apparuere. *Sed cum* ex. gr. vterus praegnans delineandi cauſſa quietus iaceret, in extremo limbo oſculi ceruicis externi oriebantur paulatim aliqua corpuſcula globoſa, magis tamen rubicunda ac mucus qui cauitatem ceruicis obſederat. Accurato examine inſtituto vidi, non eſſe veſiculas ſingulari tunica incluſas, ſed eſſe illum ipſum mucum ex ceruice ſponte expreſſum, in globulorum formam conuolutum, qui in foraminulis ſupra memoratis tamquam a pedunculis haerebant, et ex illis extrahi et abrumpi non vero ceu veſicula determinatae magnitudinis auferri poterant. Contrectando et premendo plures licebat producere. Maceratione

ratione autem abolebantur, et hinc inde tumores quidam exigui, ſed profundius ſiti, dilute rubicundi, veſiculis Nabothianis perfecte ſimiles, emergebant. Similiter in cervice vteri alterius vetulae recenti ne veſtigium quidem veſiculae aderat; poſtmodum vero macerando et contrectando copioſe in conſpectum prodibant, etiam ad lenticulae magnitudinem, turgentes humore rubicundo, qui ex aliquibus, non ex omnibus, exprimi poterat; imo eadem veſicula primo humorem fundens mox plane occludebatur. En igitur, quo me coniectura ducit. Arbitror iſtas veſiculas Nabothianas non eſſe particulas organicas aut conſtitutiuas corporis animalis, non igitur eſſe ouula, neque etiam eſſe hydatides morboſas, ſed eſſe corpuſcula plane fortuita, maceratione et contrectatione nata. Videlicet, non ſolum media ceruix (XIII.), ſed et imprimis labia oſculi externi circa rimam copioſis exiguis foraminulis ſcatent, quae nil ſunt, niſi orificia excretoria canaliculorum mucum ceruicis fundentium. Quando igitur vel contrectando et premendo humor vrgetur et adigitur, vel macerando aqua aut ſpiritus per orificia intrat; canaliculi, quorum reptatus valde obliquus eſt, intumeſcunt, qua parietum diſtractione etiam ipſa oſcula transponuntur: nec ductibus directe reſpondeant ſed intercludantur, quemadmodum vrinae via per vretres intercluditur, inde fit, vt veſiculae ſemper exprimi nequeant, ſed tamquam vndequaque clauſae appareant. Non autem mirandum eſt, cur humor veſicularum rubeat, quum tamen mucus ceruicis ſecundum naturam albicans ſit. Hoc enim inde efficitur, quod vel con-

contrectatione nimia non purus mucus, ſed et ſanguis ſimul exprimatur, vel maceratione idem etiam ſanguis extrahatur, vnde iſta colorum miſtio reſultat; quemadmodum generaliter experientia docet, omnes humores lymphaticos et ſeroſos corporis animalis, etiamſi ſecundum naturam puriſſimi et pellucidiſſimi ſint, quo diutius extra vaſa ſtaguant, eo profundius a ſanguine extracto tingi.

Explicatio Figurarum TAB. XII.

Figura prima.

Vterus ex muliere ſeptimum menſem praegnante ſecundum longitudinem apertus, vt cauitas interior, laterum craſſitudo, et ſinus venoſi cum directione fibrarum, pateant.

a. Vteri tunica exterior.
b. Cauitas vaſculis ſanguineis irrigata.
c. Craſſitudo laterum naturalis cum venarum ſinibus et fibrarum directione.
d. Zona transuerſalis.
e. Pars ceruicis vteri.
f. Tubae fallopianae.
g. Ouarium.
h. Ligamenta rotunda.
i. Vaſa vterina ex hypogaſtricis.

Figura ſecunda.

Ceruix vteri praegnantis aperta cum portione vaginae.

a. Craſſitudo ſubſtantiae ceruicis ſecundum longitudinem lateris ſiniſtri diſciſſae.
b. Columna parietis poſterioris.
c. Columna parietis anterioris.
d. Rugae transuerſae fluctuantes.
e. Labia oſculi externi itidem a ſiniſtris diſciſſa.
f. Portio vaginae.

Figura tertia.

Rugas craſſas ceruicis vteri poſt partum exhibet.

DESCRI-

ABRAHAMI KAAV BOERHAAVE
OBSERVATIONES ANATOMICAE.

Obſeruationes Anatomicas daturus praemoneo, inter diſſectiones cadauerum, ſi quid mihi praeter ſolitum occurrit, fideliter hoc in aduerſaria deferre, vt deinde expromam in vſum. Inde forſitan eueniet, vt vel ſimilem, vel et eandem annotationem iam viderit Lector alias. Firmior inde erit veritatis ſimplicitas. Ego enim inter tot, quae vndequaque apportantur, cadauera, vel in vſum Anatomes, vel ad cauſam mortis inueſtigandam, plus ſemper intentus ſum ipſarum partium inquiſitioni, quam aliorum auctorum in Muſeo compilationi: vnde eundem caſum, iam alias notatum, in hiſce iterum perlegere, nemo facile vituperabit. Hoc de hiſce, et quae in poſterum dabo, moneo.

Obſeruatio prima.

Flante borea magnoque frigore, Auriga Wyburg tendens Petropolin, cadens a traha inuenitur in niue mortuus. Apertum cadauer praebuit viſcera abdominis et thoracis ſatis ſana, cerebrum autem valde inflammatum, inprimis in haemiſphaerio dextro. Sed quod maxime mirum! in eodem latere durae matris, itidem valide inflammatae, pars concaua tota ſuccingebatur membrana tenui, ſed forti, cuticulae adultae inſtar craſſa, quantum ad oculum apparebat, homogenea, coloris ſubrubelli, ſanguinei quidem, ſed diluti, parte inferiore, qua piam matrem reſpicit, leuiſſime floculenta, qui flocculi, dum

ſpiritui frumenti, et prius aquae, immittebatur, leuiter decidebant ad fundum vitri. Caeterum membrana integra, et (vt dixi) tenuis, ſed fortis, ſatis facile ſeparabatur a durae matris concauitate, illi tamen hinc inde fortius annexa per tenuiſſimas fibrillas: ſuperficies autem, quae continua erat durae matri, glabra, magis albeſcebat, plus neruea. Extendebatur haec membrana a ſinu longitudinali, vbi per fibras complicationem leuem efficientes, accreſcebat ſupra totum haemisphaerium dextrum ad fundum caluariae vsque. Atque ſeſe a latere eodem cum proceſſu falciformi intra haemisphaeria cerebri inſinuabat; a latere autem ſiniſtro tota deſiderabatur, eratque ibidem dura mater, vt ſolet ſuperficie ſua interna, naturalis tam ſupra cerebrum, quam intra eiusdem diuiſionem.

Scio, iam Columbum, Vieuſſenſium, Ridleyum, Pacchionem, aliosque, qui de dura matre ſcripſerunt, illam duplici membrana conſtantem exhibere, inter quas vaſa decurrunt, et has ſuperficies intertextis fibris *muſculoſis* conſtitui, vnde de vſu mira imaginantur. Poſt diuturnam macerationem in aqua frigida experior, fibras has eſſe contextum celluloſum, ſiue veſicularem, vaſa maiora et minora inter ſe iungentem, tumque ſuperficiem, oſſi contiguam, eſſe tenuiorem contextum membranaceum, quam quae piam matrem reſpiciţ. Idem in dura matre Elephantis, quibusdam in locis digitum fere craſſa inuenio. Hinc nulla eſt ſuſpicio, membranam deſcriptam, homogeneam, eſſe habendam pro altera harum duplicatura, quia longe alius eſt faciei, et in ſiniſtro latere deficit, quod vt certius appareat, eodem latere, quo hanc ab interna ſuper-

ſuperficie, ibidem duplicaturam durae matris a ſe inuicem ſeparaui. Reſtat ergo dubium, undenam ſcilicet illa membrana? an eſt pars peculiaris in hoc homine connata? an vero a ſumma inflammatione ſuperficies interna ſic integra ſeceſſit, vt membranam mentiatur, vti a cute cuticula? an auĉto motu, vaſa nimium dilatata craſſiores humores transmiſerunt ſeroſos, qui collecti adhaeſerunt internae durae matris ſuperficiei, et borea et frigore ſuperueniente, quaſi in vnum concreti hanc formaverunt? vti videmus, quosdam humores in lagenis, non rite occluſis inprimis, contrahere in ſuperiore parte mucaginem, quae abit in pelliculam. Sed hic datur aëri acceſſus: in rite clauſis phaenomenon idem obſeruatur, patet in omphacio: ſed particulae ibidem conſtituentes ſunt ſolidae, tales ſunt et vltimae fluidorum. An docet hoc in dextro ſolum latere praeſentia, abſentia in ſiniſtro? an ſuperficies cerebrum ſpectans holoſerici inſtar villoſa flocculis rubris tenuibus, facile deciduis, idem affirmat?

Obſeruatio ſecunda.

In Noſocomio Maritimo Petropolitano Miles claſſiarius, qui ibidem propter morbum epilepticum, per annos hospes fuerat, in ipſo inſultu adeo violento, vt motus ſpaſmodici totius corporis vix per quatuor robuſtos miniſtros retinerentur, ne ſe de lecto deiiceret, me praeſente, vnico momento, quaſi fulmine tactus, inter horrendas intorſiones, exſpirat.

Duas poſt mortem horas aperio cadauer, in morte faciei lineamentis etiam inordinati motus effecta declarans, nusquam tamen liuidum, ſpuma adhuc os obſi-

dente. Inuenio viſcera thoracis et abdominis ſaniſſima, excepto, quod pulmo ſiniſter, hinc inde leuiter cohaerebat, concretus cum membrana thoracem ſuccingente. Diſſecta autem, more ſolito, ſupra aures in orbem cranii parte ſuperiore, dum ſcutum oſſeum conor auferre, inueni illud cum dura matre cohaerere ita, vt vix ſine dilaceratione huius, adhibito eleuatorio, ſumma vi ſeparauerim. In ablato autem apparebant diſrupta multa et diſperſa tubercula, duriuscula, granis hordei ſimillima, colore flaua, reſpondentia illis, quae in dura matre vaga locabantur, aggregata magis circa ſinum longitudinalem. Preſſa haec tubercula, in vtrisque eructabant flaueſcentem, craſſum, humorem, fere materiem ſolidam prae ſe ferentem, qui inter digitos preſſus tenax extenſilis his non adhaerebat; vaſa per duram matrem decurrentia, conſpicua, ſanguine replebantur. Incidi in orbem, ad marginem oſſis diſſecti, duram matrem, quibusdam in locis triplo et quadruplo, quam caeterum ſolet, craſſiorem et magis reſiſtentem; dum vero hanc a pia elevare tento, deprehendi cum eadem iterum cohaerere adeo firmiter, vt cultello opus habuerim ad diſſecandam intermediam ſubſtantiam filamentoſam, quaſi telam celluloſam videres, ſed induratam adeo, vt ſcalpelli aciei cartilaginis inſtar reſiſteret, eo magis, quo propius ad ſinum longitudinalem accedebat, vbi firmiſſime inter ſe meninges per vinculum hoc iungebantur. Erat autem intermedium hoc tegmen veſiculare infarctum materie flaveſcente, quibusdam in locis plane exſiccata et dura, in aliis ſmegmatis inſtar craſſa, quae tenax, albuminis oui

inſtar

inſtar ductilis erat. In baſi cranii autem a pia matre libera erat dura, oſſi tam firmiter adhaerens, vt vix tenaculis inde auelli poſſet. Ibidem autem arachnoidea intermedia tunica, ac vsquam conſpicua erat, idque propter humorem, ac in ſuperiore parte tenacem, flaueſcentem, magis dilutum tamen, quo quaſi hydropica erat.

Cortex cerebri vniuerſus multum indurabatur, multis in locis ſcirrhoſus, in aliis quaſi cartilagineus erat, id iterum eo magis, quo propior erat vertici. Subſtantia autem medullaris apparebat naturalis et ſana. Humor in ventriculis paucus erat ſubrubello-flaueſcens, ac ſerum ſanguinis recens, dilutus. Sapor huius, vti et illius, qui in baſi cranii inueniebatur, erat nauſeoſus, leviter ſalſus, vt eſt ſeri ſanguinis, fatuus. Glandula pinealis dura et quaſi ſcirrhoſa erat. Cerebellum liberum, ſanum, ſed valde ſiccum erat, ſana erat oblongata medulla, et ſpinalis; leuiter autem hydropica erat ibidem arachnoidea humore ſmegmatico flauescente. Sinus omnes durae matris pleni erant ſanguine atro venoſo, ſano, vt ſolet inueniri poſt mortem, ipſi autem duri et incraſſati. Homo hic quadragenarius circiter, inter paroxyſmos ſanus ſed ſemifatuus et triſtis, caeterum robuſtus, fuerat. Triſtes autem, ſtolidos, et meticuloſos, fere ſemper animaduertimus epilepticos, iam aetate prouectos, quod neque miramur, ſi reſpicimus ad validos neruorum motus, quibus corpus concutitur, et ob malum comitiale mentis triſtitiam, atque inſultus recidiuini metum. Si vero reſpicimus ad functionem corticis cerebri, non procul quaerenda eſt morbi recidiuini, certis, ſed inordina-

tis paroxysmis, ratio; ſanguis quippe per vaſa ſemiobſtructa et ſemiconcreta motus, eiusdem impetus in concreta, vnde noua quotidie naſcuntur obſtacula, non continuo iugis fluxu, ſed interrupto, ſecernit ſpiritus dictos nervoſos, in medullari ſubſtantia protinus elaborandos, vnde nerui iam defectum, iam vero nimiam ſubtiliſſimi liquidi abundantiam, paſſi ſunt. Qualem vero faciat in repleta caeterum vaſa minima comprehenſibilis guttula liquidi impetum et motum, dudum alias docuere experimenta hydraulica. *

An interim non mirum eſt, cum actio neruorum violentiſſima toties in vita inuerterit, et ſuſpenſum tenuerit ſanguinis per cor et vaſa motum, et reſpirationem quaſi oppreſſerit, quod neque in cordis ventriculis, ſinubus, aut auriculis, neque in arteria pulmonali, aut caeteris vaſis, inuentum ſit vllum omnino, quod polypi indicium aut originem indicabat? vt quidem e contrario ſanguis in venis, ſinubus, auriculis, ventriculis cordis, in vaſis pulmonalibus, iam quidem coagulatus, nullo vero modo concretus, apparuerit.

Tandem ſubſtantia inter duram et piam matrem flaueſcens, incraſſata, diſſecanda, celluloſa apparens, an non videtur arachnoidea tunica, humore ſeroſo hydropica, cum vtraque meninge concreta, concretione has iungens? an non inde indurata, quod reſorpto tenuiore, ſuperſtes humidum in ſolidum coiuerit, ſenſim exſiccatum, vti multa exſtant, tam extra corpus, quam intra, exempla? an hoc non affirmat eadem tunica, laxior in baſi

* Vid. diſſert. noſtr. de Impetu Hipp. dicto ad §. 274.

baſi cranii ſimili humore, ſed magis diluto grauida, ob ſpatium amplius, non tam cito exſiccanda et induranda. Denique, an humor ſeroſus non depoſitus fuit, per vltima vaſa exhalantia, dilatatis eorum orificiis ab aucto impulſu eadem quantitate ſanguinis, impetu ex reſiſtentia in obſtructis et concretis vaſculis interim aucto? Tubercula autem hordei ſimillima, in ablato cranio conſpicua videntur obſtructa a tenaci toties memorato humore vaſcula, aeque ac in dura matre.

Obſeruatio tertia.

Cerebrum ipſum obnoxium eſſe inflammationibus, ſatis ſuperque docent eiuſdem morbi acuti. Exitum autem inflammationis in ſuppurationem et gangraenam ibidem, nuperrime didici in homine, mortuo in via publica inuento, in quo thoracis viſcera et abdominis ita ſana fuerunt, vt nullum ſignum ſubitaneae mortis exhiberent. Ventriculus autem inter reliqua ingeſta ſpiritu vini repletus, eiuſdem odorem ſpirabat. Aperto capite, eleuataque inciſa dura matre, lobus cerebri anterior vterque extremo ſuo, quo ſupra orbitam exporrectus ad frontem, criſtae galli dicto proceſſui medio ex oſſe cribroſo aſſurgenti, a latere adiacet, ita computruerat, in mucum flauum foetidum verſo cortice, vt vaſcula piae matris libera in illo fluctuarent, neque ſubſtantia ſe ipſam ſuſtineret; ichor autem foetens ſupra duram matrem; os tegentem, effuſus erat, cui vnica et altera guttula puris, non male cocti, innatabat. Sub lobis autem cerebri poſterioribus eleuatis, conſpiciebatur ſupra tenſam duram matrem, quae cerebrum a cerebello diſtinguit,

guit, vtrimque copia humoris tenuis, ichoroſi, ſubrubello-flaueſcentis, foetidi, vnicae menſuram, vel paulo plus, referentis. Pia mater autem erat integerrima, ſed parum in dextro lobo a cortice eleuata; corticalis autem ſubſtantia ipſa, ſub hac eleuatione piae matris, leviter protuberabat in mucronem obtuſum, et male affecta flaueſcebat.

In diſſecto porro cerebro nihil inueni praeternaturale aut morboſum. Cerebellum itidem erat perfecte ſanum. An homo hic obnoxius fuerit morbo neruoſo, epilepſiae, vertiginibus? incertum eſt, quoniam, in pauperis ignoti vitae ante-actae aut morbi genus nulla ſuperfuit inueſtigatio.

An cauſa mortis ſubitaneae fuit rupta in anteriore cerebri lobo vomica? an ebrietas motum ſanguinis augendo accelerauit rupturam? An ichor in parte poſteriore capitis ſupra duram matrem inuentus ſubrubello-flaveſcens, integra pia matre, ibidem emiſſus eſt per oſcula vaſorum exhalantium dilatata? an reſorptione per venulas minimas tenuiſſimi ſtagnando computruit craſſior factus, humor reliquus? An demum ex vomica anteriore materies morboſa per vaſa reſorpta minima, per ſenſim maiora recepta, dein iterum per decreſcentia minora et minima delata ad poſteriora, ibidem eſt depoſita.

De abſceſſibus intra cranium, tam intra membranas, quam ventriculos cerebri, ac in eiuſdem ſubſtantia ipſa, ortis, proſtant exempla apud plurimos auctores Lazarus Riuerius (*) de tribus, in diuerſis notatis abſceſſibus

(*) Obſerua. 38.

fibus memorat, inter duram matrem et cranium ortis. Intra duram et piam matrem vidit Stalpartus vander Wiel (1) et in cerebri ventriculis. In ipsa cerebri substantia apparuere Tulpio (2) Bartholino (3) Botio (4). Neque ignorauit Hippocrates, pronunciat enim ὁκοσοισιν ἀν' σφακελιθῆ ὁ ἐγκέφαλος, ἐν τρισὶν ἡμέρεσιν ἀπὸ λυυταϛ, ἢν δὲ ταὐτας διαφὐγωσιν, ὑγιέες γίνονταϛ. (5).

Obseruatio quarta.

Pericardio destituta qnaedam animalia memorantur apud Auctores. Columbus autem sese dissecuisse Romae in Academia Discipulum affirmat, cui deerat pericardium, hic saepe in vita laborauerat syncope, et eidem simili morbo moriebatur (6). Ex hac historia, et quia viderat sine eodem valentem canem, pericardium inutile audacter pronunciauit Medicus ordinis parisini Lamy (7). Et Cel. Du Vernoi oblatum sibi hunc defectum scribit in dissectione Elephantis (8). Si addidissent bene meriti Viri, qua ratione ergo vasa ad pulmones tetenderint arteriosa ex corde, et quomodo venae inde reduces ad cordis sinum pulmonalem sese habuerint, vt cor liberum foret suspensum inter pulmones, forsan illis herbam porrigerem, iam ex argumentis et autopsia habeo, quod oppono. Vsus, quos praestant pericardium et mediastina, quoties perpendimus, vix illis posse carere animal, concludimus. Praeterquam enim quod cor a contactu pulmonum et cellulosae vtriusque mediastini defendit

(1) Cent. I. Ob. XI. (2) Obs. L. IV. C. I. (3) Cent. II. Hist. 34
(4) De affect. omiss. cap. 3. (5) Aph. 50. Sect. VII. Coac. praen. c. II. aph. XI.
(6) De Re Anat. Lib. XV. (7) Discours Anatomiq. p. III. a Paris 1685.
(8) Comm. petrop. Tom. II. p. 289.

pericardium, ne cum illis concreſcat, quodque proprium humidum intra ſe coercens, aditum illi, qui in pectore ſaepe continetur, humori intercludit, vt ſunt ſanguis, pus, ichor, et ſerum hydropicum, atque ita cor cum ſuis vaſis in rore humido ſouet, mulcet, et mollit, atque balneo calido, humido, concretionem cum corde impedit: cor a ſterno et dorſi vertebris duris ita remouet, vt, dum mouetur, haec non attingat. Sed inprimis vaſa cordis ambiens, nectendo firmat ita ſuſpenſa, vt haec, neque cor ipſum, intra pericardium vndequaque liberum, inuerti, intorqueri, ſitu mutari omnino poſſint, et tamen actiones liberrimas exercere: idque in omni motu corporis, concuſſu, ſaltu, inuerſione, capiti inſiſtentia. Tam mire ideo fabricatum eſt pericardium, vt vaſa corde egreſſa mutuent ab ipſa eius extima et tenuiſſima membrana propagines. Sunt hae arteriae binae, pulmonalis ſcilicet et aorta, venae cauae ambae, et pulmonales; ab altera parte pulmonum membrana extima ſuos largitur ſupra eadem vaſa proceſſus, vbi illa ſunt extra pericardium, exceptis venis cauis et aorta. Ad concurſum autem ſupra vaſa, quae extima eſt pulmonum membrana, quae intima cordis propago, in ambitum expanſae ambae iunguntur inter ſe per telam celluloſam intermediam, atque a vaſis ſecedentes formant duplicatione ſaccum, cauum, conoideum non exquiſite, quia ſectus horizontaliter circulum non facit perfectum, cor et eius vaſa intus continens, ab aliis ſeparans (1). Saccus hic ex

(1) De origine Pericardii vid. diſſertat. noſtr. de perſpirat Hippocrat. ad §. 142 et ſeqq.

ex lata et orbiculari basi ad diaphragma surgit in apicem obtusum, firmissime tensus, haud ita laxus percipiendus, ac in aperto thorace conspicitur in cadauere: docet id tensio diaphragmatis, pectoris plenitudo, mediastini in eleuando sterno dissecti prior integritas. Sunt enim ambo mediastina, dorsale scilicet et pectorale, vtriusque sacci membranae thoracem succingentis ad dorsum et sternum applicati exsurgentia conniuens, per tegmen cellulosum iuncta, in pericardii membranam exteriorem iterum extensa, quae in viuo homine sano, et in integro cadauere cauum non habent, et vix dimetiendam distantiam. Tenditur ergo pericardium ab opposito latere, per mediastina; inferne per assurgentem basin orbicularem, quae in conuexam curuatur et se diaphragmati accommodans declinat retrorsum. Sursum vero iugulum versus adscendens terminatur cono obtuso ad divisionem primam tracheae, et ante hanc, et ibidem extensum tenetur per aortam, quam emittit a sinistro, et cauam descendentem venam, quam recipit a latere dextro, paulo posteriora versus per exeuntem arteriam pulmonalem, et redeuntes duas magnas venas, quae sinum sinistrum, seu potius in homine posteriorem, expansae constituunt. Vena caua autem ex abdomine assurgens perforat diaphragma in parte tendinosa dextra, in distantia circiter media vertebras inter et sternum, atque ingreditur pericardium, secum sumens partem membranae, quae conuexam tendinis septi medii superficiem succingit, vaginae instar ambientem, super se tensam, atque deinde in sinum venosum anteriorem dilata-

tur. Eſt iterum haec membrana venas cauas ambiens cordis externae continuatio. Per haec vaſa cor cum pericardio nectitur, per propriam extenſam et tenſam membranam, et ſimul internam ſuperficiem pericardii conſtituit: hinc cordis baſis immota facit, quod inuerti torqueri, aut loco moueri nequeat, etſi reliquo ſuo corpore ſit liberrimum. Praeterea omnia vaſa, quae cor ita nectunt, ſunt intra pericardium tenſa, libera, ſuſpenſa quaſi in ſacello vacuo, ſecus ac in aliis corporis partibus, vbi inter membranas decurrentia ligantur. Tenſum ergo cauum hoc tertium, arcens omnia peregrina, facit inſuper, vt pulmones nunquam cor attingere, aut premere poſſint, illis reſiſtens. Tolle ergo imaginatione hoc propugnaculum, quid quaeſo fiet de corde? Certe expoſitum erit omni vi, qua pulmones nudum hoc premunt, non ſemper eadem, ſed viciſſitudine reſpirationis varia, neque tendentur ſuſpenſa vaſa, quae iam baſin firmant: trahent ergo pulmones et partes, ad quas tendunt, ab iiſdem retracta; denique orietur totius machinae confuſio. Hinc potius ſtatuo, cum Excellentiſſimo Ioanni Maria Lanciſio (1), cum ſine corde nullum naſcatur animal, haud adeo vnquam eſſe Naturam nouercam, vt illud ſuo inuolucro priuet, cum et idem in erinaceo inuenerit, negante ibidem eius praeſentiam Blaſio (2) et Pyero (3).

Ratio autem erroris vtplurimum putatur, pericardii cum corde concretio, cuius multa proſtant exempla, et quidem tunc homines iſti ante mortem vtplurimum paſſi fuerunt enormes cordis palpitationes et anxietates. Nec

(1) In oper. poſth. de corde et aneuriſmat. (2) Anat. animal pag. 65.
(3) Paraeg. Anat. pag. 174.

Nec mirum! cum iam destitutum hoc resistente propugnaculo cor, vim omnem pulmonis respirantis experitur, nec adeo facile ipsum mouetur, balneo vaporis demulcitum et emollitum. Multae apud Practicos et Obseruatores prostant historiae, collectionem habet Pyërus (1), et dicit Lancisius, malum hoc in tabidis et asthmate vexatis esse frequentius, obstructis ostiolis, quae intra pericardium humorem stillant (2). Propria autem manu delineatam figuram dedit Cantius (3). Ipse in fine anni praeteriti dissecui cadauer virile, in quo inueni cor per totam suam superficiem cum interno pericardio cohaerere per oblonga, tenuia, splendentia, albicantia filamenta, quae membranosa quasi, adeo tenera erant, vt ad eleuationem incisi pericardii facile dilacerarentur, erant aliis alia longiora, longissima digitum extensum adaequabant, ad ventriculos, sinus, auriculas conspicua, crassitie varia; humor vix in pericardio conspicuus, et, qui paucus aderat, multum incrassatus. Paucos postea dies in viri robusti, sed emaciati cadauere, inuenio cor, sinus, auriculas, cum pericardio interno ita concreta, vt a dissecto iuxta longitudinem eodem auriculae et sinus, vti et pars superior cordis ventriculi dextri facile digiti apice separarentur; inferne vero, vbi diaphragmatis parti neurodi incumbebat, et ad apicem, vbi latus pectoris sinistrum ferit, adhaerebat cordis substantia firmiter adeo, vt cultelli ope ab incrassato pericardio dissecare illam debuerim. Erat autem substantia intermedia connectens vera cellulosa, quod pulcherrime apparebat extendendo

(1) Pareng. III. p. 198. (2) De subitan. mortib. obseru. III. p. 225. (3) Impr. Anat. Tab. IV. 10. 60.

pericardium, ſed tenax, qualem ſemper obſeruamus, ſi pulmones cum membrana coſtas ſuccingente concretos ab ea ſeparamus, de qua et methodo concreſcendi poſtea ago (1). Erat autem poſt ſeparationem cor, inprimis ad mucronem, et pericardium internum, a diſrupto hoc vinculo, ſcabrum et hirtum.

Vtriusque inciſi cadaueris ignota fuit vitae et morbi ratio, vtpote quae ſaeuiente in fine anni praeteriti frigore intenſiſſimo adeo, vt thermometrum Fahrenheitianum 30 et 32 gradum infra o iudicaret, mortua fuere in via publica inuenta.

Dum iam nactus eram occaſionem examinaui, quid ad externam faciem exhiberet pericardii ſuperficies, vt abſentiam ſuam declararet, cordis extimam membranam mentita, ſed hercule craſſus adeo apparebat in hiſce error, ad figuram cordis nudati fingendam, vt ne quidem lanionem, multo minus Anatomicum deciperet, *inprimis* cum margo pulmonum in vtroque cadauere *liber erat.* Nam licet vltimi memorati viri cadauer valde eſſet emaciatum, et vix celluloſa inter mediaſtini duplicaturam quid pingue haberet, et ipſa pericardii membrana tam arcte cum corde concreta foret, nihil tamen externe apparebat, de baſi cordis eiusque appendiculis et vaſis maioribus. Praeterea ſegmenta pleurae, quae mediaſtino diſſecto et ſterno eleuato, pericardio adhaerent, et magnum Lanciſium peſſime fefellerunt ſpecie neruorum in explicatione Tabularum Euſtachii (2), liquidiſſime indicabant, quod oculis occurrebat, eſſe cor continens pericardium: hinc credo, qui pericardii abſentiam ex autopſia, non alios exſcribendo aſſeclae,

(1) Obſeru. 5. (2) Tab. IX. 22-28 22-29½.

ſeclae, ponunt, meliore cum ratione errare, quoties nempe diſſecuerunt cadauera, quorum pulmonum concaua ſuperficies plane concreta erat cum pericardio, et tum vt plurimum cum concaua thoracis, ſua conuexitate. Praeter etenim caſum, quem obſeruatione quinta deſcribo, occurrit nuperrime in diſſecto cadaueris pectore, ſterno valde gracili eleuato, vterque pulmo arctiſſime cum pericardio et pleura concretus, vt nullo modo collapſus, plenitudinem thoracis, et aëris fictitii abſentiam pulcherrime declararet. Apparebat hic, quantilla ſit diſtantia intermedia decernentis mediaſtini, adeo quidem vt pulmo pulmonem fere attingeret limbo ſuo, quo alterum a iugulo ad infimam partem ſterni reſpicit. Cum autem in tali ſeparatione adhibetur cultellus, et facile laeditur membrana pericardii pulmoni accreta, inprimis in eleuando ſterno itidem concreto, ſi forte tota haec deſcinditur, et cum pulmonibus, quibus firmiſſime adhaeret, eleuatur, reuera apparet cor quaſi inter politiſſimam ſuperficiem pulmonum nudum et liberum. Prudentis tamen tunc eſt in rem vlterius inquirere, et, quomodo vaſa ſeſe ad pulmones et reliquum corpus habeant, examinare et deſcribere, antequam concludat.

Et hic caſus videtur, qui fefellit celeberrimum Du Vernoi in elephante, vbi error eo craſſior, quo bellua maior; nam licet in aliis bene meritus Vir putet, eſſe incredibile, lapſum poſſe committi in re tam euidenti et facili, ad quam oculis tantum opus eſt apertis, vt eſt exiſtentia pericardii et mediaſtini, (1) credo tamen et

(1) Coment. Petrop. Tom. II pag. 289.

et confido, illum miſere cecidiſſe, ſaltem a ſtabili via deflexit, cum modo abſentiam ponit, nec vllam addit deſcriptionem, qua ratione ſe partes habuerint. Anatomicus non oculis tantum, ſed et manubus opus habet, quas ſi admouiſſet, haud dubito, quin inueniſſet, quod ipſe ego in diſſectione Elephantis, cui iam per quinque menſes incubui, deprehenderim. Scilicet in tanto animali, quod fateor non tam facile, ac hominis cadauer, tractatur, inueni pulmones vndequaque pleurae adhaerere per tenaciſſimam telam celluloſam, et pericardii toti ambitui et ſuperficiei externae, per eandem contiguos; cum autem vaſtum hoc animal, quantum congelatum, ſiniſtro lateri incumbens per quadraginta et plures homines ad id mandatos, nullo modo vel digitum latum loco moueri poſſet, detracta cute, coſtae ad articulationem cum vertebris, et ſterno diſſectae ablatae ſunt in latere dextro, ſicque totus pulmo, vna cum corde, trachea, et vaſis maioribus, inferne cum diaphragmate diſſecto, ſimul thorace exemtus eſt. Haec omnia dum accuratius repetito examine luſtro, inueni omnia inter ſe concreta, ſcilicet, ablatis coſtis, ſeparaui et ſeparare ab aliis curaui pleuram vna cum adhaerentibus pulmonibus, quos dum a pericardio abſtuli, vidi hoc animalium more, quae prona terram ſpectant, per proceſſum oblongum, acutum iungi cum diaphragmate, ita vt cor perpendiculariter ſuſpendatur in hoc, vt in caeteris quadrupedibus, inter pulmones intra pericardium, atque per hoc tranſeuntia vaſa maiora illud ſuſpenſum et tenſum teneant.

In

In aperto autem pericardio, vt erat craſſities notabilis, ita admiranda ſtructura eadem apparuit, quam antea in opuſculo de Perſpiratione Hippocratica deſcripſi.* Et quidem cum cor vna cum pericardio, dum reliqua viſcera de die examino, in aqua pura toties renouata, per quatuor et vltra menſes ſeruaſſem, ab iſta maceratione facillima fuit inquiſitio. Separaui igitur membranam cordis extimam a ſubiecta pinguetudine ad baſin, deinde ab arteria pulmonali ſupra celluloſam vsque, quo loco reflexa in ambitu pericardii membranam internam conſtituit. Separaui itidem membranam a pulmonibus datam, ab altero arteriae latere ad illum vsque ambitum, vbi reflexa membranam cordis externam conſtituit, ſeparaui deinde has membranas, pericardium conſtituentes, in illo ipſo a ſe inuicem. Apparuit tunc, et iucundiſſimo ſpectaculo Auditoribus exhibui, membrana cordis, arteriae intra pericardium, pericardii interna, vna continua, ſed tenera adeo et tenuis, vt tota pelluceret, poſtquam arte et patientia ab omni adhaerente flocculenta materie interne liberaſſem; imo vero tenuiorem nunquam vidi in homine, aut cuiuscunque generis animali, quod ad hunc ſcopum incidi; multa autem diuerſi generis quadrupedum, piscium amphibiorum, ea diſſecui intentione, vt vera fabrica appareret, tam cum Magno Auunculo Hermanno Boerhaaue, cum praelectionem ſuam de corde meditaretur, quam poſtea, ad hoc incitatus, ſoluis. Apparuit eadem encheireſi membrana pulmonum, arteriae extra pericardium, pericardii externa, vna continua, tenera, pellucens, craſ-

* ad § 142. et ſeqq.

fior tamen, quam interna. Apparuit tandem maxima pericardii craſſities ab intermedia filamentoſa tenace ſubſtantia, quae rite examinata, leui extenſione, inflatione, ſeparatione, conſpiciebatur vera et vnica celluloſa, per quam vaſa et nerui, ad nudum oculum conſpicua, decurrebant. Quae ſupra arteriam apparuerunt, eadem ſupra venas pulmonales vera ſunt, vt repetere experimenta non opus ſit verbis. Haec eſt vera in Elephante, vt in aliis animantibus pericardii ortus hiſtoria, per hoc vaſa tranſeunt, et tenſa ipſa pericardium extendunt. Concretio autem his viſceribus familiaris, in omnibus forſitan Elepantibus obtinet, qui in ſtabulis ſeruantur et aluntur, quoniam motum moli corporis appropriatum neutiquam exercere poſſunt: cum autem eadem in homine ſaepe obtineat, puto cauſam erroris, abſentiae ſcilicet pericardii declaratae, ſatis eſſe euidentem. Quod vero ad Pariſini Medici ſententiam attinet, eſſe ſcilicet hoc inuolucrum inutile, nimia volatilitate reor pronunciatam, cum forſitan, vt in toto rerum vniuerſo, vix in corpore humano, aliquid aut ſuperfluum aut inutile demonſtraturus ſit Phyſicus.

Obſeruatio quinta.

Omnia viſcera abdominis et thoracis vidi in cadauere Viri in Noſocomio maritimo Petropolitano lenta febre enecti, ita inter ſe concreta, ſuo loco tamen diſpoſita, vt nullum plane liberum foret. Omentum infra vmbilicum extenſum, ſuperne cum peritoneo, inferne cum inteſtinis, ſeſe vt ſolet inter gyros illorum ad certam altitudinem inſinuans, et ad latera; gyri Inteſtinorum inter ſe, flexurae Meſenterii inter ſe, firmiter erant con-

concreta. Hepar conuexa ſua tota ſupeficie, etiam illa parte, qua ceterum liberum, diaphragma per reflexam ſuam membranam concauum tangit. Lien itidem parte ſua ſuprema cum diaphragmate, poſteriore cum peritoneo, anteriore ſua concaua cum fundo ventriculi firmiſſime cohaerebant. Veſica vrinaria in hoc corpore magna, ſupra os pubis extenſa ad mediam inter pubem et vmbilicum altitudinem, ad latera ſua, ſed inprimis ad fundum, erat iuncta cum ſuperincumbentibus inteſtinis. Colon inteſtinis et lumbis vndequaque erat accretum. In pectore Pulmones cum membrana thoracem ſuccingente, vbi illa ſupra coſtas et conuexum diaphragma extenditur, et cum pericardio, cohaerebant firmiſſime. Pulmonem, dextrum vomica obſidebat, hinc in ſaccum pure plenum fere totum converſum. Cor interim in pericardio liberum vna cum ſuis vaſis copiae humoris ſubrubello flaueſcentis innatabat. Cranio aperto meninges, disiunctae et cerebri ventriculi naturaliter cauitate diſtincti, cetera ſana erant.

Omnes autem iſtae concretiones erant (vti tunc temporis Auditoribus exhibui) per membranas extenſas, quae, ex duplicatura concretae, tenacula efficiebant ſplendentia, ratione partium et diſtantiae concretorum maiora, minoraue, qualia fere cernimus colon inteſtinum ad peritoneum coniungere, eiidem inſerta, in illud abeuntia, et naturaliter ſuſpenſum retinentia, vbi flexuris ſuis ad et deſcendit. Inter has duplicaturas, dum deſcindebantur, ſemper apparebat contextus reticularis ſeu cellulоſus, qualem et ſemper inuenimus inter concretum cum membrana thoracis interna pulmonem, dum ab illa hunc

ſeparamus. Cum iam antea de concretione partium locutus ſum, et notaui tunc intermediam fuiſſe talem cellulosam, quae in ſtatu naturali abeſt, non poſſum, quin de eius ortu ſententiam expono. Inter partes non concretas caua dari impleta ſana ſpiritu in opuſculo de Perſpiratione ex Hippocrate elucidaui antea et experimentis firmaui, et morboſa ichore repleri illa, eodem notante. Quoties autem praeceſſit inflammatio valida, toties fere ſemper poſtea concreſcunt inter ſe, vt vulnera docent, pleuritis et peripneumonia, hepatitis, aliique morbi acuti: adeo quidem vt ex centenis forſitan vix vnus inueniendus, cui pulmo non cohaeret thoraci interno, poſt ſaeuam eiusdem aut pleurae inflammationem, ſiue a cauſa interna ſiue a vulnere. Impedita transpiratione, a ficcitate hoc fieri putant Auctores, et ipſe credidi. Dum vero toties in ſeparatione concretorum filamenta iſta occurunt, ſuperficie caeterum polita, animum ſubiit indagatio de horum ortu, quem talem puto. Dum inflammatio in quodam loco adeſt, oritur ibidem reſiſtentia prementi a tergo ſanguini ratione obſtructionis, hinc illius vis et impetus augetur, inde oritur febris, vnde non obſtructa vaſa maiorem itidem vim coguntur ſuſtinere, et dato tempore citius transmittere ſanguinem: augetur ergo circulatio, augetur tranſpiratio per vaſa non obſtructa; auctis vero impetu et circulatione, humores magis premuntur intra dilatata inde vaſa, hinc vel noua obſtructio, vel alieni et quidem ſerie craſſioris transmiſſio, vt quae ſpiritum prius, lympham, quae lympham antea, ſerum recipiant et transmittant: imo vero manente eadem vi,

quae

quae ſpiritum prius, iam ſerum, et ſanguinem; vt euidens eſt in oculo inflammato. Pulmo ergo, vel membrana interna thoracis, vel ambo ſimul, quoties inflammantur, atque mox expoſita ibidem obtinent, inter vtramque ſuperficiem, non concretam, deponitur humor, quam ſpiritus ſiue halitus, in ſanis replens, craſſior, qui ſtagnando, et reſorptu tenuioris per venulas diametro haud dilatatas, patulas, magis plaſticus redditur, atque motu continuo pectoris in filamenta ductus, concauum cum conuexo coniungit. Ars naturam imitando id efficit glutine; patet ſi duo ligna, eodem iuncta, a ſe invicem diſtrahuntur: tum etenim hoc in fila ductile rumpitur. Autopſia vero in recens natis, maxime ante maturitatem vtero excluſis, rem elucidat. In illis etenim, quo loco ſub cute in adulto celluloſa ſubſtantia ſolidior, extenſilis inuenienda, ibidem apparet inter loculos pingui, ſeros ſmegma mucoſum ductile in filamenta eo tenuius, quo propius ab origine diſtat animal. Hoc in vitulis vaccae vtero exſciſſis, hoc in agnis ex ouibus exemtis, hoc in catulis canum ante partum examinatis, toties vidi, hoc expertus ſum in abortubus humanis. Vnde vix dubito, quin ipſa ſubſtantia celluloſa, ſiue veſicularis, quae ſub vario nomine in corpore occurrit, perperam membrana dicta, ortum ſuum debet iſti ſmegmati naturaliter ſecreto, eo firmior, quia inter partes reliquas ſeparatas, vbi celluloſa tela ingreditur, adeſt in abortu mucus. Haec ſi arridet hypotheſis tum vti in thorace, ita in reliquis apparet partium concretio, qualem in cerebro, pericardio,

* Obſerv. 2da obſerv. 4ta.

mox exhibui, et iam in omnibus fere viſceribus enarro, cuius cauſa tum facile apparet, ſi reſpiciamus ad lentam viſciditatem, quam humores induxerunt lenta et diuturna febre intermittente, quae inſuper ortum duxerat ex morbo acuto, peruerſa diaeta, atque abuſu potus ſpirituoſi.

DESCRIP-

DESCRIPTIONES RARIORVM PLANTARVM.

AVCTORE
Stephano Kraſcheninnikow.

DE PERSICARIA *foliis ouatis, glabris.*

Tab. XIII.

Quinque Perſicariae ſpecies rariores in Sibiria obſeruatae ſunt: Perſicaria ſcil. montana foliis longioribus et anguſtioribus. Perſicaria floribus octandris trigynis, foliorum lanceolatorum vaginis hirſutis: Perſicaria caule in latum diffuſiſſimo, foliis lanceolatis: Perſicaria ſpicis longis numeroſiſſimis, vaginis integris, floribus pentandris trigynis, et Perſicaria foliis ouatis, vtrinque incanis: quarum primam *B.* Ammanus in *deſcr. Stirp. rarior. Ruth.* propoſuit, omnes autem Cel. Gmelin in T. III. *Fl. Sib.* breui edendo recenſuit. Sexta erit haec noſtra, quae quanquam non in Sibiria, ſed in Sinarum regno prouenit, Sibiricis tamen iure accenſeri poteſt; cum regiones prouentu eius celebres, borealem dicti imperii partem, conſequenter Sibiriae finitimam, conſtituant.

Caulis huius plantae a ſeſquipede ad duos pedes altus eſt; teres, cauus, glaber, in planta iuniore pallide viridis, ſub tempus floreſcentiae, praecipue infra, rubro colore tinctus, crebris geniculis diſtinctus, ad exortum procumbens, cetera erectus, ab imo ad ſummum ramoſus, ramis inferioribus rectis, longitudinem ipſius caulis aequantibus.

Folia

Folia in caule numerosa, ad singula scilicet genicula singula, alterna, ouata, petiolata, a sesquiuncia ad duos pollices longa, superiora aliquantum breuiora, vnam scil. vnciam lata, saepe etiam paulo latiora aut angustiora, supra laete viridia, infra albidiora, neruosa, vtrinque glaberrima, ad oras breuibus albentibus duris pilis horrida. Petioli eiusdem cum caule coloris, crassiusculi, glabri, infra conuexi, supra plani, ad oras, aeque ac foliorum margo, pilis asperi, diuersae longitudinis; inferiorum enim foliorum petioli vnciales aut et longiores sunt, reliquorum ad spicam vsque floriferam sensim breuiores, ita vt petioli summorum foliorum tertiam vnciae partem longitudine vix superent.

Internodia pro more vaginis tecta sunt; inferiora ad quartam, superiora ad dimidiam fere longitudinis partem. Vaginae membranaceae transparentes, albae aut rubro colore infectae, creberrimis longitudinalibus neruis distinctae, qui ad 2 et 3 lineas vltra membranas excurrentes, summum earum marginem tenuissime laciniatum efficiunt.

Rami e foliorum alis prodeunt; inferiores maturius, superiores multo serius: qui et ipsi in alios minores, eadem prorsus, qua caulis, ratione diuiduntur et subdiuiduntur.

Folia ramorum et ramulorum, praeter quod minora sunt, eorumque vaginae nihil a caulinis abludunt.

Tam caulis, quam rami et ramuli infra singula genicula crebris exiguis glandulis, viridibus aut rubentibus, absque vllo ordine sparsis, obsiti sunt.

Spe

Spicae floriferae, caules et ramos terminantes, breves, e ſpiculis partialibus, duas et tres lineas longis, tribus aut quatuor, raro pluribus corollis ſeſſilibus onuſtis, componuntur.

Foliola ſingulis ſpiculis ſubiecta, alterno ſitu et forma caulinis ſimilia, ſeſſilia tamen et magis mucronata ſunt: inferiora ſemiunciam, ſumma vix lineam longa. Vaginae etiam foliolorum a caulinis non differunt, niſi quod tota fere internodia inueſtiunt.

Corollae albae, quinquepartitae, duabus laciniis exterioribus breuioribus, latioribus, concauis, in medio dorſo viridibus; tribus interioribus longioribus, anguſtioribus et in extremo ſaepe laceris.

Filamenta ſex, corolla fere dimidio breuiora, vna cum antheris alba.

Germen triquetrum. Styli duo longitudine ſtaminum et ſtigmata capitata candida.

Folia ſicca e viridi coeruleſcunt.

Duo huius Perſicariae exempla e ſeminibus a Rever. Gaubil ſuperiori Patr. Gall. qui Pekini ſunt, et Academiae Scientiarum Petropolitanae honorario Membro, tranſmiſſis, produximus, quae floruerunt ſub initium Novembris, eodem, quo ſata ſunt, anno, fructum autem non muturarunt.

Sinae ex relatione laudati Reu. Gaubil. hac Perſicaria, ad coeruleum pigmentum, vulgo indigo dictum, conficiendum vtuntur.

Icon ſiſtit ramum ex inferioribus naturali magnitudine, cum ſpica florifera corollis non dum bene explicatis.

DE SALVIA

Tab. XIV. *foliis cordatis, obtuſe crenatis, ſpicis Florum nutantibus.*

De natali elegantiſſimae huius plantae loco certo mihi non conſtat: audiui tamen, ſi verum eſt, e ſeminibus a Cl. Gerbero, Florae Tanäenſis Auctore, collectis, in horto noſtro Botanico propagatam eſſe, hinc et in adiacentibus Tanai regionibus creſcere eam probabile eſt.

Altitudine eſt plerumque bipedali. Caulis tetragonus molli et breui lanugine incanus, intus medulla alba farctus, ab imo ad ſummum ramoſus.

Folia radicalia cordato-acuminata, quinque fere vncias longa et quatuor circa baſin lata, ſupra intenſe viridia, ſplendentia, glabra, ſaltim nullis pilis, nudo oculo conſpicuis, obducta, rugoſa, infra neruoſa, aeque ac caulis, molli hirſutia veſtita, margine nonnihil vndulata, obtuſiſſime crenata, petiolata et ad inſertionem petiolorum vtrinque quaſi eroſa. Petioli foliorum longitudine, infra conuexi, albidi, ſupra ſulco excauati, rubentes. Folia caulina oppoſita, quorum inferiora petiolata, reliqua ſeſſilia. Folia petiolata radicalibus ſimilia, latiora tamen et obtuſiora, ſaepe in extremo profunde laciniata, breuioribus petiolis haerentia: ſeſſilia inferiora vix vncialia, cetera quo ſuperiora, eo breuiora ſunt, ita vt ſumma vix 4 lin. ſuperent; omnia tamen cordatam quodammodo figuram affectant.

Rami nudi, e ſingulis foliorum alis ſinguli; inferiores, ex alis ſcilicet petiolatorum foliorum prodeuntes, altitudine a ſummo caule non multum deficiunt et erecti cauli que approximati ſunt: reliqui ad ſummum vsque gra-

gradatim breuiores euadunt et magis in latum diffunduntur.

Summo cauli et ramis ſpicae floriferae nutantes, conſtanter ternae inſident, quarum mediae binis oppoſitis plerumque longiores ſunt. Verticilli ſpicas componentes ſex floribus ſubſeſſilibus, in orbem diſpoſitis, conſtant, quorum ſingulis binae oppoſitae ligulae, calicibus dimidio breuiores, ſubiectae ſunt.

Calix monophyllus tubulatus, breuis, compreſſus, profunde ſtriatus viridis, ſaepe etiam ſtriis rubro colore tinctis conſpicuus, bilabiatus, labio ſuperiori integro, inferiori bidentato.

Corolla pro more ringens, bilabiata. Labium ſuperius longius, erectum, emarginatum, medio dorſo carinatum, violaceum, extra punctis candidis pictum: Inferius trifidum violaceum absque punctulis, lacinia media propendente maiori, ſubrotunda, integra, margine aliquantum ſurſum erecto, hinc concaua; lateralibus minoribus, oblongis, horizonti parallele extantibus.

Filamenta duo intra labium ſuperius deliteſcentia, alba, cum antheris oblongis incumbentibus fuſcis, luteo polline tectis.

Germen quadrifidum. Stylus ſtaminibus multo longior, imo extra labium ſuperius per emarginaturam eius non parum prominens, infra albus, ſupra purpuraſcens, cum ſtigmate bifido acuto, violaceo.

Semina pro more quatuor, nigra.

Floret ſub finem Iunii. Semina maturat Auguſto.

Icon ſiſtit plantam cum vno tantum petiolatorum foliorum pari, hinc naturali paulo humiliorem. Spicae

floriferae ſummae tantum pictae ſunt, reliquae, vt labori pictoris parceretur, absque floribus deſignatae, florum tamen figura ex deſcriptione potius, quam ex icone addiſcenda eſt. A. folium radicale naturali magnitudine.

DE LVNARIA

foliis ellipticis incondite dentatis.

Tab. XV. fig. 1. Hanc b. Stellerus in America ſeptentrionali maturum iam fructum ferentem legit, et ſub nomine Leucoii ſaxatilis foliis ad radicem Turritidis in orbem ſparſis, aſperis, filiquis planis, latis, vtrinque acuminatis, ſeminibus planis, marginatis, nigris, ſequenti modo deſcripſit.

Planta creſcit e ſaxis verſus orientem ad dodrantalem altitudinem. Folia e corona radicis prodeuntia in orbem ſparguntur, glauco-viridia ſunt, punctulis aſpera Turriditis inſtar, ſesquiuncias longa, quinque lineas lata. E medio foliorum caulis dodrantalis ſurgit, in ſummitate valde ramoſus. Singulis ramulis appenſa eſt ſiliqua 6. 7. 8 lineas longa, 3 aut 4 lata, vtrinque acuminata, ſub maturitatem in medio inflexa ſeu contorta, et ſecundum longitudinem falcis inſtar deorſum curuata, biualuis, lutescens ſordide, ſepto intermedio membranaceo, candido, tenuiſſimo, diaphano diſcriminata, cui vtrinque ſemina nigra, orbiculata, plana et marginata adhaereſcunt, quae optime matura collecta ſunt. E mea mente ob ſiliculas curtas, latas, contortas et inflexas, ſingulare meretur genus, aut ſequenti ratione a reliquis Leucoiis diſtinguenda. Leucoium Turritidis folio, ſiliquis curtis, latis, contortis et falcatis, ſemine nigro. Forte Lunariae accenſenda. Haec Stellerus: Nunc plantae in noſtro ſolo

natae

natae deſcriptionem ſubiungemus, partim vt ea, quae inuentori obſeruare non licuit, ſuppleamus: partim vt collatis inter ſe deſcriptionibus appareat, quantum diuerſa ſoli natura vnam eandemque plantam mutare valet.

Magnis ceſpitibus naſcitur, et tota breui albenti hirſutia aſpera eſt.

Radice nititur lignoſa, ſupra pennae columbinae craſſitie, inferiora verſus attenuata, ab vncia ad ſesquipollicem longa, oblique in terram deſcendente, plurimis breuibus, capillaribus fibris per totam longitudinem ſtipata, extra fuſca epidermide obducta, intus vireſcente, nullo notabili odore aut ſapore praedita.

Caules ſesquiunciales, biunciales aut et paulo longiores, erecti aut declinati, teretes, e glauco virentes, tribus aut quatuor foliis veſtiti et vnico aut duobus ramulis floriferis, e foliorum alis prodeuntibus, aucti.

Folia elliptica acuta: radicalia plurima in orbem diſpoſita 8 aut 9 lineas longa, 2 et 3 lata; caulina inferiora paulo breuiora, ſummum vix 3 linearum eſt: omnia acutis et longis dentibus, quaedam tamen pluribus alia paucioribus, plerumque circa medium, inſtructa ſunt.

Flores in ſummo caule et ramis quodammodo vmbellati, tenuiſſimis pediculis ab vna linea ad $1\frac{1}{2}$ longis inſiſtunt, quidam et ſeſſiles ſunt.

Calix tetraphyllus, eluteo viridis, foliolis ouatis, erecto patentibus, deciduis; quorum duo oppoſita concaua et baſi gibba ſunt.

Corolla tetrapetala alba. Petala ſubrotunda, leuiſſime emarginata, magna, plana, patentia, in vngues luteſcentes longitudine calicis deſinunt.

Fi-

Filamenta ſex ſubulata, luteſcentia, quorum duo minora intra concaua calicis foliola deliteſcunt et vtrinque ad baſin nectarifera viridi glandula cinguntur; quatuor maiora erecta, ſingula ſingularum quarundam ſquamarum (forte nectariorum) ſummo dorſo inſiſtunt, quae concavae ſunt et germen circumſtant atque inuoluunt. Antherae cordatae, ſulcatae, erectae, flauae.

Germen oblongum, teres, intra ſquamas, longiora ſtamina ſuſtinentes, abſconditum. Stylus longitudine germinis, perſiſtens. Stigma capitatum.

Silicula elliptica plana, vtrinque acuminata, vix 3 lin. longa, et 1½ lata, ſaepe incurua, non raro etiam recta, ſepto valuis parallelo membranaceo, transparente, albo diuiſa.

Semina exactiſſime ita ſe habent, vt in Lunaria Cel. Linnaeus gen. pl. deſcribit: ſunt enim, vt eiusdem verbis vti liceat, reniformia, compreſſa, marginata, *in* medio ſiliculae poſita, receptaculis filiformibus, ſed brevibus, ſuturis lateralibus inſertis, pendentia, vtrinque tria.

Floruit ſub finem Aprilis. Semina maturauit Iunio. Lunariae coniunxi, quia pleraque eſſentialia cum hoc genere communia habet; ita tamen vt etiam eorum ſententiae faueam, qui forte eam a Lunaria ſeparandam et nouo aliquo nomine appellandam eſſe cenſuerint: cum ſquamae, quae germen circumſtant et maiora ſtamina ſuſtinent, ad eſſentiam generis conſtituendam non minoris momenti aeſtimari poſſe videantur, quam dentes in minoribus Alyſſi ſtaminibus, qui eſſentiam eius generis, Cel. Linnaeo docente, coſtituunt.

Icon

Icon ſiſtit plantam naturali magnitudine. a) Stamina et piſtillum nudo oculo conſpicua, b) eadem lente ſpectata c). Stamen maius ſquamae inſiſtens.

DE THALICTRO.

Caule ramoſo, ramis plerumque heteromallis: Tab. XV. fig. 2.

Haec quoque planta e ſeminibus a b. Stellero a°. 1743 ad Camtſchatcam lectis et tranſmiſſis ſub nomine Thalictri minimi ſeminibus e ſingularibus pediculis quaternis, ſtriatis, enata eſt, de qua tamen ipſe Stellerus nihil praeter nomen memoriae prodidit.

Cum Thalictro ſeminibus triangularibus pendulis, ſtipulis nullis Cel. Gmelini, tam quo ad habitum, quam quo ad foliorum figuram, noſtro multum conuenit; ſemina tamen noſtrae plantae erecta, eorumque figura vt et ramorum diſpoſitio ſuadent, vt ſeparemus.

Pedali eſt plerumque altitudine. Caulis pro plantae ſtatura craſſus, penna ſcilicet anſerina non multum tenuior, teres, glaber, ſtriatus, viridis, folioſus, infra procumbens, cetera erectus aut aſcendens.

Folia caulina alterna, petiolata, duplicato pinnata. Foliola ſubrotunda, plerumque trifida, non raro etiam biſida aut integra, inferiora obtuſa, ſuperiora paulo productiora et acutiora, exigua, $2\frac{1}{2}$ ſcil. lin. vix excendentia, viridia aut in glaucum non nihil vergentia.

Rami e ſingulis foliorum alis ſinguli, longi, aeque ac caulis ramoſi, ramis ſuperioribus nudis, inferioribus vno folio circa mediam longitudinem veſtitis.

Extre-

Extrema caulis et ramorum in pedunculos vnifloros eadem prorsus ratione, qua caulis in ramos, diuaricantur. Foliola pedunculis subiecta plerumque integra, ouata, raro incisa aut trilobata sunt.

Flores ochroleuci, sub initium florescentiae, cum pedunculi breues sunt, racemosi, iisdem posthac indies excrescentibus, in paniculas diffunduntur et versus vnum latus inclinantur. Hos subsequuntur sex, septem et octo siliculae oblongae, striatae, hinc gibbae, inde planae, in apicem acutum reflexum desinentes. Quod Stellerus quatuor tantum semina suae adscribit, id non magni aestimandum est: nam praeter quod numerus eorum variat, facile etiam fieri potuit, vt Stellero matura semina legente non nulla iam decciderent.

Icon sistit ramum ex inferioribus naturali magnitudine. α. est folium radicale.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

DE MOTV NODORVM LVNAE EIVSQVE INCLINATIONIS AD ECLIPTICAM VARIATIONE.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Quanquam luna inter omnia corpora coelestia nobis est proxima, eiusque adeo distantia a terra ope parallaxeos satis notabilis quouis tempore sine sensibili errore assignari potest, quo subsidio astronomia ratione solis ac planetarum, imprimis vero ratione stellarum fixarum etiamnunc caret: tamen motus lunae tantopere est implicatus, totque perturbationibus obnoxius, vt nullo adhuc modo certis legibus circumscribi, atque ope tabularum exacte definiri potuerit. Cum enim quilibet planeta primarius in eodem plano motum suum absoluat, atque per perimetrum ellipsis secundum leges a Keplero obseruatas circa solem circumferatur, ex loco medio ope vnicae aequationis ab excentricitate orbitae pendentis, eius locus verus ad quoduis tempus definiri potest. Luna vero ab ista motus vniformitate maxime recedit: primum enim motum suum non in eadem planitie perficit, et, si quouis tempore planum per centrum terrae ductum concipiatur, in quo via a luna descripta sit sita, non solum intersectio huius plani cum ecliptica, quae linea nodorum appellari solet, continuo mutatur, atque modo antrorsum modo retrorsum procedit, sed etiam ipsa Tab. XVI.

istius plani inclinatio ad eclipticam est variabilis, alioque tempore maior alio minor obseruatur. Tum vero luna in ista mutabili semita neque motu vniformi progreditur, neque eandem a centro terrae seruat distantiam, quae quidem inaequalitas quoque in planetas primarios cadit; verum cum in planetarum orbitis ea puncta, in quibus soli sint vel proximi, vel ab eo maxime remoti, constanter in easdem coeli regiones dirigantur: ita ratione longe diuersa ea puncta orbitae lunaris, quae a terra vel maxime vel minime sunt distita, non quiescunt, neque etiam minimae eius a terra distantiae, quibus locis luna in perigaeo versari dicitur, omnes sint inter se aequales, neque maximae, quibus locis luna in apogaeo versari dicitur, hincque tam distantia perigaei seu apogaei a terra, quam eius locus in coelo est variabilis; cuiusmodi inconstantia in nullo planeta primario deprehenditur. Praeterea quoque motus lunae ab apogaeo vel perigaeo mobili nulli tali constanti legi adstringitur, vti fit in planetis, sed pro eadem ab apogaeo elongatione locus verus a loco medio modo magis modo minus distrepat. Quare cum astronomi ad similitudinem planetarum primariorum lunae motum per ellipsin repraesentare velint, in cuius alterutro foco centrum terrae versetur, non solum positionem huius ellipsis seu lineam apsidum continuo mutare, sed etiam eius magnitudinem et excentricitatem variabilem statuere sunt coacti. Neque vero etiam hoc modo inaequalitatem motus ad vnicam correctionem, quae a sola excentricitate et quantitate fictae istius ellipsis penderet, reuocare licuit, sed plures insuper tabulas aequationum

rum condere oportuit: quae quamuis calculum lunae molestissimum efficiant, tamen haudquaquam cum veritate perfecte consentiunt.

§. 2. Quo magis autem motus lunae perturbatus obseruatur, eo magis theoriam motuum coelestium, quam Vir summus Neutonus primus in lucem produxit, confirmat et corroborat. Postquam enim Neutonus leges a Keplero ex obseruationibus erutas calculo subiecisset, atque secundum veras motus regulas examinasset: omnes planetas perinde moueri demonstrauit, ac moveri deberent, si ad solem vrgerentur viribus, quae quadratis distantiarum a sole reciproce essent proportionales. Hinc enim ostendit, planetas in ellipsibus moueri, quarum alterum focum sol occupet, hocque motu areas temporibus proportionales circa solem emetiri debere: praeterea vero quadrata temporum periodicorum cubis axuum transuersorum cuiusque ellipsis proportionalia esse. Quae conclusiones cum phaenomenis accuratissime satisfaciant, non dubitauit Neutonus tanquam principium certissimum stabilire, omnes planetas perpetuo ad solem vrgeri viribus, quae quadratis distantiarum reciproce sint proportionales, et cum deinceps inuenisset, motum cometarum ad eandem legem esse comparatum, eo magis veritas principii assumti ipsi confirmabatur. Quoniam porro omne coeli spatium omni materia vacuum statuit, ne a resistentia medii motus planetarum retardarentur, huius vis, qua planetae ad solem sollicitentur, nullam causam physicam admittere valuit. Hancque ob causam ipse quidem tacite, at sectatores eius aperte profecti sunt esse, solem ista vi

immediate a Creatore esse donatum, eaque omnia coeli corpora ad se allicere atque attrahere. Cum autem nullum corpus ab alio attrahi posse agnoscerent, nisi hoc simul ab illo pari vi attrahatur, similem vim attrahendi singulis planetis et cometis attribuerunt, quia vero non constabat, ipsum solem ab istis planetarum viribus sensibiliter impelli, inertiam atque adeo materiam, qua sol constat, multo maximam statuerunt, vt effectus a viribus illis ortus produceretur quam minimus. Hanc opinionem comprobabat quoque stupenda solis magnitudo, qua omnes planetas longissime superat. Praeterea vero ipsa grauitas, qua omnia corpora ad terram vrgeri sentimus, atque nisus, quo luna manifesto terram versus impellitur, talem vim attractiuam in terra eminebat: similique modo motus satellitum Iouis et Saturni, hos planetas vi attractiua praeditos esse docebant. Denique ex phaenomenis aestus marini clarissime apparebat, vti terra lunam ad se attraheret, ita vicissim terram cunctasque eius partes a luna attrahi. Cum igitur hoc modo euicissent omnia corpora mundi se mutuo attrahere, eandem vim ad omnia prorsus corpora extendere sunt conati, atque adeo attractionem proprietatibus materiae adnumerauerunt; quae vltima conclusio, vti nimis est temeraria, ita quoque praecedentis ratiocinii vim non infringit, neque summum vsum, quem Philosophia Neutoni Astronomiae affert, suspectum reddere debet. Cum enim reliqua omnia obseruationibus et indubitatis argumentis sint confirmata, hoc solo excepto, quod attractio sit proprietas materiae essentialis, dubitare profecto nemo licet, quia omnia corpora mundi reuera ad

se mutuo impellantur, etiamsi causa huius vis ignoretur. Pro vsu autem astronomico sufficit nosse eiusmodi vires in mundo reipsa existere, quarum effectus cum solus spectetur, perinde est, quaecunque earum sit causa siue cognita siue incognita, neque in ipsam astronomiam multum inde incrementi redundaret, licet huius phaenomeni causa abscondita innotesceret.

§. 3. Stabilito ergo hoc principio, quo omnia corpora coelestia se mutuo attrahere statuuntur, determinatio omnium motuum qui in coelo fiunt, ad resolutionem problematum mechanicorum reducitur: mechanica enim est quaestio, qua ex cognitis viribus, quibus duo pluraue corpora in se inuicem agunt, variatio vnius cuiusque motus inde orunda definiri debet. Ac pro motu planetarum primariorum quidem determinandō, etsi ii non solum ad solem vrgentur, sed etiam quilibet a reliquis trahitur, tamen vires a planetis ortae tam sunt exiguae, ratione vis, quae ad solem tendit, vt in hoc negotio sine errore sensibili praetermitti queant. Hancob causam inuestigatio motus cuiusque planetae primarii ad solutionem huius problematis perducitur, vt duorum corporum, quae se mutuo attrahunt in ratione reciproca duplicata distantiarum, motus ac situs ad quodvis tempus assignetur. Quod problema vti non est difficile solutu; ita quoque planetarum primariorum motus facile ope calculi definiuntur, ac tabulae in vsum astronomicum constituuntur. Pro luna autem calculus, ad quem haec theoria deducit, tantopere fit molestus, totque difficultatibus implicatus, vt vix quicquam certi ad eius motum determi-

mi-

minandum ex eo elici possit. Cum enim luna non solum ad terram attrahatur, sed etiam ad solem, harumque virium neutra tam sit parua, vt respectu ad alteram habito pro nulla haberi queat, problema hinc occurrit longe difficillimum, quo motus trium corporum se mutuo attrahentium inuestigandi proponuntur: hicque trium virium ratio haberi debet, vnius, qua ipsa terra ad solem vrgetur, secundae, qua luna ad terram, et tertiae, qua luna ad solem sollicitatur. Hoc igitur problema, si commode solui posset, determinatio motus lunae in promtu esset, verum hoc casu defectu analyseos, certaeque methodi huiusmodi intricatos calculos euoluendi, fit vt theoria vix plus circa motum lunae pateficiat, quam ex obseruationibus colligere licuit. Quicquid autem adhuc astronomi ex his theoriae tenebris deducere, et quasi per transennam dignoscere potuerunt, tam accurate cum experientia conspirat, vt nullum prorsus dubium superesit, quin vniuersus lunae motus, cunctis conclusionibus, quae vnquam ex calculo formari queant, exactissime sit respondurus. Neutonus, qui ipse primus hoc negotium est adgressus, incredibile studium in hac quaestione enodanda collocasse videtur, hocque ipso non parum adiumenti in Astronomiam attulisse merito iudicatur: tabulae enim astronomicae, quae ad eius mentem sunt conditae multo propius verum lunae locum quouis tempore exhibent, quam reliquae. Interim tamen tantum abest, vt Neutonus opus quod suscepit, confecerit, vt potius summas difficultates, quibus iste calculus etiamnunc laborat, luculenter ob oculos ponat, atque cum cetera sit obscurissima, atque ma-

xima

xima caligine involuta, tum imprimis ea, quae de motu lineae nodorum et de variatione inclinationis ad ecliptican differuit, non vbique rigorem geometricum prae se ferre videntur. Qui autem post Neutonum huic eidem negotio se applicuerunt, non solum non vlterius sunt progressi, sed ne id quidem fere praestiterunt, in quo Neutonum satis feliciter praeuntem habuerunt.

§. 4. Saepenumero quoque ipse istum laborem tentaui, semper autem calculi taedioſissimi difficultates me vel deterruerunt vel impediuerunt, quo minus saltem Neutonum assequerer. Neque vero tum adhuc ad discrepantiam orbitae lunaris ab ecliptica respexeram, ne statim ab initio obstacula nimis augerem, hincque mihi quidem recte colligere visus sum, si ipsius plani, in quo luna fertur, mutabilitatis rationem in calculum introducere voluissem, laborem penitus insuperabilem proditurum fuisse. Methodus autem, qua tum temporis eram vsus, impedimenta non mediocriter multiplicabat, resolutis enim viribus lunam vrgentibus, quemadmodum vulgo fieri solet, in tangentiales et normales, ex illis celeritatis lunae vel incrementum vel decrementum, ex his vero curuaturam orbitae inuestigaui; sicque ad aequationes sum deductus differentiales, quae non solum integratu erant difficillimae, sed etiamsi integrari facile potuissent, tamen adhuc longissime a perfecta et commoda motus determinatione fuissent remotae. In astronomia enim neque ipsa lunae celeritas, neque curuatura viae, in qua incedit, per se desideratur, sed calculum ita accommodari oportet, vt ad quoduis tempus, punctum coeli, in quo lu-

na verſari videtur, eiuſque vera a terra diſtantia aſſignari poſſit; quae res ex illis, quas methodus immediate ſuppeditat, non niſi moleſtiſſimo computo deriuari poſſunt. His impedimentis probe perpenſis in eam cogitationem incidi, vtrum determinatio huiusmodi motuum non alia methodo tractari poſſet, quae non per memoratas celeritatis et curauturae ambages ad optatum finem perduceret? et, cum iam nonnullis problematibus mechanicis alias difficillimis ſingularem modum ea reſoluendi detexiſſem, quo ſimilia impedimenta maximam partem remouerentur, eandem methodum non ſine ingenti calculi contractione ad praeſens inſtitutum adhiberi poſſe perſpexi. Imprimis autem hoc modo lineae nodorum motum et inclinationis ad eclipticam variationem, quae res aliis methodis vix calculo comprehendi poſſunt, mihi ſatis commode definire licuit, neque dubito, quin eandem viam perſequendo reliqua motus lunae phaenomena multo felicius explicari queant.

§. 5. Quo autem vis et vſus huius methodi clarius perſpiciatur, expediet primo eius periculum in reſolutione problematis facilioris, quo duorum tantum corporum ſe mutuo attrahentium motus requiritur, feciſſe: cum enim hoc caſu reliquae methodi ſine difficultate in vſum vocari poſſint, eo facilius patebit, quantum ſubſidii a noua methodo in problemate multo abſtruſiori expectare queamus. Praeterea vero, quia motus lunae ſine motu ſolis cognoſci non poteſt, ob hoc ipſum neceſſe erit, vt ſolis motum eadem methodo ante definiam, quam complicatiſſimos lunae motus aggrediar: hocque modo non ſolum iſtius methodi ſpeci-

ſpecimen, ex quo eius indoles intelligi poterit, exhibebitur, ſed etiam determinatio motus ſolis viam praeparabit ad motum lunae definiendum. Quanquam autem reuera terra circa ſolem circumfertur; tamen quoniam in aſtronomia non tam motus veri, quam apparentes ſpectantur, quaeſtionem ita proponamus, vt motus relativus determinari debeat, quo ſol ex terra, quae tanquam quieſcens ſpectatur, moueri cernitur. Hoc ergo caſu ſecundum praecepta mechanicae neceſſe eſt, vt primo motum, quo terra reuera progreditur, in oppoſita directione in ſolem transferamus: ſeu vt toti ſpatio, in quo ſol et terra continetur, motum aequalem et contrarium ei quo terra mouetur, imprimi concipiamus: quo pacto terra ad quietem redigetur. Deinde vero ne a viribus continuo ſollicitantibus terra ex hoc ſtatu deturbetur, ſimili modo requiritur, vt totum illud ſpatium quouis momento a viribus contrariis et aequalibus ſollicitari imaginemur; ſiue vt perpetuo in ipſum ſolem easdem vires, quibus terram impelli nouimus, ſed in directionibus contrariis mente transferamus. Haec eadem praecepta erunt obſeruanda, ſi deinceps noſtras inueſtigationes ad lunam quoque extendemus; ſemper ſcilicet, quia ſpectatorem in terra concipimus, eiusque reſpectu motus omnes diiudicamus, motum terrae tam in ſolem, quam lunam contrario modo inducere oportet; tum vero ſingulae vires, quibus terra ſollicitatur, pariter in contrariis directionibus tam ſoli quam lunae affingi debebunt. Hacque ratione tam in ſole, quam in luna eos ipſos motus obtinebimus, non quibus reuera mouentur, ſed quibus ſpectatori in centro terrae poſito et tanquam immobili conſiderato, moueri appariturі eſſent.

Fig. 1. §. 6. Sit igitur centrum terrae in G positum, eo que tanquam immobili spectato sol moueatur in linea curva AFf, ita vt planum tabulae planum ecliptícae repraesentet. Sumatur in hoc plano linea fixa GA, ad quam quouis tempore locus solis, qui sit in F, per angulum AGF referatur; quem in finem linea GA vel ad apogaeum vel ad perigaeum solis commodissime ducetur. Elapso igitur tempore $=T$ peruenerit sol ex A in F, ponaturque angulus AGF $= r$, qui erit anomalia vera, dum anomalia media est angulus, qui se habet ad 360°, vti est tempus T ad totum tempus periodicum, seu ad annum sidereum, qui est 365^d, 6^h, $8'$, $30''$. Ponatur porro distantia solis a terra FG$=v$, ductoque ex F ad rectam GA perpendiculo FP, si sinus totus vnitate designetur, erit FP$=v$ sin. r, et GP $= v$ cos. r. Vocetur autem breuitatis gratia FP$=v$ sin. r $=y$ et GP $= v$ cos. $r = x$. Quod si iam tempusculo infinite paruo dT sol elementum Ff conficiat, atque ex f ad AG pariter perpendicularis fp ducatur, et Fr atque fs rectae AG parallelae constituantur, habebitur Pp$=-dx$ $= -dv$ cos. $r + vdr$ sin. r et $fr = dy = dv$ sin. $r + vdr$ cos. r; hincque erit F$f^2 = dx^2 + dy^2 = dv^2 + v^2dr^2$: atque si recta G$f$ ducta concipiatur, erit trianguli minimi FGf area $= \frac{1}{2}vvdr$.

§ 7 Nunc vires sunt perpendendae, quibus motus solis in quouis puncto F perturbatur, ac primo quidem occurrit vis attractiua terrae, quae cum in superficie ob eat in grauitatem naturalem, cuius effectus sunt notissimi, merito instar mensurae reliquarum virium attractiuarum assumitur. Posito ergo radio terrae $= g$, quia vis attracti-

ve

ua terrae in distantia a centro $=g$, aequalis est grauitati, quam vnitate designemus, in quacunque alia distantia puta $=v$, erit vis attractiua terrae $=\frac{gg}{vv}$; propterea quod haec vis quadratis distantiarum a centro reciproce est proportionalis; sicque in proposito casu sol in F ad terram in G secundum directionem FG sollicitabitur vi acceleratrice $=\frac{gg}{vv}$. Vis autem solis se habet ad vim terrae, si distantiae sint aequales, vt massa solis ad massam terrae: vnde si ponamus massam terrae $=G$, et massam solis $=F$, erit in distantia $=v$ vis attractiva solis $=\frac{Fgg}{Gvv}$, hacque ipsa vi terra in G solem versus in F pelletur. Quoniam igitur ob terram in quiete consideratam, vis qua terra sollicitatur in solem sub directione contraria transferri debet, sol hinc in directione FG vrgebitur vi acceleratrice $=\frac{Fgg}{Gvv}$; et cum ante in eadem directione sollicitari sit repertus vi $=\frac{gg}{vv}$, nunc omnino in directione FG sollicitabitur vi $=\frac{(F+G)gg}{Gvv}$. Ceterum hic notandum est, in hac disquisitione, quoties virium mentio occurrit, id semper de viribus acceleratricibus intelligendum esse; atque vim grauitatis acceleratricem perpetuo vnitate indicari, quod ideo monendum est, ne istae vires pro motricibus habeantur, quae ante per massam corporis mouendi diuidi debent, quam vis acceleratrix prodeat. Hic igitur quoniam statim vires acceleratrices obtinemus, non opus est massas corporum mouendorum nosse, cum omnia corpora, quantumuis fuerint magna vel parua, ab eadem vi acceleratrice aequaliter accelerentur.

§. 8. Quantus autem cuiuſque vis acceleratricis ſit effectus in alterando corporum motu ex primis mechanicae principiis facile intelligitur. Si enim corpus moueatur celeritate tanta, quantam acquirit corpus cadendo ex altitudine $= V$, atque interea, dum ſpatii elementum $= dX$ percurrit, ſollicitetur in eadem directione, ſecundum quam mouetur vi acceleratrice $= P$ ſeu quae ſe habeat ad vim grauitatis vt P ad 1, tum vtique erit $dV = P\,dX$. Verum ſi praeterea temporis ratio ſit habenda, atque tempuſculum, quo ſpatiolum dX percurritur ponatur $= dT$, erit $\frac{dX}{dT}$ celeritati corporis proportionale, quae per radicem quadratam ex altitudine V exprimi poteſt. Cum autem vnitas, ad quam tempus referatur, ſit arbitraria, ea ita aſſumi poteſt, vt fiat $\frac{dX}{dT} = \sqrt{V}$, ſicque elementum temporis dT exprimatur per fractionem $\frac{dX}{\sqrt{V}}$ et ipſum tempus T per integrale $\int\frac{dX}{\sqrt{V}}$. Oſtendi autem in meo tractatu de motu, ſi in expreſſione $\int\frac{dX}{\sqrt{V}}$ *longitudines* exhibeantur in partibus milleſimis *pedis* rhenani, tum iſtam expreſſionem in numeris expoſitam, atque per 125 diuiſam, praebituram eſſe tempus in minutis ſecundis. Quodſi ergo iſte modus tempus exprimendi recipiatur, erit $dT = \frac{dX}{\sqrt{V}}$, ac propterea $\sqrt{V} = \frac{dX}{dT}$, vnde fit $V = \frac{dX^2}{dT^2}$, et ſi elementum temporis dT conſtans aſſumatur, erit $dV = \frac{2dXddX}{dT^2}$: quo valore in aequatione $dV = P\,dX$ ſubſtituto, habebitur $\frac{2dXddX}{dT^2} = P\,dX$, ideoque $2\,ddX = P\,dT^2$: ſeu differentiale ſecundum ſpatii emenſi bis ſumtum aequabitur producto ex vi acceleratrice P in quadratum elementi temporis interea elapſi. Hoc ita

ſe

se habet, si corpus secundum eandem directionem in qua mouetur, sollicitetur, sin autem sollicitatio secundum directionem contrariam agat, tum erit $2\,d\,dX = -P\,dT^2$: vtroque autem casu directio corporis a vi sollicitante non variatur. Verum si vis oblique ageret in corpus, tum non solum celeritas, sed etiam directio motus afficeretur. Hoc autem casu in praesente instituto non indigemus, quoniam tam motum corporis, quam ipsas vires sollicitantes perpetuo secundum constantes directiones sim resoluturus, ita vt quiuis motus a nullis aliis viribus vnquam afficiatur, nisi quae eandem habeant directionem.

§. 9. Cum igitur sol in directione Ff moueatur celeritate $= \frac{Ff}{dT}$, resoluatur iste motus in binos secundum directiones Fr et Fs, eritque illius celeritas $= \frac{Fr}{dT} = \frac{-dx}{dT}$ huius vero $= \frac{Fs}{dT} = \frac{dy}{dT}$. Nempe tempusculo dT sol per motum priorem absoluet spatiolum $Fr = -dx$, per posteriorem vero spatiolum $Fs = dy$. Nunc simili modo vis sollicitans $\frac{(F+G)gg}{Gv^2}$ secundum directiones Fr et FP resoluatur, eritque vis secundum $Fr = \frac{(F+G)ggx}{Gv^3}$ et vis secundum $FP = \frac{-(F+G)ggy}{Gv^3}$ ex quibus per lemma praeced. §. praemissum sequentes prodeunt aequationes.

$-2\,ddx - \frac{(F+G)ggx\,dT^2}{Gv^3}$ et $2\,ddy = -\frac{(F+G)ggy\,dT^2}{Gv^3}$

quarum si illa per y, haec vero per x multiplicetur, ambaeque aequationes addantur, habebitur $y\,ddx - x\,ddy = 0$, cuius integrale est $y\,dx - x\,dy = C\,dT$. At vero ob $y = v$ sin. r et $x = v$ cos. r erit $y\,dx - x\,dy = -v^2\,dr$ ob sin. $r^2 +$ cos. $r^2 = 1$, ideoque nacti sumus hanc primam aequationem:

$$v^2\,dr = C\,dT.$$

Dein-

Deinde binarum inuentarum aequationum multiplicetur prior per dx, posterior per dy, alteraque ab altera subtracta remanebit:

$$\frac{2dxddx+2dyddy}{a1^2} = \frac{-(F+G)gg}{Gv^3}(xdx+ydy)$$

Cum autem sit $vv = xx+yy$ erit $xdx+ydy = vdv$ ideoque

$$\frac{2dxddx+2dyddy}{dT^2} = \frac{-(F+G)ggdv}{Gv^2}$$

cuius integrale est: $\frac{dx^2+dy^2}{dT^2} = \frac{(F+G)gg}{Gv} + a$. Supra autem notauimus esse $dx^2+dy^2 = dv^2+v^2dr^2$, vnde fiet haec altera aequatio:

$$dv^2 + v^2dr^2 = adT^2 + \frac{(F+G)ggdT^2}{Gv}$$

quae cum priori $vvdr = CdT$ coniuncta ad datum quodvis tempus T determinabit ambas incognitas v et r, quae solae in astronomia desiderantur. Quia autem $\frac{1}{2}vvdr$ exprimit elementum areae AGF, fiet ipsa area AGF $= \frac{1}{2}\int vvdr = \frac{1}{2}CT$; vnde patet areas, quas sol circa terram emetiri videtur, temporibus esse proportionales, quam proprietatem Keplerus primus pro sole circa terram, ac pro omnibus planetis primariis circa solem obseruauit.

§. 10. Inuentis ergo his duabus aequationibus.

$vvdr = CdT$ et $dv^2 + v^2dr^2 = \left(a + \frac{(F+G)gg}{Gv}\right)dT^2$

prior dat $dr = \frac{CdT}{vv}$, qui valor in altera substitutus praebebit:

$$dv^2 + \frac{C^2dT^2}{v^2} = adT^2 + \frac{(F+G)gg}{Gv}dT^2$$

Ponatur breuitatis gratia $\frac{(F+G)gg}{G} = cc$ eritque

$$v^2dv^2 + C^2dT^2 = av^2dT^2 + ccvdT^2 \text{ siue}$$

$$dT = \frac{vdv}{\sqrt{(-C^2+ccv+av^2)}}$$

hincque $dr = \frac{Cdv}{v\sqrt{(-C^2+ccv+av^2)}}$ Ad

Ad conſtantes definiendas, perpendantur caſus, quibus fit $dv = 0$, id quod in apogaeo ac perigaeo euenire oportet. Erit autem his caſibus $av^2 + ccv - C^2 = 0$, cuius aequationis, cum altera radix ſit affirmatiua, altera negatiua diſtantia autem v reuera nunquam negatiua fieri poſſit: per ſpicuum eſt, ſi radix affirmatiua perigaeum denotet, ſolem nunquam ad apogaeum peruenturum eſſe, vnde conſtat, orbitam hoc caſu hyperbolam fore. Hoc autem accidit, ſi a fuerit quantitas affirmatiua; quare vt ellipſin obtineamus, neceſſe eſt, vt a ſit quantitas negatiua: namque reliqui coefficientes cc et C^2, quia ſunt quadrata, negatiui fieri nequeunt. Sit igitur $a = -\alpha$, et aequatio $\alpha vv = ccv - CC$ hos dabit valores $v = \frac{cc \pm \sqrt{(c^4 - 4\alpha CC)}}{2\alpha}$; quorum minor dabit diſtantiam perigaei ſolis a terra, quae erit $= \frac{cc - \sqrt{(c^4 - 4\alpha CC)}}{2\alpha}$ maior vero dabit $\frac{cc + \sqrt{(c^4 - 4\alpha CC)}}{2\alpha}$ diſtantiam apogaei: ſumma ergo $\frac{cc}{\alpha}$ erit axis transuerſus, et differentia $\frac{\sqrt{(c^4 - 4\alpha CC)}}{\alpha}$ erit diſtantia focorum, ita vt excentricitas futura ſit $= \frac{\sqrt{(c^4 - 4\alpha CC)}}{cc}$; et axis coniugatus $= \frac{2C}{\sqrt{\beta}}$, ideoque parameter ſeu latus rectum $= \frac{4CC}{cc}$. Ponamus axem transuerſum $= 2a$, et latus rectum $= 2b$; fiet littera ante adhibita $\alpha = \frac{-cc}{2a}$ et $4CC = 2bcc$, atque $C = c\sqrt{\frac{b}{2}}$. Aequationes ergo differentiales primum inuentae erunt:

$$vvdr = cdT\sqrt{\tfrac{b}{2}} \text{ et } dv^2 + v^2dr^2 = \frac{-ccdT^2}{2a} + \frac{ccdT^2}{v}.$$

Aequationes vero ex his erutae erunt:

$$dT = \frac{v\,dv\sqrt{2a}}{c\sqrt{(-vv + 2av - vv)}} \text{ et } dr = \frac{dv\sqrt{2b}}{v\sqrt{(-vv + 2av - vv)}}$$

exiſtente $cc = \frac{(f + G)gg}{G}$; excentricitas vero erit $= \sqrt{\frac{a-b}{a}}$

§. 11. Aequatio autem $dr = \frac{dv\sqrt{ab}}{v\sqrt{(-ab+2av-vv)}}$, si integretur, dabit $r = A$ cos. $\frac{(b-v)\sqrt{a}}{v\sqrt{(a-b)}}$, vnde fit cos. $r = \frac{(b-v)\sqrt{a}}{v\sqrt{(a-b)}}$, eritque r angulus, quem sol circa terram iam a perigaeo descripsit, si enim ponatur angulus $r = o$, fiet cos. $r = 1 = \frac{(b-v)\sqrt{a}}{v\sqrt{(a-b)}}$; et $v = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{(a-b)}} = a - \sqrt{(aa-ab)}$, quae est distantia perigaei a terra. Quare si punctum A orbitae solaris denotet perigaeum, ex angulo AGF $= r$ seu anomalia vera inuenietur hinc distantia solis a terra $v = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\cos.r\sqrt{(a-b)}}$ atque si excentricitas $\sqrt{\frac{a-b}{a}}$ statuatur $= n$; fiet $v = \frac{b}{1+n\cos.r}$. Maneat $\sqrt{\frac{a-b}{a}} = n$, erit $a = \frac{b}{1-nn}$, atque altera aequatio transibit in hanc

$$d\,T = \frac{v\,dv\sqrt{2b}}{c\sqrt{(-bb+2bv-vv+nnvv)}}$$

vnde fit:

$$T = \frac{-\sqrt{2b}}{c(1-nn)}\sqrt{(-bb+2bv-(1-nn)vv)} + \frac{b\sqrt{2b}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}c}\int\frac{dv}{\sqrt{(-bb+2bv-(1-nn)vv)}}$$

at $\int\frac{dv}{\sqrt{(-bb+2bv-(1-nn)vv)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-nn)}}A\sin.\frac{v(1-nn)-b}{nb}$

seu $\int\frac{dv}{\sqrt{(-bb+2bv-(1-nn)vv)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-nn)}}A\cos.\frac{\sqrt{(1-nn)}}{nb}\sqrt{(-bb+2bv-(1-nn)v^2)}$. Sit $A\sin.\frac{v(1-nn)-b}{nb} = \omega$ erit $v = \frac{nbv+b}{1-nn}$ et $\sqrt{(-bb+2bv-(1-nn)v^2)} = \frac{nb\cos.\omega}{\sqrt{(1-nn)}}$, vnde fit $T = \frac{b\omega\sqrt{b}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}c} - \frac{n^2\sqrt{2b}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}c}\cos.\omega$ siue $T = \frac{b\sqrt{2b}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}c}(\omega - n\cos.\omega)$, constans autem addi debet, vt posito $r = o$ seu $v = \frac{b}{1+n}$ tempus euanescat, facto autem $v = \frac{b}{1+n}$ fit $\omega = A\sin. -1 = -\frac{\pi}{2}$, vnde oritur

$$T = \frac{b\sqrt{2b}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}c}\left(\frac{\pi}{2}+\omega-n\cos.\omega\right)$$

sit $\frac{\pi}{2}+\omega = \Phi$, erit

ω

$\omega = -\frac{\pi}{2} + \Phi$ et cos. $\omega = \sin. \Phi$, ita vt fit:
$T = \frac{b\sqrt{2b}}{(1-m)^{\frac{3}{2}}c} (\Phi - n \sin. \Phi) = \frac{a\sqrt{2a}}{c} (\Phi - n \sin. \Phi)$
Cum vero fit sin. $\omega = -$ cos. Φ, fiet $v = \frac{b-nb \cos. \Phi}{1-m}$ $= a(1 - n \cos. \Phi)$ atque cos $r = \frac{\cos. \Phi - n}{1-n \cos. \Phi}$: vnde ratio tabularum solarium facile colligitur.

§. 12. Expeditis hoc modo, quae ad motum solis spectant, et vnde vis methodi, qua vtor, clare perspicitur, ad lunam progrediar. Repraesentetur vt ante planum eclipticae ipso tabulae plano, in eoque sit G centrum terrae, quod tanquam fixum maneret, spectatur, et GA recta pro lubitu assumta fixa. Tempore quocunque T, ab initio quodam stato, elapso versetur sol in F, luna vero extra eclipticam in E, vnde ad planum eclipticae demittatur perpendiculum EM, atque ex M in GA porro normalis MP, iunganturque rectae GE et GM. Quibus factis angulus MGE dabit latitudinem lunae, anguli vero AGF et AGM sunt longitudines solis et lunae a puncto eclipticae fixo A computatae. Vocentur nunc distantia solis a terra GF $= f$ distantiae lunae a terra GE $= v$, et anguli AGF $= r$, AGM $= q$; et EGM $= p$, eritque EM $= v \sin. p$; GM $= v \cos. p$; hincque porro PM $= v \cos. p \sin. q$ et GP $= v \cos. p \cos. q$. Vocentur autem quoque lineae rectae, quae tanquam coordinatae spectantur, GP $= v \cos. p \cos. q = x$; PM $= v \cos. p \sin. q = y$ et ME $= v \sin. p = z$ vt sit $xx + yy + zz = vv$. Promoueatur porro luna tempusculo infinite paruo $= dT$ per orbitae suae elementum Ee, demissoque ex e in planum eclipticae perpendiculo em, et ex m in GA

Fig. 2.

normali mp, compleantur rectangula $Mtem$; $Psmp$; ductaque Mr parallela ipſi GA, motus lunae reſoluetur ſponte in tres laterales, quorum duo erunt in plano eclipticae alter ſecundum Mr celeritate $= \frac{Mr}{d\Gamma} = \frac{-dx}{d\Gamma}$, alter ſecundum Ms celeritate $= \frac{Ms}{d\Gamma} = \frac{dy}{d\Gamma}$ tertii autem motus, quo luna a plano eclipticae recedit, directio erit Et, et celeritas $= \frac{Et}{d\Gamma} = \frac{dz}{d\Gamma}$.

§. 13. Conſideremus nunc quoque vires, quibus luna ſollicitatur. Ac primo quidem a terra vrgebitur ſol in directione FG vi $= \frac{gg}{ff}$; et luna in directione EG vi $= \frac{gg}{vv}$; vti ex ante expoſitis patet. Deinde poſita maſſa terrae $= G$, ſi ſolis maſſa ſtatuatur $= F$, a ſole vrgebitur terra in directione GF $= \frac{Fgg}{Gff}$; et ducta recta EF poſitaque EF $= u$, luna ad ſolem ſollicitabitur in directione EF vi $= \frac{Fgg}{Guu}$. Denique ſi maſſa lunae ponatur $= E$, a luna trahetur terra ſecundum *directionem* GE vi $= \frac{Egg}{Gvv}$, ſol vero a luna trahetur *in* directione EF vi $= \frac{Egg}{Guu}$; ſicque habentur vires, quibus ſol, terra et luna in ſe mutuo agunt, ex quibus hic eas, quae ſolem afficiunt, negligimus, propterea quod motum ſolis tanquam cognitum neque a luna perturbari aſſumimus. Vires autem, quibus terra incitatur, quoniam terram, tanquam in G quieſceret, ſpectamus, in directionibus contrariis in lunam ſunt transferendae, quemadmodum ſupra oſtendimus ſicque fiet, vt luna reuera a quatuor viribus impelli ſit conſideranda. Primo ſcilicet luna vrgebitur in directione EG vi $= \frac{gg}{vv}$, ſecundo in directione

EF

EF vi $= \frac{Fgg}{Guu}$, quae sunt vires proprie in lunam agentes, tertio luna sollicitabitur in directione EG vi $= \frac{Egg}{Gvv}$, et quarto si per E ducatur recta HEI ipsi FG parallela, luna sollicitabitur in directione EI vi $= \frac{Fgg}{Gff}$. Hoc modo vires quae in lunam agunt ad tres directiones reducuntur; prima erit in directione EG $= \frac{(E+G)gg}{Gvv}$. Secunda in directione EF $= \frac{Fgg}{Guu}$; et tertia in directione EI $= \frac{Fgg}{Gff}$. Media vero in directione EF denuo resolui potest secundum directiones EG et EH, eritque illa secundum EG $= \frac{Fggv}{Gu^3}$, et haec secundum EH $= \frac{Fggf}{Gu^3}$; vnde vires lunam afficientes ad duas directiones perducuntur. Primo scilicet luna trahetur in directione EG vi $= \frac{(E+G)gg}{Gv^2} + \frac{Fggv}{Gu^3}$; praeterea vero in directione EH vi $= \frac{Fggf}{Gu^3} - \frac{Fgg}{Gff} = \frac{Fgg}{G}\left(\frac{f}{u^3} - \frac{1}{ff}\right)$.

§. 14. Cum sit angulus AGM $= q$, et angulus AGF $= r$, ponamus breuitatis gratia angulum FGM $= q - r = s$, qui distantiam lunae a sole secundum longitudinem exhibebit, et quoniam angulus EGM $= p$, erit ex trigonometricis cosinus anguli EGF $=$ cos. p . cos. s; hincque in triangulo FGE prodibit ex lateribus FG, EG cum angulo intercepto FGE tertium latus FE $= u = \sqrt{(ff - 2fv\cos.p\cos.s + vv)}$. Quare cum linea f respectu v sit vehementer magna, erit proxime $\frac{1}{u^3} = (ff - 2fv\cos.p\cos.s + vv)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{f^3} + \frac{3v\cos.p\cos.s}{f^4} + \frac{3vv(5\cos.p^2.\cos.s^2 - 1)}{2f^5}$, cuius expressionis vltimus terminus iam est tantopere exiguus, vt in computo lunae sine erro-

re praetermitti possit, si enim ponamus parallaxin solis horizontalem $= 12''$, fiet distantia terrae a sole media $= 17189g$ et cum distantia lunae a terra media sit circiter $= 60g$; fiet $v : f = 1 : 286$, quae ratio est tam parua, vt eius potestates superiores tuto reiici queant. Hancobrem erit vis qua luna in directione EG vrgetur $= \frac{(E+G)gg}{Gv^2} + \frac{Fggv}{GJ^3}$, et vis qua luna in directione EH vrgetur $= \frac{3Fggvcos.pcos.s}{GJ^3}$. Ne autem, antequam necessitas postulet, quicquam negligamus, tantisper priores expressiones, in quibus littera u inest, retineamus.

§. 15. Resoluamus nunc porro has vires secundum directiones, in quas motum lunae iam dissoluimus, et vis in directione $EG = \frac{(E+G)gg}{Gv^2} + \frac{Fggv}{Gu^3}$ tres sequentes vires suppeditabit; quarum

prima in directione $Mr = \frac{(E+G)ggx}{Gv^3} + \frac{Fggx}{Gu^3}$

secunda in directione $MP = \frac{(E+G)ggy}{Gv^3} + \frac{Fggy}{Gu^3}$

tertia in directione $EM = \frac{(E+G)ggz}{Gv^3} + \frac{Fggz}{Gu^3}$

Altera vis in directione $EH = \frac{Fggf}{Gu^3} - \frac{Fgg}{Gff}$, quia plano eclipticae est parallela, tertium motum in directione EM non afficit: transferatur ergo in planum eclipticae, et habebit directionem ML parallelam ipsi GF, ex qua resultabit vis

in directione $Mr = \frac{-Fggfcos.r}{Gu^3} + \frac{Fggcos.r}{Gff}$

in directione $Ms = \frac{Fggfsin.r}{Gu^3} - \frac{Fggsin.r}{Gff}$.

His ergo viribus coniunctis terni lunae motus ita mutabuntur, vt secundum praecepta supra tradita oriantur tres istae aequationes:

$$\frac{2ddx}{dT^2} = -\frac{(E+G)ggx}{Gv^3} - \frac{Fggx}{Gu^3} + \frac{Fggf\cos.r}{Gu^3} - \frac{Fgg\cos.r}{Gff}$$
$$\frac{2ddy}{dT^2} = -\frac{(E+G)ggy}{Gv^3} - \frac{Fggy}{Gu^3} + \frac{Fggf\sin.r}{Gu^3} - \frac{Fgg\sin.r}{Gff}$$
$$\frac{2ddz}{dT^2} = -\frac{(E+G)ggz}{Gv^3} - \frac{Fggz}{Gu^3}.$$

Ex quibus eliminando terminos $\frac{(E+G)gg}{Gv^3}$ nascintur tres sequentes aequationes.

$$\frac{2(zddx-xddz)}{dT^2} = \frac{Fggfz\cos.r}{Gu^3} - \frac{Fggz\cos.r}{Gff}$$
$$\frac{2(zddy-yddz)}{dT^2} = \frac{Fggfz\sin.r}{Gu^3} - \frac{Fggz\sin.r}{Gff}$$
$$\frac{2(yddx-xddy)}{dT^2} = \frac{Fggf(y\cos.r-x\sin.r)}{Gu^3} - \frac{Fgg(y\cos.r-x\sin.r)}{GJJ}$$

Cum autem sit $x = v\cos.p\cos.q$ et $y = v\cos.p\sin.q$ erit $y\cos.r - x\sin.r = v\cos.p(\sin.q\cos.r - \cos.q\sin.r) = v\cos.p\sin.s$ ob $q-r=s$. Atque ob $z = v\sin.p$, erit $z\cos.r = v\sin.p\cos.r$ et $z\sin.r = v\sin.p\sin.r$. Ex quo inuentae aequationes transmutabuntur in has:

$$\frac{2d.(zdx-xdz)}{dT^2} = \frac{Fggv\sin.p\cos.r}{G}\left(\frac{f}{u^3}-\frac{1}{ff}\right)$$
$$\frac{2d.(zdy-ydz)}{dT^2} = \frac{Fggv\sin.p\sin.r}{G}\left(\frac{f}{u^3}-\frac{1}{ff}\right)$$
$$\frac{2d.(ydx-xdy)}{dT^2} = \frac{Fggv\cos.p\sin.s}{G}\left(\frac{f}{u^3}-\frac{1}{ff}\right)$$

§. 16. Cum autem sit $x = v\cos.p\cos.q$, $y = v\cos.p\sin.q$ et $z = v\sin.p$ erit vt sequitur:

$dx = dv\cos.p\cos.q - vdp\sin.p\cos.q - vdq\cos.p\sin.q$
$dy = dv\cos.p\sin.q - vdp\sin.p\sin.q + vdq\cos.p\cos.q$
$dz = dv\sin.p + vdp\cos.p$

Hinc itaque efficietur

$zdx - xdz = -vvdp\cos.q - vvdq\sin.p\cos p\sin.q$
$zdy - ydz = -vvdp\sin.q + vvdq\sin.p\cos.p\cos.q$
$ydx - xdy = -vvdq\cos p^2$

Quae expressiones si in aequationibus ante inuentis substituantur

tuantur, prodibunt tres aequationes inter quatuor variabiles T. v. p et q. quarum ope ternae ex quarta definiri poterunt. Praeterea autem ex his elementorum dx, dy et dz valoribus notari oportet, fore ſummam quadratorum eorundem $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dv^2 + v^2 dp^2 + v^2 dq^2 \text{ cof. } p^2$; quae formula nouae aequationi ex primo inuentis tribus aequationibus eruendae inſeruit. Si enim prima per dx ſecunda per dy et tertia per dz multiplicetur ob $x dx + y dy + z dz = v dv$ habebimus hanc aequationem

$$\frac{2dxddx + 2dyddy + 2dzddz}{dT^2} = \frac{d.(dv^2 + v^2 dp^2 + v^2 dq^2 \text{ cof. } p^2)}{dT^2} =$$

$$- \frac{(E+G)ggdv}{Gv^2} - \frac{Fggvdv}{Gu^2} + \frac{Fgg}{G}\left(\frac{f}{u^3} - \frac{1}{ff}\right)(dx \text{ cof. } r + dy \text{ ſin. } r).$$

Eſt vero $dx \text{ cof. } r + dy \text{ ſin. } r = dv \text{ cof. } p \text{ cof. } s - v\,dp \text{ ſin. } p \text{ cof. } s - v\,dq \text{ cof. } p \text{ ſin. } s$ quae cum ſuperioribus coniuncta inueſtigationem orbitae lunaris faciliorem reddet.

17 Quoniam vero hic non tam motus lunae ipſos, quam lineae nodorum motionem et inclinationis ad eclipticam variationem indagare conſtitui, hae duae res imprimis mihi erunt conſiderandae. Dum igitur luna orbitae ſuae elementum Ee percurrit, ſit recta $G\Omega$ linea nodorum, ſeu interſectio plani eclipticae et plani per punctum G et elementum Ee producti: voceturque angulus $AG\Omega = \Phi$. Porro ex M ad $G\Omega$ ducatur normalis MQ iunctaque EQ erit angulus EQM inclinationi orbitae lunaris ad eclipticam aequalis. Sit igitur iſte angulus $EGM = \theta$; atque ob angulum $\Omega GM = q - \Phi$, erit $MQ = v \text{ cof. } p \text{ ſin. } (q - \Phi)$ et $GQ = v \text{ cof. } p \text{ cof. } (q - \Phi)$: vnde fit $\frac{ME}{MQ} = \frac{v \text{ ſin. } p}{v \text{ cof. } p \text{ ſin. } (q-\Phi)} = \text{tang. } \theta$, ſeu $\text{tang. } \theta = \frac{\text{tang. } p}{\text{ſin. } (q-\Phi)}$. Quoniam vero poſitio lineae nodo-

nodorum et inclinatio ad ambo puncta E et ε aeque pertinent, manifestum est, differentiatis p et q angulos Φ et θ inuariatos manere debere: hinc obtinetur ex aequatione tang. $\theta = \frac{\text{tang. } p}{\text{sin. } (q-\Phi)}$ differentiando.

$$0 = \frac{dp}{\cos. p^2 . \text{sin. } (q-\Phi)} - \frac{dq \text{ tang. } p \cos. (q-\Phi)}{\text{sin. } (q-\Phi)^2}$$

vnde oritur $dp = \frac{dq \text{ sin. } p \cos. p \cos. (q-\Phi)}{\text{sin. } (q-\Phi)}$ quo valore supra substituto fit

$$z\,dx - x\,dz = -\frac{vv\,dq \text{ sin. } p \cos. p \cos. \Phi}{\text{sin. } (q-\Phi)}$$

$$z\,dy - y\,dz = -\frac{vv\,dq \text{ sin. } p \cos. p \text{ sin. } \Phi}{\text{sin. } (q-\Phi)}$$

$$y\,dx - x\,dy = -vv\,dq \cos. p$$

§. 18. Substituantur iam hi valores in aequationibus supra inuentis eritque:

$$d . \frac{vv\,dq \text{ sin. } p \cos. p \cos. \Phi}{\text{sin. } (q-\Phi)} = \frac{Fggv\,dT^2 \text{ sin. } p \cos. r}{2G}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$

$$d . \frac{vv\,dq \text{ sin. } p \cos. p \text{ sin. } \Phi}{\text{sin. } (q-\Phi)} = \frac{Fggv\,dT^2 \text{ sin. } p \text{ sin. } r}{2G}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$

$$d . vv\,dq \cos. p^2 = \frac{Fggv\,dT^2 \cos. p \text{ sin. } s}{2G}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$

Vel differentialibus expeditis, et per v vbique diuisione instituta

$$\frac{2dv\,dq \text{ sin. } p \cos. p \cos. \Phi}{\text{sin. } (q-\Phi)} + v\,d . \frac{dq \text{ sin. } p \cos. p \cos. \Phi}{\text{sin. } (q-\Phi)} = \frac{Fgg\,T^2 \text{ sin. } p \cos. r}{2G}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$

$$\frac{2dv\,dq \text{ sin. } p \cos. p \text{ sin. } \Phi}{\text{sin. } (q-\Phi)} + v\,d . \frac{dq \text{ sin. } p \cos. p \text{ sin. } \Phi}{\text{sin. } (q-\Phi)} = \frac{Fgg\,dT^2 \text{ sin. } p \text{ sin. } r}{2G}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$

$$2\,dv\,dq \cos. p^2 + v\,d . dq \cos. p^2 = \frac{Fgg\,dT^2 \cos. p \text{ sin. } s}{2G}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$

quae transformantur in has:

$$\frac{2dv}{v} + d . l \frac{dq \text{ sin. } p \cos. p \cos. \Phi}{\text{sin. } (q-\Phi)} = \frac{Fgg\,dT^2 \cos. r \text{ sin. } (q-\Phi)}{2G\,v\,dq \cos. p \cos. \Phi}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$

$$\frac{2dv}{v} + d . l \frac{dq \text{ sin. } p \cos. p \text{ sin. } \Phi}{\text{sin. } (q-\Phi)} = \frac{Fgg\,dT^2 \text{ sin. } r \text{ sin. } (q-\Phi)}{2G\,v\,dq \cos. p \text{ sin. } \Phi}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$

$$\frac{2dv}{v} + d\,l\,dq \cos. p^2 = \frac{Fgg\,dT^2 \text{ sin. } s}{2G\,v\,dq \cos. p}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$

Harum si binae se inuicem subtrahantur, remanebunt:

$d \cdot l \text{ tang } \Phi = \frac{Fggd\mathrm{T}^2 \sin.(r-\Phi)\sin.(q-\Phi)}{2Gvdq \cos. p \sin. \Phi \cos. \Phi} \left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$

$d \cdot l \frac{\text{tang. } p \sin. \Phi}{\sin.(q-\Phi)} = \frac{Fggd\mathrm{T}^2 (\sin. r \sin.(q-\Phi) - \sin. s \sin. \Phi)}{2Gvdq \cos. p \sin. \Phi} \left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$

Cum autem sit $\sin. A \cdot \sin. B = \frac{1}{2}\cos.(A-B) - \frac{1}{2}\cos.(A+B)$ erit, $\sin. r \sin.(q-\Phi) = \frac{1}{2}\cos.(s-\Phi) - \frac{1}{2}\cos.(q+r-\Phi)$ et $\sin. s \sin. \Phi = \frac{1}{2}\cos.(s-\Phi) - \frac{1}{2}\cos.(q-r+\Phi)$ ob $s = q-r$: ideoque $\sin. r \sin.(q-\Phi) - \sin. s \sin. \Phi = \frac{1}{2}\cos.(q-r+\Phi) - \frac{1}{2}\cos.(q+r-\Phi) = \sin. q \sin.(r-\Phi)$; quia vicissim est $\frac{1}{2}\cos A - \frac{1}{2}\cos. B = \sin. \frac{A+B}{2} \cdot \sin. \frac{B-A}{2}$. Quocirca posterior aequatio transmutabitur in hanc:

$d \cdot l \frac{\text{tang. } p \sin. \Phi}{\sin.(q-\Phi)} = \frac{Fggd\mathrm{T}^2 \sin. q \sin.(r-\Phi)}{2Gvdq \cos. p \sin. \Phi} \left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$

§. 19. Cum igitur sit $d \cdot l \text{ tang. } \Phi = \frac{d\Phi}{\sin. \Phi \cos. \Phi}$ prior ambarum aequationum inuentarum abibit in hanc,

$d\Phi = \frac{Fggd\mathrm{T}^2 \sin.(r-\Phi)\sin.(q-\Phi)}{2Gvdq \cos. \Phi} \left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$

Hucusque ergo aequatione perducta consideremus quod iam supra inuenimus, esse proxime $\frac{1}{u^3} = \frac{1}{f^3} + \frac{3v\cos. p \cos. s}{f^4}$. ideoque $\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3} = -\frac{3v\cos. p \cos. s}{f^3}$, quo valore introducto habebimus: $d\Phi = -\frac{3Fggd\mathrm{T}^2 \cos. s \sin.(r-\Phi)\sin.(q-\Phi)}{2Gf^3 dq}$

quia ergo celeritas lineae nodorum exprimitur per $\frac{d\Phi}{d\mathrm{T}}$ erit $\frac{d\Phi}{d\mathrm{T}} = -\frac{3Fggd\mathrm{T} \cos. s \sin.(r-\Phi)\sin.(q-\Phi)}{2Gf^3 dq}$

vbi notandum est, esse $\frac{dq}{d\mathrm{T}}$ celeritatem lunae secundum longitudinem. Hinc igitur erit celeritas lineae nodorum retrograda directe, vt cosinus distantiae lunae a sole, sinus distantiae solis a nodo, et sinus distantiae lunae a nodo coniunctim, reciproce vero, vt cubus distantiae

solis a terra, et celeritas lunae secundum longitudinem, ita vt motus lineae nodorum ab his quinque rebus memoratis pendeat. Haec expressio mirifice congruit cum determinatione Neutoni, quam tradit prop. XXX. lib. III. Princip. et quia hinc quouis momento celeritas lineae nodorum assignari potest, simul patebit motus horarius nodorum; propterea quod tempus vnius horae sine errore pro elemento temporis dT sumi potest. Si enim ponamus, solem motu medio in distantia a terra mediocri reuolui, quae distantia mediocris sit $= a$, ponamusque $\frac{(F+G)gg}{G} = cc$, et tempusculo $= dT$ solem angulum conficere $= d\omega$ erit per §. 11: $dT = \frac{ad\omega\sqrt{2a}}{c}$ et $dT^2 = \frac{2a^3 d\omega^2}{cc} = \frac{2Ga^3 d\omega^2}{(F+G)gg}$, qui valor in superiori aequatione substitutus dabit $d\Phi = \frac{3Fa^3 d\omega^2}{(F+G)ff} \cos. s \sin.(r-\Phi) \sin.(q-\Phi)$, ex qua expressione, si $d\omega$ sumatur pro motu horario medio solis nempe $2'$, $27''$, $50'''$, $37''''$ et dq pro motu horario lunae vero secundum longitudinem, tum $d\Phi$ dabit motum horarium verum nodorum lunae.

§. 20. Secundum Neutonum est ratio F ad G $=$ 227512 : 1 vnde pro fractione $\frac{F}{F+G}$ tuto vnitas scribi poterit: eritque ergo $d\Phi = \frac{3a^3 d\omega^2}{ff} \cos. s \sin.(r-\Phi) \sin.(q-\Phi)$. Quo hinc facilius motum nodorum eruamus, ponamus primum tam solem quam lunam circa terram motu vniformi moueri, eritque $f = a$; et dq denotabit motum medium horarium lunae secundum longitudinem, eritque $dq = 32'$, $58''$, $27'''$, 13^{IV}, vnde ob $d\omega = 2'$, $27''$, $50'''$, $37''''$, fiet $d\omega = 532237^{IV}$ et $dq = 7115233^{IV}$ ideoque $\frac{3d\omega^2}{dq} = 119437^{IV} = 33''$, $10'''$, 37^{IV}

ita vt sit motus horarius nodorum. $d\Phi = -$ cos. s sin. $(r-\Phi)$ sin. $(q-\Phi)$, 33″, 10‴, 37^{IV}. Nodi ergo celerrime mouentur, si singuli isti sinus sinui toti fiant aequales, quod primum euenit, si luminaria fuerint in coniunctione, et linea nodorum cum recta ad solem ducta GF angulum rectum constituat; tum vero idem contingit, si luminaria fuerint in oppositione, et linea nodorum ad GF pariter normalis: vtroque casu linea nodorum regreditur singulis horis 33″, 10‴, 37^{IV}; hicque est motus celerrimus retrogradus lineae nodorum. Tum vero motus nodorum prorsus euanescit tribus casibus, primo si luminaria quadrato aspectu se mutuo aspiciant, secundo si sol, et tertio, si luna in ipsa linea nodorum versetur. Fieri vero etiam potest, vt nodi in consequentia progrediantur, quod euenit, si cos. s sin. $(r-\Phi)$ sin. $(q-\Phi)$ negatiuum induit valorem; qui, quantus euadere possit, dum fit maximus, per methodum maximorum et minimorum inuenietur. Apparebit autem hoc euenire, primo si ambo luminaria sextilem aspectum teneant, et linea nodorum angulum FGE bifariam secet, secundo si luminaria in trigono fuerint constituta, et linea nodorum complementum anguli FGE ad duos rectos bisecet: vtroque casu celeritas nodorum in consequentia fiet maxima, et quia singuli sinus semissi radii fuerint aequales, motus horarius maximus in consequentia erit octaua pars motus celerrimi in antecedentia, atque id circo = 4″, 8‴, 50⁗.

§. 21. Cum igitur nodi multo celerius et saepius in antecedentia regrediantur, quam motu contrario in con-

conſequentia, hinc efficietur motus nodorum retrogradus; ad quem accurate definiendum neceſſe eſt, vt aequationis ſupra inuentae integrale inueſtigemus, hoc enim reperto facile erit ad quoduis tempus poſitionem lineae nodorum aſſignare. Hunc in finem tam motum verum ſolis quam lunae in calculum introduci oportet. Sit ergo diſtantia media ſolis a terra $= a$, excentricitas $= n$, et tempore propoſito anomalia excentrica ſolis $= \varrho$; quoniam angulus ω ſupra ad motum ſolis medium deſignandum eſt aſſumtus, erit primo $d\varrho\,(1 - n\,\text{cof.}\,\varrho) = d\omega$ ideoque $d\varrho = d\omega\,(1 + n\,\text{cof.}\,\varrho)$ neglectis terminis, in quibus fractio n plures obtinet dimenſiones, porro cum ſit anomalia vera proxime $= \varrho + n\,\text{ſin.}\,\varrho$ erit $dr = d\varrho\,(1 + n\,\text{cof.}\,\varrho)$ ideoque $dr = d\omega(1 + 2n\,\text{cof.}\,\varrho)$ atque $f = a\,(1 - n\,\text{cof.}\,\varrho)$. Deinde quamuis motus lunae non ſit adeo certus, ponamus eam in ellipſi vniformiter mobili circa terram ferri, diſcrepantia enim huius hypotheſis a veritate in praeſenit negotio non niſi minimum et prorſus inſenſibilem errorem parere poteſt. Sit ergo diſtantia lunae a terra media $= \alpha$; excentricitas $= m$, anomalia excentrica $= \xi$, et diſtantia vera a terra $= v$; ſit porro motus medius lunae ad motum medium terrae ſeu ſolis vt λ ad 1, erit vti ex obſeruationibus conſtat $\lambda = 13,3685$. Hinc orietur $d\xi\,(1 - m\,\text{cof.}\,\xi) = \lambda\,d\omega$ ideoque $d\xi = \lambda\,d\omega\,(1 + m\,\text{cof.}\,\xi)$, et anomalia vera $= \xi + m\,\text{ſin.}\,\xi$; vnde ſi motus abſidum medium ſtatuatur ad motum medium ſolis vt x ad 1, vbi ex motu apogaei medio fit $x = 0,112996$, cuius motus ſi ratio habeatur, fiet $dq = \lambda\,d\omega + 2\,(\lambda - x)\,m\,d\omega\,\text{cof.}\,\xi$. His

ergo valoribus in ſuperiori aequatione ſubſtitutis fit

$$d\Phi \frac{-3d\omega}{(1-n\cos.\rho)^3(\lambda+2(\lambda-\varkappa)m\cos.\xi)} \cos.(q-r)\sin.(r-\Phi)\sin.(q-\Phi)$$

vbi notandum eſt anomalias excentricas ϱ et ξ non ab apogaeo vt vulgo fieri ſolet, ſed a perigaeo eſſe acceptas.

§. 22. Sublatis autem fractionibus et neglectis terminis, in quibus excentricitates m et n vtpote valde paruae, plures habent dimenſiones, habebitur:

$$d\Phi = \frac{3d\omega}{\lambda}(1+3n\cos.\varrho)(1-\frac{2(\lambda-\varkappa)m}{\lambda}\cos.\xi)\cos.(q-r)\sin.(r-\Phi)\sin.(q-\Phi)$$

cuius integrale vt indagemus, conſideremus quantitatem $(1+3n\cos.\varrho)(1-\frac{2(\lambda-\varkappa)m}{\lambda}\cos.\xi)$ tanquam conſtantem, quoniam nunquam ſenſibiliter ab vnitate diſcrepat, ſitque breuitatis gratia:

$$(1+3n\cos.\varrho)(1-\frac{2(\lambda-\varkappa)m}{\lambda}\cos.\varrho) = i \text{ erit}$$

$$d\Phi = \frac{-3id\omega}{\lambda}\cos.(q-r)\sin.(r-\Phi)\sin.(q-\Phi)$$

Quoniam vero, vt ſupra vidimus, eſt $\sin.A\sin.B = \frac{1}{2}\cos.(B-A) - \frac{1}{2}\cos.(A+B)$ erit $\sin.(r-\Phi)\sin.(q-\Phi) = \frac{1}{2}\cos.(q-r) - \frac{1}{2}\cos.(q+r-2\Phi)$, quo valore ſubſtituto erit

$$d\Phi = \frac{-3id\omega}{2\lambda}(\cos.(q-r)\cos.(q-r) - \cos.(q-r)\cos.(q+r-2\Phi))$$

Porro cum ſit $\cos.A\cos.B = \frac{1}{2}\cos.(B-A)+\frac{1}{2}\cos.(B+A)$ fiet:

$$\cos.(q-r)\cos.(q-r) = \frac{1}{2}+\cos.2(q-r)$$

$$\cos.(q-r)\cos.(q+r-2\Phi) = \frac{1}{2}\cos.2(r-\Phi)+\frac{1}{2}\cos.2(q-\Phi)$$

ideoque habebimus:

$$d\Phi = \frac{-3id\omega}{4\lambda}(1+\cos.2(q-r)-\cos.2(r-\Phi)-\cos.2(q-\Phi)).$$

Quoniam nouimus, variabilitatem ipſius Φ longe minorem eſſe, quam ipſorum q et r, fingamus initio angu-

lum

lum Φ esse constantem in his cosinibus, et cum proxime sit $dq = \lambda d\omega$ et $dr = d\omega$ prodibit hoc integrale:
$\Phi = C - \frac{3i}{4\lambda}\left(\omega + \frac{\sin.2(q-r)}{2(\lambda-1)} - \frac{\sin.2(r-\Phi)}{2} - \frac{\sin.2(q-\Phi)}{2\lambda}\right)$
quod autem adhuc multiplici correctione indiget, primo quod angulum Φ constantem assumsimus, deinde quod sumsimus $dq = \lambda d\omega$ et $dr = d\omega$ cum reuera sit $dq = \lambda d\omega + 2(\lambda-\varkappa)md\omega$ cos. ξ et $dr = d\omega + 2nd\omega$ cos. ϱ tertio vero quod assumsimus quantitatem i constantem quae reuera est variabilis.

§. 23. Sit valor iste pro Φ inuentus veritati iam satis propinquus $= P$ ita vt sit
$P = C - \frac{3i}{4\lambda}\left(\omega + \frac{\sin.2(q-r)}{2(\lambda-1)} - \frac{\sin.2(r-\Phi)}{2} - \frac{\sin.2(q-\Phi)}{2\lambda}\right)$.
Quo iam correctio a variabilitate ipsius Φ oriunda inueniatur, differentietur P posito solo Φ variabili, sitque differentiale $= Q d\Phi$, erit vti ex natura integralium patet $\Phi = P - \int Q d\Phi$. At facta hac differentiatione fiet:
$Q d\Phi = \frac{3id\Phi}{4\lambda}\left(\text{cos. } 2(r-\Phi) - \frac{\cos.2(q-\Phi)}{\lambda}\right)$
Substituatur hic loco $d\Phi$ valor ante inuentus; eritque
$$Qd\Phi = \frac{-9ii}{16\lambda^2} d\omega \left(\begin{array}{l}\cos.2(r-\Phi) + \cos.2(r-\Phi)\cos.2(q-r) - \cos.2(r-\Phi)\cos.2(r-\Phi) \\ - \cos.2(r-\Phi)\cos.2(q-\Phi)\end{array}\right)$$
$$+ \frac{9ii}{16\lambda^3} d\omega \left(\begin{array}{l}\cos.2(q-\Phi) + \cos.2(q-\Phi)\cos.2(q-r) - \cos.2(q-\Phi)\cos.2(r-\Phi) \\ - \cos.2(q-\Phi)\cos.2(q-\Phi)\end{array}\right)$$
At per reductionem supra adhibitam, qua erat cos. A cos. $B = \frac{1}{2}$ cos. $(B - A) + \frac{1}{2}$ cos. $(B + A)$ fiet:
$$Qd\Phi = \frac{+9ii}{16\lambda^2} d\omega \left(\begin{array}{l}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos.4(r-\Phi) - \cos.2(r-\Phi) - \frac{1}{2}\cos.2(q-2r+\Phi) - \frac{1}{2}\cos.2(q-\Phi) \\ + \frac{1}{2}\cos.2(q-r) + \frac{1}{2}\cos.2(q+r-2\Phi)\end{array}\right)$$
$$\frac{-9ii}{16\lambda^3} d\omega \left(\begin{array}{l}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos.4(q-\Phi) - \cos.2(q-\Phi) - \frac{1}{2}\cos.2(r-\Phi) - \frac{1}{2}\cos.2(2q-r-\Phi) \\ + \frac{1}{2}\cos.2(q-r) + \frac{1}{2}\cos.2(q+r-2\Phi)\end{array}\right)$$
Si

Si nunc iterum vt ante in his angulis, quorum cosinus occurrunt, Φ tanquam constans spectetur ac sumatur $dq = \lambda d\omega$ et $dr = d\omega$ fiet integrando:

$$+\int Q d\Phi = \frac{9ii}{16\lambda^3}\left(\frac{1}{2}\omega + \frac{\sin.4(r-\Phi)}{8} - \frac{\sin.2(r-\Phi)}{2} - \frac{\sin.2(q-2r+\Phi)}{4(\lambda-2)} - \frac{\sin.2(q-\Phi)}{4\lambda} + \frac{\sin.2(q-r)}{4(\lambda-1)} + \frac{\sin.2(q+r-2\Phi)}{4(\lambda+1)}\right)$$
$$\frac{-9ii}{16\lambda^3}\left(\frac{1}{2}\omega + \frac{\sin.4(q-\Phi)}{8\lambda} - \frac{\sin.2(q-\Phi)}{2\lambda} - \frac{\sin.2(r-\Phi}{4} - \frac{\sin.2(2q-r-\Phi)}{4(2\lambda-1)} + \frac{\sin.2(q-r)}{4(\lambda-1)} + \frac{\sin.2(q+r-2\Phi)}{4(\lambda+1)}\right)$$

quae quantitas ad superiorem valorem ipsius P addi debet, vt prodeat valor ipsius Φ per variabilitatem ipsius Φ correctus. Perspicuum autem hic est pleroque terminos ob λ numerum $= 13,3685$ fieri vehementer parvos. Maximus enim inter sinus nempe $\frac{9ii}{32\lambda^3}\sin 2(r-\Phi)$ quando iste sinus fit radio aequalis, praebet tantum circiter $5'$. Quia vero ω data quantitate maius fieri potest, isti termini negligi nequeunt. Hinc itaque neglectis terminis nimis paruis fiet:

$$\Phi = C - \frac{3i\omega}{4\lambda}\left(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{8\lambda^2}\right.$$
$$- \frac{3i\sin.2(q-r)}{8\lambda(\lambda-1)}\left(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{8\lambda^2}\right)$$
$$+ \frac{3i\sin.2(r-\Phi)}{8\lambda}\left(1 - \frac{3}{4\lambda} - \frac{3}{8\lambda^2}\right) + \frac{9}{128\lambda^2}\sin.4(r-\Phi)$$
$$\left. + \frac{3i\sin.2(q-\Phi)}{8\lambda^2}\left(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{4\lambda^2}\right)\right.$$

posito scilicet in terminis exiguis $i = 1$.

§. 24. Quia autem differentialia ipsorum q et r hactenus non sunt assumta completa, inquiramus, quanta correctio exinde oriatur. Hancobrem differentiemus primo quantitatem P posito solo q variabili, et loco dq scribamus $2(\lambda-\varkappa)m\,d\omega\cos.\xi$ seu ob $\varkappa$ respectu λ satis parvum

vum ponamus $dq = 2\lambda m d\omega \cos.\xi$, eritque

$$dP = \frac{-3i}{4\lambda} d\omega \left(\frac{2\lambda m \cos.\xi}{\lambda-1} \cos.2(q-r) + 2m \cos.\xi \cos.2(q-\Phi)\right)$$

cuius integrale subtrahi debet a iam inuento. Productis autem his cosinuum ad simplices cosinus reductis fiet

$$dP = \frac{-3imd\omega}{4\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\cos.(2q-2r-\xi) + \frac{\lambda}{\lambda-1}\cos.(2q-2r+\xi) + \cos.(2q-\xi-2\Phi) + \cos.(2q+\xi-2\Phi)\right)$$

Cum iam proxime sit $dq = \lambda d\omega$ et $d\xi = \lambda d\omega$ fiet integrale $=$

$$\frac{-3im}{4\lambda}\left(\frac{\sin.(2q-2r-\xi)}{\lambda-1} + \frac{\sin.(2q-2r+\xi)}{3(\lambda-1)} + \frac{\sin.(2q-\xi-2\Phi)}{\lambda} + \frac{\sin.(2q+\xi-2\Phi)}{3\lambda}\right)$$

quae expressiones, cum sit $m = 0,1414$, dum fiunt maximae vix duo minuta producunt. Posito ergo $i = 1$, ad expressionem supra inuentam insuper addi debet.

$$\frac{3m}{4\lambda}\left(\frac{4\sin.2(q-r)\cos.\xi - 2\cos.2(q-r)\sin.\xi}{3(\lambda-1)} + \frac{4\sin.2(q-\Phi)\cos.\xi - 2\cos.2(q-\Phi)\sin.\xi}{3\lambda}\right)$$

Simili modo differentietur P posito tantum r variabili, at pro dr ponatur $2nd\omega\cos.\varrho$; prodibitque

$$dP = \frac{-3i}{4\lambda}\left(\frac{-2\lambda d\omega \cos.\varrho}{\lambda-1}\cos.2(q-r) + 2nd\omega\cos.\varrho\cos.2(r-\Phi)\right) \text{ seu}$$

$$dP = \frac{-3ind\omega}{4\lambda}\left(\frac{-\cos.(2q-2r-\varrho)-\cos.(2q-2r+\varrho)}{\lambda-1} + \cos.(2r-\varrho-2\Phi) + \cos.(2r+\varrho-2\Phi)\right)$$

cuius integrale ob $dr = d\omega$ et $d\varrho = d\omega$ erit.

$$-\frac{3in}{4\lambda}\left(\frac{\sin.(2q-2r-\varrho)}{3(\lambda-1)} + \frac{\sin.(2q-2r+\varrho)}{\lambda-1} + \sin.(2r-\varrho-2\Phi) + \frac{\sin.(2r+\varrho-2\Phi)}{3}\right)$$

Ergo ex hoc capite ad valorem ipsius Φ ante inuentum insuper addi debebit

$$\frac{3n}{4\lambda}\left(\frac{4\sin.2(q-r)\cos.\varrho + 2\cos.2(q-r)\sin.\varrho}{3(\lambda-1)} + \frac{4\sin.2(r-\Phi)\cos.\varrho - 2\cos.2(r-\Phi)\sin.\varrho}{3}\right)$$

§. 25. Restat denique vt correctionem ex variabilitate ipsius i oriundam inuestigemus. Quoniam ergo est $i = 1 + 3n\cos.\varrho - \frac{2(\lambda-\varkappa)}{\lambda} m \cos.\xi$ erit $di = -3nd\omega \sin.\varrho + 2(\lambda-\varkappa)md\omega \sin.\xi$. Differentiato ergo ipso P posito tantum i variabili, proueniet

$$d\mathrm{P} = +\frac{3\,d\omega}{4\lambda}\Big(+3n\omega\sin.\varrho-\frac{3n\sin.\varrho\sin.2(q-r)}{2(\lambda-1)}+\frac{3n\sin.\varrho\sin.2(r-\Phi)}{2}+\frac{3n\sin.\varrho\sin.2(q-\Phi)}{2\lambda}$$
$$-\frac{3(\lambda-\varkappa)m\,d\omega}{4\lambda}\Big(2\omega\sin.\xi\,\frac{\sin.\xi\sin.2(q-r)}{\lambda-1}+\sin.\xi\sin.2(r-\Phi)+\frac{\sin.\xi\sin.2(q-\Phi)}{\lambda}$$

cuius integrale quoque a valore ipsius Φ supra inuento subtrahi debet. Est autem ob $d\varrho = d\omega : \int\omega\,d\omega\sin.\varrho = -\omega\cos.\varrho+\sin.\varrho$ et $\int\omega\,d\omega\sin.\xi = -\frac{\omega}{\lambda}\cos.\xi+\frac{\sin.\xi}{\lambda\lambda}$. Cum igitur sit

$$d\mathrm{P} = \frac{3n\,d\omega}{4\lambda}\Big(\omega\sin.\varrho+\frac{\cos.(2q-2r-\varrho)-\cos.(2q-2r+\varrho)}{4(\lambda-1)}+\frac{\cos.(2r-\varrho-2\Phi)-\cos.(2r+\varrho-2\Phi)}{4}+\frac{\cos.(2q-\varrho-2\Phi)-\cos.(2q+\varrho-2\Phi)}{4\lambda}\Big)$$
$$-\frac{3(\lambda-\varkappa)m\,d\omega}{2\lambda}\Big(\omega\sin.\xi+\frac{\cos.(2q-2r-\xi)-\cos.(2q-2r+\xi)}{4(\lambda-1)}+\frac{\cos.(2r-\xi-2\Phi)-\cos.(2r+\xi-2\Phi)}{4}+\frac{\cos.(2q-\xi-2\Phi)-\cos.(2q+\xi-2\Phi)}{4\lambda}\Big)$$

Huius integrale erit :

$$\frac{3n}{4\lambda}\Big(-\omega\cos.\varrho+\sin.\varrho+\frac{\sin.(2q-2r-\varrho)}{4(\lambda-1)(2\lambda-3)}-\frac{\sin.(2q-2r+\varrho)}{4(\lambda-1)(2\lambda-1)}+\frac{\sin.(2r-\varrho-2\Phi)}{4}-\frac{\sin.(2r+\varrho-2\Phi)}{12}+\frac{\sin.(2q-\varrho-2\Phi)}{4\lambda(2\lambda-1)}-\frac{\sin.(2q+\varrho-2\Phi)}{4\lambda(2\lambda+1)}\Big)$$
$$-\frac{3(\lambda-\varkappa)m}{2\lambda}\Big(\frac{-\omega\cos.\xi}{\varkappa}+\frac{\sin.\xi}{\lambda\lambda}+\frac{\sin.(2q-2r-\xi)}{4(\lambda-1)(\lambda-2)}-\frac{\sin.(2q-2r+\xi)}{4(\lambda-1)(3\lambda-2)}+\frac{\sin.(2r-\xi-2\Phi)}{4(2-\lambda)}-\frac{\sin.(2r+\xi-2\Phi)}{4(2+\lambda)}+\frac{\sin.(2q-\xi-2\Phi)}{4\lambda\lambda}-\frac{\sin.(2q+\xi-2\Phi)}{12\lambda\lambda}\Big)$$

His autem debite dispositis et terminis nimis paruis reiectis reperietur

$$\Phi = \mathrm{C}-\frac{3\omega}{4\lambda}\Big(1-\frac{3}{8\lambda}-\frac{3}{8\lambda\lambda}\Big)-\frac{9n\sin.\varrho}{4\lambda}+\frac{3m\sin.\xi}{2\lambda^3}$$
$$-\frac{3\sin.n.2(q-r)}{8\lambda(\lambda-1)}\Big(-\frac{3}{8\lambda}-\frac{3}{8\lambda^2}\Big)$$
$$+\frac{3\sin.2(r-\Phi)}{8\lambda}\Big(1-\frac{3}{4\lambda}-\frac{3}{8\lambda\lambda}\Big)+\frac{9}{128\lambda^3}\sin.4(r-\Phi)$$
$$+\frac{3\sin.2(q-\Phi)}{8\lambda\lambda}\Big(1-\frac{3}{8\lambda}-\frac{3}{4\lambda\lambda}\Big).$$

§. 26. Huius expressionis pars prior $\mathrm{C}-\frac{3\omega}{4\lambda}\Big(1-\frac{3}{8\lambda}-\frac{3}{8\lambda\lambda}\Big)$ pendet a solo tempore a data epocha iam elapso ; ideoque

oque dat motum nodorum medium; reliqui termini, qui pendent ab anomaliis ſolis et lunae, itemque horum corporum ſitu tum inter ſe tum reſpectu lineae nodorum, exhibebunt correctiones loci nodorum medii ſeu eius aequationes, quas perpendemus, poſtquam, motum medium definiuerimus. Primum autem poſito $\omega = 360°$, prodibit motus nodorum medius tempore vnius anni ſiderei: cum autem ſit $\lambda = 13,3685$ erit $1 - \frac{3}{2\lambda} - \frac{3}{2\lambda\lambda} = 0,9698506$ fiet motus nodorum annuus $= 19,5878$ graduum in antecedentia, quod eſt $= 19°, 35', 16''$. Tabulae autem aſtronomicae pro hoc tempore plus non exhibent quam $19°, 20', 32''$, ideoque motus ex theoria definitus ſuperat obſeruatum $14', 44''$, ſeu eius parte $\frac{1}{72}$ fere. Differentia haec nimis quidem exigua eſt, quam vt theoriam in ſuſpicionem adducere poſſit; interim tamen eo magis operae pretium eſt hanc diſcrepantiam perpendere, quod Neutonus ſuo, quo vtitur ratiocinio, eum ipſum motum nodorum medium adipiscitur, quem obſeruationes exhibent. Conſiderat autem primum orbitam lunae tanquam circularem, hincque fere eundem motum medium nimis magnum deducit, quem hic inuenimus, vti patet ex eius prop. XXX. lib. III. propoſitione vero ſequente vbi ellipſin in locum circuli ſubſtituit, motum priorem diminuit in ratione axis transuerſi ad coniugatum nempe 70 ad 69, ſicque ad conſenſum cum experientia proxime accedit. Praeterquam autem quod lunam in ellipſi, in cuius centro, non foco alterutro, poſita ſit terra, moueri aſſumit, in quo ipſo ab experientia recedit, integratio noſtra clare euincit motum medium ab ellipticitate orbitae lunaris non affici; ſi quidem

terra in foco ellipsis collocetur. Neque vero etiam termini in integratione omissi hunc motum medium diminuerent, quin potius si quantitas superior $\int Q d\Phi$ accuratius inuestigetur, accederent termini motum nodorum medium adhuc aliquantillum, sed insensibiliter, adaugentes. Quare in nulla alia re causa dissensus calculi nostri ab observationibus situs esse potest, nisi in valore ipsius dq, quem contra indolem motus lunae ex ellipsi deduximus. Hinc iste defectus perfecte suppleri ante non poterit, quam ipse motus lunae in sua orbita ad calculum fuerit reuocatus. Sufficiat ergo hic annotasse, motum nodorum medium hic inuentum parte sua $\frac{1}{79}$ diminui oportere, quo cum veritate conspirans reddatur. Coefficiens ergo $1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{8\lambda\lambda}$, qui erat $= 0,9698506$, sua parte $\frac{1}{79}$ minui debebit, eritque propterea $= 0,957693$; cuius logarithmus est $= 9,9812263$.

§. 27. Inuento ergo loco medio lineae nodorum ad quoduis tempus propositum ex aequatione $\Phi = C - \frac{3\omega}{4\lambda}\left(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{8\lambda\lambda}\right)$, ad quod negotium tabula mediorum motuum lineae nodorum est accommodata; iste locus pluribus aequationibus corrigi debet, quo verus obtineatur. Prima scilicet aequatio oritur ex termino $\frac{-n\,9\,\text{sin.}\,\varrho}{4\lambda}$, pendetque ab anomalia excentrica solis, quae est medium arithmeticum proxime inter anomaliam mediam et veram. Quia autem discrimen inter anomaliam mediam et veram solis est vehementer exiguum, pro ϱ sine errore adhiberi poterit anomalia media solis a perigaeo computata. Quodsi autem more consueto anomalia media ab apogaeo sumatur, eius sinus negatiue sumi debet. Hinc si ϱ denotet

tet anomaliam mediam ſolis ad locum nodi medium, addi debet angulus ex iſta expreſſione $\frac{9n\sin.\varrho}{4\lambda}$ oriundus; ſicque haec aequatio ab apogaeo ſolis vsque ad perigaeum ſit addenda, a perigaeo autem ad apogaeum ſubtrahenda. Haec aequatio ergo ſit maxima, ſi anomalia media ſolis ſit 90°, vel 270°, tumque ob $n=0,01690$ et $\lambda=13,3685$, valebit 586″ ſeu 9′, 46″ pro aliis autem anomaliis decreſcit in ratione earum ſinuum. In tabulis Leadbetteri haec aequatio ſinui anomaliae mediae ſolis proportionalis quoque occurrit, maxima vero aequatio ibi eſt tantum 9′, 30″, a noſtra deficiens 16″.

§. 28. Secunda aequatio $\frac{3m\sin.\xi}{2\lambda^2}$ proportionalis eſt ſinui anomaliae excentricae ſeu mediae lunae, quae ſi ab apogaeo computetur, ſubtrahi debet a loco nodi dum luna ab apogaeo ad perigaeum progreditur, dum autem a perigaeo ad apogaeum reuertitur, addi debet. Maxima aequatio hinc oriunda eſt tantum 18″, et hancobrem in calculo aſtronomico ſine ſenſibili errore praetermittitur, neque etiam eius mentio in vllis tabulis aſtronomicis occurrit.

§. 29. Tertia aequatio oritur ex termino $\frac{-3\sin.2(q-r)}{8\lambda(\lambda-1)}$ $(1-\frac{3}{8\lambda}-\frac{3}{8\lambda\lambda})$ ac propterea proportionalis eſt ſinui duplae diſtantiae lunae a ſole, ſubtrahatur ſcilicet locus ſolis a loco lunae, et differentia duplicata dabit eum angulum, cuius ſinui haec aequatio eſt proportionalis. Haec ergo aequatio erit maxima in octantibus, atque tum valebit 475 ſeu 7′, 55″, ex qua pro reliquis aſpectibus aequationes facile definiuntur. Ceterum a nouilunio vsque ad primam quadraturam haec aequatio debet ſubtrahi, indeque ad oppoſitionem addi, porro transeundo ab oppoſitione ad

quadraturam iterum debet ſubtrahi, et ab vltima quadratura ad coniunctionem addi. Vel breuius hoc modo: dum luna a ſyzygiis ad quadraturas procedit, haec aequatio debet ſubtrahi, dum autem luna a quadraturis ad ſyzygias tranſit, debet addi. Occurrit quidem in tabulis Leadbetteri aequatio ſub hoc nomine, quae ſinui duplae diſtantiae ſolis a luna eſt proportionalis, cuius maxima correctio eſt $1°, 45', 0''$. Verum haec aequatio confundi videtur cum ſequente, quae a diſtantia ſolis a nodo pendet; vt mox videbimus. Praetermittitur ergo vulgo haec aequatio, etſi ea locum nodi ad $8'$ fere mutare poſſit. Verum quoniam haec aequatio in ſyzygiis, vbi locum nodi quam accuratiſſime noſſe oportet, euaneſcit, in reliquis autem occaſionibus locum lunae non ſenſibiliter afficit, error ex eius praetermiſſione oriundus non ſentitur.

§. 30. Quartam aequationem nodi lunae ſuppeditat iſte terminus, $\frac{+1 \sin. 2(r-\Phi)}{8\lambda}\left(1 - \frac{3}{4\lambda} - \frac{3}{8\lambda\lambda}\right)$, cum quo ob ſimilitudinem nominis iſte $\frac{9}{128\lambda\lambda} \sin. 4(r-\Phi)$ coniungi poteſt: quia ambo a diſtantia ſolis a nodo pendent, prior quidem ab eius duplo, alter ab eius quadruplo. Huius aequationis pars prior, poſtquam ſol a nodo eſt progreſſus vsque ad nonageſimum gradum, debet addi, a nonageſimo vero gradu vsque ad ſequentem nodum, aequatio debet ſubtrahi, maxima autem fit aequatio dum ſol a linea nodorum angulo $45°$ diſtat; tumque eſt $5449''$ ſeu $1°, 30', 49''$, cum qua aequatione ſine dubio confunditur ea, quam Leadbetter refert ad diſtantiam lunae a ſole. Altera pars huius aequationis, quae cum priori in eadem

eadem tabula comprehendi poteſt, addi debet a tranſitu ſolis vel a nodo vel a quadrato nodi vsque ad 45°, reliquis caſibus ſubtrahi: maxima autem eſt dum ſol vel a linea nodorum vel a recta illam normaliter ſecante diſtat angulo 22°, 30′, hocque caſu eſt 1′, 21″.

§. 31. Quinta aequatio petenda eſt ex termino $\frac{+1 \sin. 2(q-\Phi)}{8\lambda\lambda}\left(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{4\lambda\lambda}\right)$ ideoque pendet a diſtantia lunae a nodo et quia ſinui huius duplae diſtantiae eſt proportionalis, dum luna a nodo recedit vsque ad maximam inclinationem, ad locum medium addi debet, a quadrato autem nodi vsque ad ipſam lineam nodorum debet ſubtrahi. Maxima autem fit haec aequatio, dum luna a linea nodorum angulo ſemirecto diſtat, quo caſu eſt: 6′, 58″. Cum igitur hae tres vltimae aequationes, ſi ſingulae fiant maximae, coniunctim conſtituant 1°, 45′, 42″, veriſimile eſt eas in tabulis Leadbetteri, in vnicam ſub titulo duplae diſtantiae ſolis a luna eſſe collectas, qui error tolerari poſſet, ſi modo iſti tabulae titulus duplae diſtantiae ſolis a nodo praefigeretur; quoniam aequatio hinc oriunda eſt maxima. Ceterum plures aliae aequationes inſuper huc adduci poſſent, quae autem, quoniam tantum in minutis ſecundis, merito praetermittuntur: cum ipſa formula differentialis et integratio iam ſit ita comparata, vt ad veritatem tantum proxime accedat, ibique iam minuta ſecunda ſint neglecta. Hancobrationem hic quoque correctio ex anomalia media lunae reſultans tuto omittitur, reliquae autem quatuor aequationes neceſſario retinentur; quoniam locum nodorum ad plura minuta prima mutare valent. Ex his quatuor correctionibus

bus duae tantum vt iam notauimus, in tabulis aſtronomicis recentiſſimis reperiuntur inſertae, hincque ex hoc capite tabulae aſtronomicae non mediocri emendatione indigent.

§. 32. Determinato loco nodi ſupereſt, vt variationem inclinationis orbitae lunae ad eclipticam, quam vocauimus $= \theta$, inueſtigemus. Ad hoc in ſubſidium vocanda eſt poſterior aequatio, quae §. 18 erat inuenta:

$$d.l\frac{\text{tang.}p.\text{ſin.}\Phi}{\text{ſin.}(q-\Phi)} = \frac{Fgg\,dT^2\,\text{ſin.}q.\text{ſin.}(r-\Phi)}{2\,C\,v\,dq\,\text{coſ.}p\,\text{ſin.}\Phi}\left(\frac{1}{ff}-\frac{f}{u^3}\right)$$

ſeu cum proxime ſit $\frac{1}{ff}-\frac{f}{u^3} = \frac{-3v\,\text{coſ.}p\,\text{coſ.}s}{f^3}$, erit

$$d.l\frac{\text{tang.}p.\text{ſin.}\Phi}{\text{ſin.}(q-\Phi)} = \frac{-3Fgg\,dT^2\,\text{ſin.}q\,\text{coſ.}s\,\text{ſin.}(r-\Phi)}{2\,C\,f^3\,dq\,\text{ſin.}\Phi}$$

At antè oſtendimus eſſe $\frac{\text{tang.}p}{\text{ſin.}(q-\Phi)} = \text{tang}\,\theta$, vnde fiet

$$d.l\,\text{tang.}\,\theta.\text{ſin.}\Phi = d.l\,\text{tang.}\,\theta + \frac{d\Phi\,\text{coſ.}\Phi}{\text{ſin.}\Phi} = \frac{-3\,Fgg\,dT^2\,\text{ſin.}q\,\text{coſ.}s\,\text{ſin.}(r-\Phi)}{2\,C\,f^3\,dq\,\text{ſin.}\Phi}$$

Quod ſi autem ponamus ſolem ſecundum motum medium circa terram in diſtantia $= a$, tempore dT angulum $d\omega$ abſoluere, fiet $dT^2 = \frac{2Ca^3\,d\omega^2}{Fgg}$; ideoque

$$d.l\,\text{tang.}\,\theta = \frac{-d\Phi\,\text{coſ.}\Phi}{\text{ſin.}\Phi} = \frac{3\,a^3\,d\omega^2\,\text{ſin.}q\,\text{coſ.}s\,\text{ſin.}(r-\Phi)}{f^3\,dq\,\text{ſin.}\Phi}$$

At in §. 20 erat:

$$d\Phi = \frac{-3\,a^3\,d\omega^2\,\text{coſ.}s\,\text{ſin.}(r-\Phi)\,\text{ſin.}(q-\Phi)}{f^3\,dq}$$ hincque obtinebitur

$$d.l\,\text{tang.}\,\theta = \frac{3\,a^3\,d\omega^2\,\text{coſ.}s\,\text{ſin.}(r-\Phi)}{f^3\,dq\,\text{ſin.}\Phi}(\text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,(q-\Phi) - \text{ſin.}\,q)$$

at eſt $\text{ſin.}\,q = \text{ſin.}\,(q-\Phi)\,\text{coſ.}\,\Phi + \text{coſ.}\,(q-\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi$, quo ſubſtituto fit

$$d.l\,\text{tang.}\,\theta = \frac{-3\,a^3\,d\omega^2\,\text{coſ.}s\,\text{ſin.}(r-\Phi)\,\text{coſ.}(q-\Phi)}{f^3\,dq}$$

Quia vero eſt $\text{ſin.}\,A\,\text{coſ.}\,B = \frac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(A+B) - \frac{1}{2}\text{ſin.}\,(B-A)$ erit $\text{ſin.}\,(r-\Phi)\,\text{coſ.}\,(q-\Phi) = \frac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(q+r-2\Phi) - \frac{1}{2}$ ſin. $(q-r)$ quod per $\text{coſ.}\,s = \text{coſ.}\,(q-r)$ multiplicatum

dat

dat: $\frac{1}{4}\sin. 2(q-\Phi) + \frac{1}{4}\sin. 2(r-\Phi) - \frac{1}{4}\sin. 2(q-r)$: hincque erit

$$d.l\tang.\theta = \frac{-3a^3}{4j^3}\frac{d\omega^2}{dq}\left(\sin. 2(q-\Phi) + \sin. 2(r-\Phi) - \sin. 2(q-r)\right)$$

Cuius formulae integrale si fuerit $= R$ erit $l\tang.\theta = C + R$ et $\tang.\theta = Ce^R$, et quia R erit quantitas valde parua, erit proxime $\tang.\theta = C(1+R)$

§. 33. Si ponamus vt supra $\lambda : 1$ pro ratione medii motus lunae ad medium motum solis, atque statuamus $dr = d\omega$ et $dq = \lambda d\omega$ neglectis aberrationibus exiguis ab his valoribus, erit

$$d.l\tang.\theta = \frac{-3d\omega}{4\lambda}\left(\sin. 2(q-\Phi) + \sin. 2(r-\Phi) - \sin. 2(q-r)\right)$$

cuius integrale, si Φ tanquam constans consideretur erit.

$$l\tang.\theta = lC + \frac{3}{8\lambda}\left(\frac{\cos. 2(q-\Phi)}{\lambda} + \cos. 2(r-\Phi) - \frac{\cos. 2(q-r)}{\lambda-1}\right)$$

Variabilitas autem ipsius Φ hic parum mutat, quia angulus θ ipse est satis paruus, interim tamen si eius rationem habere velimus, differentiemus expressionem inuentam posito Φ tantum variabili, eritque

$$\frac{3d\Phi}{4\lambda}\left(\frac{\sin. 2(q-\Phi)}{\lambda} + \sin. 2(r-\Phi)\right).$$ Cum autem sit

$$d\Phi = \frac{3d\omega}{4\lambda}\left(1 + \cos. 2(q-r) + \cos. 2(q-\Phi) + \cos. 2(r-\Phi)\right)$$

abibit illud differentiale in hanc formam:

$$\frac{9d\omega}{8\lambda\lambda}\left(\frac{\sin. 2(q-\Phi)}{\lambda} + \sin. 2(r-\Phi) + \frac{\sin. 2(2q-r-\Phi)}{2\lambda} + \frac{\sin. 2(r-\Phi)}{2\lambda} + \frac{\sin. 2(q-\Phi)}{2}\right.$$
$$\left. - \frac{\sin. 2(q-2r+\Phi)}{2} + \frac{\sin. 4(q-\Phi)}{2\lambda} + \frac{\sin. 2(q+r-2\Phi)}{2} - \frac{\sin. 2(q-r)}{2}\right.$$
$$\left. + \frac{\sin. 2(q+r-2\Phi)}{2\lambda} + \frac{\sin. 2(q-r)}{2\lambda} + \frac{\sin. 4(r-\Phi)}{2}\right\}.$$

Cuius integrale, quod a superiore valore ipsius $l\tang.\theta$ subtrahi debet est

$$-\frac{9}{16\lambda\lambda}\left(\frac{\cos. 2(q-\Phi)}{4\lambda} + \frac{\cos. 2(q-\Phi)}{2\lambda} + \frac{\cos. 2(r-\Phi)}{2} + \frac{\cos. 2(r-\Phi)}{4\lambda} - \frac{\cos. 2(q-r)}{4(\lambda-1)} + \frac{\cos. 2(q-r)}{4\lambda(\lambda-1)}\right)$$

neglectis reliquis terminis vtpote vehementer exiguis.

Hinc ergo erit

$$l \text{ tang. } \theta = lC + \tfrac{5}{16}\cos.2(r-\Phi)\left(1+\tfrac{7}{12}+\tfrac{5}{16}\right) + \tfrac{5}{16}\cos.2(q-\Phi)\left(1+\tfrac{7}{12}+\tfrac{3}{16}\right) - \tfrac{1}{16}\cos.2(q-r)\left(1+\tfrac{3}{12}-\tfrac{1}{16}\right)$$

Posito ergo brevitatis gratia $l \text{ tang. } \theta = lC + R$ erit ob R valde parvum $\text{tang. } \theta = C(1+R)$. Si $R = 0$ fiat inclinatio $\theta = k$, reliquis casibus sit $\theta = k + u$, erit $C = \text{tang. } k$ et $\text{tang. } \theta = \text{tang. } k + \frac{u}{\cos.k^2} = \text{tang. } k + R \text{ tang. } k$; unde fit $u = R \sin. k \cos. k = \frac{1}{2} R \sin. 2k$. Cognito ergo valore medio inclinationis k ad quodvis tempus correctio, quae ad eam vel addi vel ab ea subtrahi debet invenietur: quae aequatio addenda si ponatur $= u$, erit

$$u = \tfrac{5}{16}\left(1+\tfrac{7}{12}+\tfrac{5}{16}\right)\sin.2k\cos.2(r-\Phi) = 0{,}0148312\sin.2k\cos.2(r-\Phi)$$
$$+\tfrac{5}{16}\left(1+\tfrac{7}{12}+\tfrac{3}{16}\right)\sin.2k\cos.2(q-\Phi) + 0{,}0010182\sin.2k\cos.2(q-\Phi)$$
$$-\tfrac{1}{16}\left(1+\tfrac{3}{12}-\tfrac{1}{16}\right)\sin.2k\cos.2(q-r) - 0{,}0011164\sin.2k\cos.2(q-r)$$

§. 34. Si et sol et luna versentur in linea nodorum, omnes hi anguli evanescunt, fitque $u = 0{,}0147491 \sin. 2k$, hocque casu inclinatio orbitae ad ecliptican erit maxima. Sin autem et sol et luna a linea nodorum distent angulo recto, ita vt sit $q - \Phi = 90°$ et $r - \Phi = 90°$, et $q - r = 0$, inclinatio omnium erit minima, fit autem $u = -0{,}0170771 \sin. 2k$. Differentia ergo inter inclinationem maximam et minimam erit $0{,}031826 \sin. 2k$. In plerisque autem tabulis astronomicis statuitur minima lunae inclinatio $= 4°, 59', 35''$; unde fit $k - 0{,}0170771 \sin. 2k = 4°, 59', 35''$, hincque $k = 5°, 10'', 7''$, et $l \sin. 2k = 9{,}2539340$. Maxima

ergo

ergo inclinatio, dum ambo luminaria in linea nodorum verſantur erit $= 5°, 19', 13''$. Ceterum ad inclinationem quouis tempore definiendam triplici aequatione erit opus, quae vel addi debent vel ſubtrahi ab inclinatione media $5°, 10', 7''$. Harum aequationum prima, quae reliquas binas magnitudine multum excedit, pendet a diſtantia ſolis a nodo, huiuſque duplae diſtantiae coſinui eſt proportionalis, quae aequatio dum fit maxima erit $9', 9''$. Secunda aequatio proportionalis eſt coſinui duplae diſtantiae lunae a nodo, et dum fit maxima praebet $40''$. Tertia aequatio coſinui duplae diſtantiae ſolis a luna eſt proportionalis, et dum fit maxima, erit $43''$, vnde patet has duas poſteriores aequationes ſine ſenſibili errore in praxi omitti poſſe, ita vt prima ſola a diſtantia ſolis a nodo pendens ſufficere poſſit. Cum autem tabulae maximam inclinationem orbitae lunaris tantum $5°, 17', 20''$ conſtituant, valor ipſius k diminui debet, ſtatuamus ergo $k = 5°, 8', 45''$, vt ſit l ſin. $2k = 9{,}252025$, eritque inclinatio maxima $= 5°, 17', 48''$, et minima $= 4°, 58', 16''$. Quamuis autem haec differentia inter inclinationem maximam ac minimam ſit maior quam tabulae exhibent, duobus fere minutis primis, tamen ideo non in ſuſpicionem cadit, cum quoniam in tabulis binae reliquae aequationes negliguntur, tum quia per obſeruationes vehementer eſt difficile hos limites exactiſſime conſtituere.

QVANTVM MOTVS TERRAE A LVNA PERTVRBETVR ACCVRATIVS INQVIRITVR.

AVCTORE
Leonhardo Eulero.

§. 1.

Cum luna perpetuo ad terram vrgeatur, quaecunque huius ſollicitationis ſit cauſa, neceſſe eſt vt terra ſimili quadam vi verſus lunam nitatur. Si enim ſol, a cuius vi motus lunae maxime perturbatur, e medio tolleretur, atque terra cum luna tantum in vniuerſo relinqueretur, dubium eſt nullum, quin terrae et lunae commune centrum grauitatis vel quiesceret, vel vniformiter in directum progreſſurum eſſet. Hinc dum luna circa terram reuolueretur, vtrumque corpus ſimili quodam motu circa centrum grauitatis gyraretur; atque, ſi vires tenerent rationem reciprocam duplicatam diſtantiarum, tam terra quam luna in ſectione conica alterum focum in communi grauitatis centro habente, moueretur. Sin autem tam terra quamluna motu omni priuaretur, recta ad ſe inuicem accederent, et in communi centro grauitatis conuenirent. Vnde ſequitur vires accelerantes, quibus terra et luna ſollicitantur, ipſis horum corporum maſſis reciproce fore proportionales, ita vt vis, qua luna ad terram acceleratur, ſe habitura ſit ad vim, qua terra viciſſim ad lunam concitatur vti maſſa ſeu quantitas materiae in terra con-

tentae

tentae ad maſſam lunae. Quodſi ergo maſſa terrae ſit $=T$, et maſſa lunae $=L$, atque vis acceleratrix, qua luna ad terram incitatur, ponatur $=V$, erit vis acceleratrix, qua terra ad lunam vrgebitur $=\frac{LV}{T}$. Cum igitur vis V ſit cognita, ex ea quoque vis, qua terra ad lunam ſollicitatur, cognoſcetur, ſi modo ratio inter maſſas terrae et lunae fuerit nota.

§. 2. Vis autem acceleratrix V, qua luna ad terram pellitur, facile ad grauitatem naturalem in ſuperficie terrae comparatur. Indicetur enim vis grauitatis naturalis vnitate, ſitque radius terrae $=r$, et diſtantia lunae a terra $=z$, quoniam vires decreſcunt in ratione duplicata diſtantiarum, erit vis, qua luna terram verſus acceleratur, $=\frac{rr}{zz}=V$; hincque ergo vis, qua terra lunam verſus impellitur, erit $=\frac{Lrr}{Tzz}$, ſeu ſe habebit ad grauitatem naturalem vti $\frac{Lrr}{Tzz}$ ad 1. Cum igitur terra continuo tanta vi ad lunam vrgeatur viribus, quibus ad ſolem trahitur, non perfecte obediet, neque idcirco in ellipſi reuoluetur, cuius alter focus ſit in centro ſolis conſtitutus. In ſuperiori quidem diſſertatione, vbi novas tabulas pro motu ſolis condere ſum conatus, aſſumſi commune centrum grauitatis terrae et lunae in ellipſi circa ſolem in eius foco exiſtentem reuolui, atque ex loco lunae aberrationem centri terrae ab iſta ellipſi ad quodvis tempus aſſignaui. Verum quanquam haec hypotheſis ad veritatem proxime accedit, atque adeo perfecte conveniret, ſi vires diſtantiis directe eſſent proportionales, tamen operae pretium videtur, in hunc ipſum errorem, quo iſta hypotheſis a veritate recedit, diligentius inquire-

re. Hunc in finem nulla communis centri grauitatis ratione habita, deuiationem terrae de orbita elliptica ex ipsis sollicitationibus lunae inuestigabo, quod negotium ad maxime complicatos calculos deducit, cum illa hyppothesis rem facillime expediuisset.

§. 3. Quo autem vim, qua terra a luna sollicitatur, cognoscamus, necesse est, vt ratio, quam massa lunae ad massam terrae tenet, inuestigetur. Si quidem assumamus corpus lunae ex simili materia esse conflatum, atque terram, ratio illa erit triplicata rationis diametrorum. Quare cum sit diameter terrae ad diametrum lunae vti 365 ad 100, foret massa terrae ad massam lunae vti 4863 ad 100 seu vt 48 ad 1 proxime. Neutonus quidem ex phaenomenis aestus maris terram tricies nouies tantum grauiorem luna constituit, verum Celeb. Daniel Bernoulli in sua eximia de aestu maris dissertatione ostendit vim lunae multo esse minorem, quam Neutonus statuisset, ita vt ratio 48 ad 1 *propius ad veritatem* accedat, quam ratio 39 ad 1. In hac autem comparatione ad vim solis simul spectatur, quae a distantia solis a terra pendet. Ostendi autem in dissertatione de diminutione motus planetarum, si parallaxis soli horizontalis assumatur 13″, vim solis in distantia 320, 708 r ipsi grauitati fore aequalem; quare si haec distantia 320, 708 r ponatur $= f$, et massa solis $= S$ erit $\frac{S}{ff} = \frac{T}{rr}$; ideoque $S = 102854\,T = \frac{ffT}{rr}$. Quod si autem distantia solis a terra ponatur $= c$, et distantia lunae a terra $= b$, ad mare commouendum est vis solis ad vim lunae vt $\frac{S}{c^2}$ ad $\frac{L}{b^2}$ hoc est vt $\frac{Tff}{c^2 rr}$ ad $\frac{L}{b^2}$. Quare si vis lunae fuerit

ad

ad vim solis vt n ad 1, erit $\frac{L}{b^2}$ ad $\frac{Tff}{c^3rr}$ vt n ad 1, hincque $L:T=nffb^3:c^3rr$ vnde si sit $n=4$ Neutonus deduxit $L:T=1:39$ manet enim ratio ff ad c^3 quaecunque parallaxis assumatur, perpetuo eadem, sin autem esset, vt Cel. Bernoullii statuit $n=3$, vel tantum $2\frac{2}{3}$ foret $L:T=1:52$ seu $1:62$; inter quas rationes illa, quam ex mole lunae deduximus, medium quoddam a veritate fortasse non multum remotum tenet.

§. 4. Cognita ergo vi lunae motum terrae perturbante siue potius ea, quasi esset cognita, assumta, ipsum motum terrae inuestigemus. Quiescat ergo sol in S, cuius massa sit $=S$, circa quem reuoluatur terra in orbita ATB, cuius media a sole distantia sit $=c$: massa autem terrae sit $=T$; statuatur in A terrae aphelium et in B perihelium, quatenus quidem eius motus a luna non perturbaretur. Elapso iam tempore $=t$, postquam terra ex aphelio A est egressa, peruenerit in locum T, vocenturque distantia $ST=z$, et angulus $AST=\Phi$. Luna autem nunc versetur in L, ita vt a coniunctione solis distet angulo $STL=\theta$, quem angulum cum tempore t vniformiter crescere assumamus, quoniam variationes a motus lunae inaequalitate oriundae sensibiles esse nequeunt, ob eandemque rationem distantiam lunae a terra LT tanquam constantem considerabimus sitque $LT=e$; et ipsa lunae massa $=L$. Posito iam radio terrae $=r$, et vi grauitatis $=1$, terra primum ad solem vrgebitur vi $=\frac{Srr}{Tzz}$; tum vero ad lunam vi $=\frac{Lrr}{Tee}$. Ex T ad AB ducatur normalis TP, et TV ipsi AB parallela, viresque sollicitantes secundum has directiones re-

Tab. XVI. Fig. 3.

reſoluantur. A vi ergo ſolis terra in directione TP ſollicitabitur vi acceleratrice $= \frac{Srr\,\text{ſin.}\,\Phi}{Tzz}$, et in directione TV vi $= \frac{Srr\,\text{cos.}\,\Phi}{Tzz}$. Deinde ob angulum $LTV = \theta + \Phi$, a vi lunae terra in directione TP vrgebitur vi $= \frac{Lrr\,\text{ſin.}\,(\theta+\Phi)}{Tee}$, et in directione TV vi $= \frac{Lrr\,\text{cos.}\,(\theta+\Phi)}{Tee}$. Omnino ergo terra incitabitur ſecundum directionem TP vi $= \frac{Srr\,\text{ſin.}\,\Phi}{Tzz} + \frac{Lrr\,\text{ſin.}\,(\theta+\Phi)}{Tee}$, et ſecundum directionem TV vi $= \frac{Srr\,\text{cos.}\,\Phi}{Tzz} + \frac{Lrr\,\text{cos.}\,(\theta+\Phi)}{Tee}$.

§. 5. Ponatur $SP = x$ et $PT = y$, vt ſit $x = z\,\text{cos.}\,\Phi$, et $y = z\,\text{ſin.}\,\Phi$, atque motus terrae reſoluatur ſecundum directiones Tp et Tt, quae ſint coordinatis SP et PT parallelae, eritque ob elementum temporis $= dt$, celeritas terrae ſecundum directionem $Tp = \frac{dx}{dt}$ ſeu $TV = -\frac{dx}{dt}$, quia abſciſſa SP progrediente luna diminuitur: et celeritas terrae ſecundum directionem $Tt = \frac{dy}{dt}$. *Hinc* ille motus requirit vim acceleratricem in directione $Tp = \frac{2ddx}{dt^2}$ ſeu in directione $TV = -\frac{2ddx}{dt^2}$: iſte autem motus requirit vim acceleratricem in directione $Tt = \frac{2ddy}{dt^2}$ ſeu in directione $TP = -\frac{2ddy}{dt^2}$, ſumto elemento temporis dt conſtante. His igitur viribus aequales ſtatuantur illae vires, quibus terra ſecundum has directiones neuera ſollicitari inuenta eſt, ſicque prodibunt duae ſequentes aequationes

$$-\frac{2ddx}{dt^2} = \frac{Srr\,\text{cos.}\,\Phi}{Tzz} + \frac{Lrr\,\text{cos.}\,(\theta+\Phi)}{Tee}$$

$$-\frac{2ddy}{dt^2} = \frac{Srr\,\text{ſin.}\,\Phi}{Tzz} + \frac{Lrr\,\text{ſin.}\,(\theta+\Phi)}{Tee}$$

At

At cum sit $x = z\cos.\Phi$ et $y = z\sin.\Phi$ erit:

$dx = dz\cos.\Phi - zd\Phi\sin.\Phi$; $dy = dz\sin.\Phi + zd\Phi\cos\Phi$

$ddx = ddz\cos.\Phi - 2dzd\Phi\sin.\Phi - zdd\Phi\sin\Phi - zd\Phi^2\cos\Phi$

$ddy = ddz\sin.\Phi + 2dzd\Phi\cos.\Phi + zdd\Phi\cos.\Phi - zd\Phi^2\sin.\Phi$

qui valores in aequationibus illis substituti dabunt:

$$ddz\cos.\Phi - 2dzd\Phi\sin.\Phi - zdd\Phi\sin.\Phi - zd\Phi^2\cos.\Phi = -\frac{rrdt^2}{2T}\left(\frac{S\cos.\Phi}{zz} + \frac{L\cos.(\theta+\Phi)}{ee}\right)$$

$$ddz\sin.\Phi + 2dzd\Phi\cos.\Phi + zdd\Phi\cos\Phi - zd\Phi^2\sin\Phi = -\frac{rrdt^2}{2T}\left(\frac{S\sin\Phi}{zz} + \frac{L\sin.(\theta+\Phi)}{ee}\right)$$

Ex his ergo duabus aequationibus definiri debet relatio inter tres quantitates variabiles z, Φ et t quoniam θ a t pendens assumimus.

§. 6. Harum aequationum inuentarum prior multiplicetur per $\sin.\Phi$, posterior vero per $\cos.\Phi$, haecque ab illa subtrahatur quo facto prodibit:

$$-2dzd\Phi - zdd\Phi = \frac{Lrrdt^2\sin.\theta}{2Tee}.$$

est enim $\sin.(\theta+\Phi)\cos.\Phi - \cos.(\theta+\Phi)\sin.\Phi = \sin.\theta$. Deinde quia est $\cos.\theta+\Phi)\cos\Phi + \sin(\theta+\Phi)\sin.\Phi = \cos\theta$, si aequatio prior per $\cos.\Phi$ posterior vero per $\sin.\Phi$ multiplicetur ambaeque inuicem addantur, reperitur.

$$ddz - zd\Phi^2 = -\frac{rrdt^2}{2T}\left(\frac{S}{zz} + \frac{L\cos.\theta}{ee}\right)$$

Ponatur nunc breuitatis gratia $\frac{Srr}{Tcc} = m$; denotante c distantiam mediam terrae a sole seu potius semilatus rectum, quod ob excentricitatem valde paruam a distantia media non multum discrepabit, erit ob $S = \frac{Tff}{rr}$, $m = \frac{ff}{cc} = 0,000408587$. Deinde sit $\frac{Lrr}{Tee} = n$, et, si $\frac{L}{T} = \frac{1}{x}$ atque $e = 60r$ reperietur $n = 0,00000579$, ita vt sit,

$n = \frac{m}{70}$ circiter. Secundum mentem Neutoni foret $n = \frac{m}{57}$ et secundum Bernoullium $n = \frac{m}{81}$. Erit ergo n prae m quantitas satis parua, vt quantitates multo minores quam n facile reiici queant. Introductis autem his duabus litteris m et n aequationes ante inuentae transibunt in sequentes.

$$2dzd\Phi + zdd\Phi = -\tfrac{1}{2}ndt^2 \sin.\theta \text{ et}$$
$$ddz - zd\Phi^2 = -\tfrac{1}{2}dt\left(\frac{mcc}{zz} + n\cos.\theta\right)$$

in quibus aequationibus differentialibus secundi gradus differentiale dt assumtum est constans; quod in integratione probe est obseruandum.

§. 7. Si luna prorsus abesset, aequatio prior fieret:

$$2dzd\Phi + zdd\Phi = 0.$$

quae per z multiplicata et integrata praebet:

$$zzd\Phi = A\,dt$$

denotante A quantitatem quampiam constantem. Altera autem aequatio hoc casu quo $n = 0$ abit in hanc

$$ddz - zd\Phi^2 = -\frac{mccdt^2}{2zz}.$$

At ex priori est $d\Phi^2 = \frac{A^2dt^2}{z^4}$, quo valore substituto fit

$$ddz = \frac{A^2dt^2}{z^3} - \frac{mccdt^2}{2zz}$$

quae multiplicata per dz et integrata dabit ob dt constans:

$$\tfrac{1}{2}dz^2 = \frac{mccdt^2}{2z} - \frac{A^2dt^2}{2zz} - \frac{Bdt^2}{z}$$

seu $dt = \frac{zdz}{\sqrt{(mccz - AA - Bzz)}}$

et $d\Phi = \frac{Adz}{z\sqrt{(mccz - AA - Bzz)}}$

Ponatur $z = \frac{cc}{u}$ erit $d\Phi = \frac{-Adu}{\sqrt{(mc^4u - AAuu - Bc^4)}}$

Si iam constantes A et B ita determinentur, vt sit $AA = \frac{mc^3}{2}$ seu $A = c\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}$ et $B = \frac{m(cc-kk)}{2c}$ inuenietur $u = a - k\cos.\Phi$. Posito ergo $\Phi = 0$, erit $u = c - k$ et distantia

ſtantia aphelii a ſole $AS = \frac{cc}{c-k}$. Verum poſito $\Phi = 180°$, fiet diſtantia perihelii a ſole $BS = \frac{cc}{c+k}$, vnde axis transuerſus $AB = \frac{2c^3}{cc-kk}$, et diſtantia focorum $= \frac{2cck}{cc-kk}$ porroque axis coniugatus $= \frac{2cc}{\sqrt{(cc-kk)}}$ et parameter $= 2c$ vti aſſumſimus.

§. 8. Accedente autem vi lunae, cum ex priori aequatione ſit:

$$2dzd\Phi + zddd\Phi = -\tfrac{1}{2}ndt^2 \text{ ſin. } \theta.$$

erit ob n numerum valde paruum proxime ſaltem

$$zzd\Phi = Adt = cdt\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}.$$

et quia orbita terrae fere eſt circularis, ſi pro z ponatur c, erit $d\Phi = \frac{dt\sqrt{m}}{\sqrt{2c}}$, cuius aberratio a veritate tam eſt parua, vt in termino per ſe minimo $\frac{1}{2}ndt^2$ ſin. θ discrimen ſenſibile non producat. Simili modo in hoc termino ratio $d\theta$ ad $d\Phi$ cenſeri poteſt conſtans, ſcilicet ratione motus medii lunae a ſole ad motum medium ſolis quae ratio cum ſit 12, 368314 : 1, ponatur compendii cauſa $i = 12,368314$ eritque $d\theta = id\Phi$ proxime. Multiplicetur nunc aequatio per z erit

$$2zdzd\Phi + zzddd\Phi = -\tfrac{1}{2}nzdt^2 \text{ ſin. } \theta.$$

Hic autem in termino per ſe minimo $\frac{1}{2}nzdt^2$ ſin. θ ponatu $z = c$, et loco dt ſcribatur $\frac{d\Phi\sqrt{2c}}{\sqrt{m}} = \frac{d\theta\sqrt{2c}}{i\sqrt{m}}$ eritque

$$2zdzd\Phi + zzddd\Phi = -\frac{ncdtd\theta \text{ ſin. } \theta}{2i\sqrt{m}}\sqrt{2c}$$

cuius integrale ob dt conſtans eſt:

$$zzd\Phi = cdt\sqrt{\tfrac{1}{2}mc} + \frac{ncdt \text{ coſ. } \theta}{2i}\sqrt{\frac{2c}{m}}$$

ſeu $$zzd\Phi = cdt\sqrt{\tfrac{1}{2}mc} + \frac{ncdt \text{ coſ. } \theta}{im}\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}$$

Eſt autem area AST $= \frac{1}{2}\int z z d\Phi$, vnde ob $dt = \frac{d\theta\sqrt{2c}}{i\sqrt{m}}$ erit:

Area AST $= \frac{1}{2}ct\sqrt{\frac{1}{2}mc} + \frac{nc\,c\,\sin.\theta}{2iim}$

ſeu $\frac{1}{2}ct\sqrt{\frac{1}{2}mc} =$ Ar: AST $- \frac{nc\,c\,\sin.\theta}{2iim}$.

§. 9. Vi lunae ergo primum efficitur, vt tempora non amplius ſint areis proportionalia. Scilicet tempus quo terra ab aphelio A ad T peruenit non proportionale eſt areae AST, ſed huic areae minutae ſpatiolo quopiam, quod ſit vt ſinus anguli STL. Hinc quamuis orbita terrae nullam haberet excentricitatem, tamen eius motus non foret vniformis, ſed modo citius modo tardius incederet. Ponamus tempus vnius anni eſſe $= \odot$ $= 365,242305$ dierum, tum niſi luna motum perturbaret, tempore t angulum deſcripſiſſet AST $= \frac{t}{\odot}$ 360°. Ob lunam autem hic angulus AST aliquanto erit maior, qui exceſſus vt pateat, pro area AST ponatur valor $\frac{1}{2}cc\Phi$ et cum, ſi luna abeſſet, foret $\frac{1}{2}cc\Phi = \frac{1}{2}ct\sqrt{\frac{1}{2}mc}$, ſeu $\Phi = t\sqrt{\frac{m}{2c}} = \frac{t}{\odot}\cdot 360°$, nunc luna ſimul vrgente erit $\frac{1}{2}cc\Phi = \frac{1}{2}ct\sqrt{\frac{1}{2}mc} + \frac{nc\,c\,\sin.\theta}{2iim}$, ideoque

ang. AST $= \Phi = \frac{t}{\odot}\cdot 360° + \frac{n\sin.\theta}{iim}$.

Ad angulum ergo $\frac{t}{\odot}\cdot 360°$, quem motus medius praebet inſuper addi debet angulus $\frac{n\sin.\theta}{iim}$; hic ſcilicet angulus ab coniunctione vſque ad oppoſitionem ad locum terrae medium addi, dum autem luna ab oppoſitione ad coniunctionem reuertitur, ſubtrahi debebit. Haec ergo correctio maxima erit in quadraturis, vbi erit $= \frac{n}{iim}$; quae quanta ſit videamus. Cum ſit $i = 12,368314$, et $\frac{m}{n} = 70$: fiet $\frac{n}{iim} = 0,000093385$, quae eſt menſura anguli

anguli: $19''$, $15'''$ Sin autem Neutoni valore $\frac{m}{n} = 57$ essemus vsi, hic angulus prodiisset $= 23''$, $40'''$, cum tamen consideratio centri grauitatis tantum $15''$ pro hac aequatione praebuisset. At si cum Bernoullio sumamus $\frac{m}{n} = 88$ fiet iste angulus $= 15''$, $19'''$, ita vt, si haec hypothesis esset veritati consentanea, tabulae nostrae solares manerent saluae, sin autem Neutoni sententia esset vera, correctiones nostrarum tabularum forent nimis paruae plus quam semisse, etiamsi eae Neutoni hypothesi sint superstructae. Vnde patet considerationem centri grauitatis effectum lunae nimis paruum exhibere.

§. 10. Cum igitur inuenerimus hanc aequationem

$$zzd\Phi = c\,dt\left(1 + \tfrac{n\cos.\theta}{im}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}$$

atque posito $z = \frac{cc}{u}$ pro altera aequatione

$$ddz - z\,d\Phi^2 = -\tfrac{1}{2}dt^2\left(\tfrac{mcc}{zz} + n\cos.\theta\right)$$

proxime satisfaciat $u = c - k\cos.\Phi$, ponamus reuera esse $u = c - k\cos.\Phi + P$. Primum ergo pro z substituatur $\frac{cc}{u}$, ac prior aequatio transibit in hanc:

$$c^3 d\Phi = uu\,dt\left(1 + \tfrac{n\cos.\theta}{im}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}$$

posterior vero in hanc:

$$\frac{-ccddu}{uu} + \frac{2ccdu^2}{u^3} - \frac{cc\,d\Phi^2}{u} + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\tfrac{muu}{cc} + n\cos.\theta\right) = 0$$

seu multiplicando per u^4 erit

$$-cc\,uu\,ddu + 2cc\,u\,du^2 - cc\,u^3 d\Phi^2 + \tfrac{1}{2}u^4 dt^2\left(\tfrac{muu}{cc} + n\cos.\theta\right) = 0$$

At ex illa aequatione est:

$$c^6 d\Phi^2 = \tfrac{1}{2}mc\,u^4 dt^2\left(1 + \tfrac{n\cos.\theta}{im}\right)^2 \text{ ideoque}$$

$$\tfrac{1}{2}u^4 dt^2 = \tfrac{c^5 d\Phi^2}{m} : \left(1 + \tfrac{n\cos.\theta}{im}\right)^2 = \tfrac{c^5 d\Phi^2}{m} - \tfrac{2nc^5 d\Phi^2 \cos.\theta}{imm}$$

reiectis sequentibus terminis vtpote nimis paruis; vnde

fit $-cc\,uu\,dd\,u + 2\,cc\,u\,du^2 - ccu^3\,d\Phi^2 + c^3uu\,d\Phi^2 + \frac{n\,c^3\,d\Phi^2\,cos.\theta}{m}(cc - \frac{2uu}{i}) = 0$. Cum autem sit $u = c - k\,cos.\,\Phi + P$ erit $du = kd\Phi\,sin.\,\Phi + dP$ et $ddu = kdd\Phi\,sin.\,\Phi + kd\Phi^2\,cos.\,\Phi + ddP$. His autem valoribus loco du et ddu substitutis et per cc divisis, erit, postquam in terminis per se minimis vbique loco u scriptum fuerit c ob k valde paruum:

$$ddP + Pd\Phi^2 = \frac{nc\,d\Phi^2\,cos.\theta}{m}(1 - \frac{2}{i})$$

in qua aequatione ob positum $z = c$, et n valde parvum elementum $d\Phi$ tanquam constans spectari potest. Indeque ergo reperitur $P = \frac{-nc(i-2)cos.\theta}{mi((ii-1)}$

§. 11. Cum igitur inuento valore ipsius P sit:

$u = c - k\,cos.\,\Phi - \frac{nc(i-2)cos.\theta}{mi(ii-1)}$ erit

$z = \frac{cc}{c - k\,cos.\Phi} + \frac{nc(i-2)cos.\theta}{mi(ii-1}$.

Ex tabulis ergo pro ellipsi computatis quaeratur more consueto distantia terrae a sole, tum vero *ad eam* addatur particula $\frac{nc(i-2)cos.\theta}{mi(ii-1)}$, sicque vera prodibit distantia solis a terra. A coniunctione ergo vsque ad primam quadraturam distantia ex tabulis inuenta augeri debet, tum vero a prima quadratura vsque ad alteram minui, atque a quadratura altera ad coniunctionem vsque denuo augeri. Conueniunt haec apprime cum titulis in tabulis solaribus inuentis, vbi etiam correctiones distantiae cosinui distantiae lunae a sole repertae sunt proportionales; tantum ergo supereſt, vt videamus, quantum vera quantitas harum correctionum ab illis differat. Hunc in finem indagemus aequationem maximam, quae erit $= \frac{nc(i-2)}{mi(1+ii)}$. Posito ergo $c = 100000$ ob $i = 12,368314$, erit

$i-2 = 10,368314$, et $ii-1 = 151,9752$, atque adeo $\frac{c(i-2)}{2(ii-1)} = 551,6005$ in hypotheſi $\frac{m}{n} = 70$ haec correctio eſt $= 7,8800$ et in hypotheſi Neut. $\frac{m}{n} = 57$ ea eſt $= 9,6772$ et in hypotheſi Bernoulliana $\frac{m}{n} = 88$ ea fit $= 6,2682$. Atque ſecundum hanc vltimam hypotheſin correctio maxima pro logarithmo diſtantiae ſolis a terra, qui ad ſex figuras decimales exhiberi ſolet, futura eſſet 27, cum in tabulis noſtris ſit 31. ex Neutoniana vero hypotheſi haec correctio prodiret $= 42$; ita vt tabulae noſtrae non multum a veritate abludant, ſi quidem aſſumamus veritatem intra hypotheſes Neutoni, et Bernoulli, quod quidem eſt veriſimillimum conſiſtere.

§. 12. Facilius valor litterae P, qua correctio diſtantiae terrae a ſole continetur, inueniri poteſt, ſi excentricitas orbitae negligatur. Cum enim excentricitas ſit valde parua, ea in valore ipſius P nullam mutationem inferet. Quamobrem cum excentricitas pendeat a littera k ſumamus $k = 0$, eritque ſi luna non adeſſet $z = c$, accedente autem luna ſit $z = c + P$, eritque P quantitas minima nullam ſenſibilem mutationem patiens, etiamſi excentricitas coniungatur. Poſito autem $z = c + P$ ob $zz = cc + 2cP$ reiecto termino PP ob paruitatem, prima aequatio abibit in hanc formam:

$$c\,d\Phi + 2P\,d\Phi = dt\left(1 + \frac{n\,\text{cof.}\,\phi}{im}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}$$

poſterior vero in hanc:

$$dd\,P - c\,d\Phi^2 - P\,d\Phi^2 = -\tfrac{1}{2}\,dt^2\left(m - \frac{2mP}{c} + n\,\text{cof.}\,\phi\right)$$

Verum ſi luna abeſſet, foret $c\,d\Phi = dt\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}$, et $\tfrac{1}{2}m\,dt^2 = c\,d\Phi^2$, qui valor in terminis per ſe minimis adhiberi poteſt

poteſt, pro maioribus vero erit

$$\tfrac{1}{2} m c dt^2 \left(1 + \tfrac{2n\cos.\theta}{im}\right) = cc d\Phi^2 + 4cP d\Phi^2$$

ſeu $\tfrac{1}{2} m dt^2 = d\Phi^2 \left(c + 4P - \tfrac{2nc\cos.\theta}{im}\right)$, quo valore in altera aequatione ſubſtituto habebitur.

$$dd P - P d\Phi^2 = -4P d\Phi^2 + \tfrac{2ncd\Phi^2 \cos.\theta}{im} + 2P d\Phi^2 - \tfrac{ncd\Phi^2 \cos.\theta}{m}$$

ſeu $dd P + P d\Phi^2 = \tfrac{2ncd\Phi^2 \cos.\theta}{im} - \tfrac{ncd\Phi^2 \cos.\theta}{m}$

ad cuius integrale inueniendum, quia $d\theta = i d\Phi$, et $d\Phi$ conſtans aſſumi poteſt, ponatur $P = \alpha c \cos.\theta$, erit $dP = -\alpha i c d\Phi \sin.\theta$ et $dd P = -\alpha ii c d\Phi^2 \cos.\theta$, quibus valoribus ſubſtitutis aequatio per $cd\Phi^2 \cos.\theta$ diuiſa erit:

$$-\alpha ii + \alpha = \tfrac{2n}{im} - \tfrac{n}{m} = \tfrac{n(i-2)}{im}$$

ideoque $\alpha = \tfrac{n(i-2)}{mi(ii-1)}$ et $P = \tfrac{nc(i-2)\cos.\theta}{mi(ii-1)}$

vti ante inuenimus.

§. 13. Cum igitur excentricitas in valorem ipſius P non ingrediatur, atque ſublata luna inuentum ſit $z = \tfrac{cc}{c - k\cos.\Phi}$ erit, ſi vis lunae motum terrae afficiat:

$$z = \tfrac{cc}{c - k\cos.\Phi} + \tfrac{nc(i-2)}{mi(ii-1)} \cos.\theta$$

qui valor in aequatione prius inuenta ſubſtitutus praebebit

$$\tfrac{c^2 d\Phi}{(c - k\cos.\Phi)^2} + \tfrac{2ncc d\Phi (i-2)\cos.\theta}{mi(ii-1)(c - k\cos.\Phi)} = dt\left(1 + \tfrac{n\cos.\theta}{mi}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2} mc}$$

Quae aequatio reiectis terminis minimis tranſibit in hanc

$$dt\sqrt{\tfrac{1}{2} mc} = \tfrac{c^2 d\Phi}{(c - k\cos.\Phi)^2} - \tfrac{ncd\Phi\cos.\theta}{mi} + \tfrac{2ncd\Phi(i-2)\cos.\theta}{mi(ii-1)}$$

Ex qua ad datum tempus t verus angulus AST definietur. Ponamus ſi luna euaneſceret, tempori t reſpondere anomaliam veram v, eritque $dt\sqrt{\tfrac{1}{2} mc} = \tfrac{c^2 dv}{(c - k\cos.v)^2}$ nunc autem accedente luna ſit angulus $AST = \Phi = v + \omega$, erit $\tfrac{c^2 d\Phi}{(c - k\cos.\Phi)^2} = \tfrac{c^2 dv}{(c - k\cos.v)^2} + c d\omega$ proxime, quia tam k quam

quam ω sunt quantitates minimae, his ergo valoribus substitutis fiet:

$$0 = d\omega - \frac{nd\Phi\cos\theta}{mi}\left(1 - \frac{2(i-2)}{2i-1}\right)$$

et integrando ob $d\Phi = \frac{d\theta}{i}$ habebitur:

$$\omega = \frac{n\sin.\theta}{mii}\left(1 - \frac{2(i-2)}{2i-1}\right) = \frac{n\sin.\theta}{m}.\ 0,00564505.$$

Tantus ergo angulus ad anomaliam veram ex tabulis ellipticis inuentam v addi debet, qui aliquanto minor est eo, quem supra §. 9. nulla ipsius orbitae variationis habita ratione elicuimus. Correctio ergo haec fit maxima dum luna in quadraturis versatur eritque tum, vbi sin. $\theta = 1$, aequalis angulo, cuius mensura est $= \frac{n}{m}.$ 0,00564505. Quare pro variis hypothesibus fractionis $\frac{m}{n}$ haec correctio maxima sequenti modo se habebit

si $\frac{m}{n} = 57$ erit $\omega = 20'', 25'''$

si $\frac{m}{n} = 70$ erit $\omega = 16'', 38'''$

si $\frac{m}{n} = 88$ erit $\omega = 13'', 14'''$

§. 14. Propter lunam ergo locus solis ex tabulis ellipticis inuentus duplici modo corrigi debet, quorum alter spectat longitudinem solis in ecliptica, alter distantiam solis a terra. Primo scilicet correctio longitudinis solis ita se habet, vt dum luna a coniunctione solis ad oppositionem progreditur addi contra vero a plenilunio vsque ad nouilunium a loco solis subtrahi debeat: haecque correctio est sinui distantiae lunae a syzygiis proportionalis, vnde innotescit si modo correctio maxima, quae quadraturis respondet, fuerit cognita. Vidimus autem hanc correctionem pro variis hypothesibus sequenti modo se habere:

Hypotheſis			Maxima correctio loci ſolis in ecliptica
Neutoniana	$\frac{m}{n}$	$= 57$	$20'', 25'''$
ex Volumine	$\frac{m}{n}$	$= 70$	$16'', 38'''$
Bernoulliana	$\frac{m}{n}$	$= 88$	$13'', 14'''$

Deinde diſtantia ſolis a terra inuenta ex tabulis ita debet corrigi, vt ea ab vltimo quadrante vſque ad priorem, quo tempore minor lunae pars quam ſemiſſis eſt illuminata, augeri, a prima autem quadratura ad alteram, quo tempore maior lunae portio quam ſemiſſis illuminata ſpectatur, minui debeat. Eſt vero haec correctio coſinui anguli, quo luna a ſyzygiis diſtat, proportionalis: maxima ergo eſt in ipſis ſyzygiis, vbi logarithmus diſtantiae ſolis a terra, qui ad 6 notas poſt characteriſticam ſequentes exhiberi ſolet, ſequentibus numeris vel augeri vel diminui debet.

Hypotheſis			Maxima Correctio Log. diſtantiae ſolis a terra
Neutoniana	$\frac{m}{n}$	$= 57$	42
ex Volumine	$\frac{m}{n}$	$= 70$	34
Bernoulliana	$\frac{m}{n}$	$= 88$	27.

§ 15. In tabulis autem meis ſolaribus, vbi has correctiones ex conſideratione communis centri grauitatis terrae et lunae elicui, quanquam hypotheſi Neutoniana ſum vſus, tamen eas notabiliter minores obtinui, quam hic prodierunt. Namque maxima correctio loci ſolis in ecliptica ibi erat $15''$, cum hic ex eadem hypotheſi $20'', 25'''$ ſit inuenta; atque maxima correctio logarith-

rithmi distantiae solis a terra ibi erat 31, hic vero 42 quarum vtraque hic fere triente maior est quam ibi. Ex quo intelligitur commune centrum grauitatis terrae et lunae non secundum regulas Keplerianas in ellipsi incedere, vti tum assumseram. Quanquam autem iam ibi inueram, hoc principium examen geometricum non sustinere, tamen eius aberratio non tanta videbatur, quanta nunc est reperta. Hancobrem tabulae illae solares, si hypothesis Neutoniana veritati esset consentanea, vtique emendatione indigerent: at cum Neutonus lunae vim nimis magnam facere videatur, emendatio ista tabulas magis a veritate abduceret. Si enim has tabulas ad mentem Celeb. Bernoullii, qui vim lunae in ratione 8 ad 5 fere minuit, sequi vellem, correctiones ibi adhibitas aliquantillum imminuere deberem. Quare si veritas intra hos duos quasi limites contineatur, atque valor $\frac{m}{n}$ aliquantillum maior sit quam 70, puta 75 tum eae ipsae correctiones proditurae essent, quae in tabulis sunt vsurpatae. Talis autem hypothesis propius ad mentem Cel. Bernoullii accederet, atque corpus lunae paulisper tantum rarius esset terra; quae ambae rationes tantum ponderis habere videntur, vt tabulae ante traditae adhuc nulla emendatione indigeant; hancque ob causam eas immutatas relinquo.

OBSERVATIO
ECLIPSEOS SOLARIS
d. 25 Iulii 1748 Tubingae facta.
a Georgio Wolffg. Krafft.

Imago ſolis, cum maculis in eo haerentibus, circa horam 9 a. m. erecta.

Tab. XVII. Fig. 1.

Inſtrumenta huic obſeruationi adhibita fuerunt 1. Tubus terreſtris 4 pedum, optimae notae, obiecta erecta ſiſtens, cuius vitrum oculare fumo erat obductum. 2. Horologium portatile Londinenſe, ſingula minuta prima oſtendens; ad quod corrigendum inſeruiit. 3. Quadrans ligneus, radii 1 pedis, in quo ſinguli gradus diuiſi ſunt in ſuos quadrantes; quo et altitudo meridiana, et reliquae ad corrigendum horologium neceſſariae, a me fuerunt captae. 4. Thermometrum Fahrenheitiano modo diuiſum, et ab inſigni artifice Amſtelodamenſi Prinz elaboratum. His itaque obſeruaui

Tempore correcto medio ante mer.			
9^b	58′	Initium Eclipſeos in A	
10	10	Contingit Lunae diſcus maculam	*a.*
	52	— — — —	*b.*
11	2	— — — —	*c.*
	9	— — — —	*d.*
	25	— — — —	*e.*
	54	Deſerit Lunae diſcus maculam	*c.*
poſt merid.			
22	4	— — — —	*b.*

Nubes

Nubes Solem abſcondunt.

37 Deſerit Lunae diſcus maculam *d*.

57 — — — — *e*.

1 10 Finis Eclipſeo in B.

Thermometrum, ſoli libero durante tota Eclipſi expoſitum, monſtrauit paullo ante initium Eclipſeos 98 gradus; circa medium Eclipſeos autem 82 gradus; ita vt ex frigore, durante Eclipſi oborto, per gradus 16 depreſſum fuerit. Poſt finem Eclipſeos autem breui tempore iterum aſcendit ad gradus 100. Vitrum cauſticum amplitudinis 3 poll. circa medium Eclipſeos viſum fuit, multo minus virium habere in comburendo aſſere laeuigato, abietino, et, ex naturali colore, albo.

Solis altitudo meridiana deprehenſa fuit 61° 0′. Barometri altitudo hoc tempore erat 28 $\frac{51}{100}$ pollicum Londinenſ. duo decimalium.

DE ABERRATIONE FIXARVM.

AVCTORE
Chr. Nic. de Winsheim.

Quae ſequuntur de aberratione fixarum computanda praecepta, e commentariis Pariſinis aliorumque doctiſſimorum virorum ſcriptis, in vſum obſeruatorii Petropolitani in ordinem redacta, vel ideo hic exhibere viſum fuit, quoniam fallimur, aut nonnullis ob ſimplicitatem ſolam ſe commendabunt.

Manuductio
ad calculum aberrationis ſtellarum fixarum quoad Declinationem.

Ante omnia exacte determinanda ſunt elementa calculi, ſc. Longitudo, Latitudo, Aſcenſio recta et Declinatio, e catalogo quodam fixarum melioris notae e. g. Maraldi, Flamſteedii (ad initium anni, pro quo calculus inſtituitur) deſumenda.

α) Determinandus eſt angulus ad ſtellam E per vnam e ſequentibus analogiis.

Vt ſinus compl. latitud. Ad diſtantiam aſc. rectae a coluro ſolſtitii; (*) *Ita obliquitas eclipticae*

Vt ſinus compl. decl. ſ. diſtantiae a polo boreo l. auſtrali. Ad long. ſ. diſt. a col. ſolſtitiorum; (**) *Ad*

(*) (**) Longitudine ſolis et Aſc. recta exiſtente in prima quadratura vtimur compl. ad 90° ſecunda quadratura ſubtractis 90° reſiduum appellatur diſtantia a coluro ſolſtitii,

Ad angulum E ad ſtellam ſ. ad angulum poſitionis. (***)

Ita obliquitas eclipticae Ad ang. E, ſ. poſitionis. (****)

β) Hoc angulo E inuento fiat analogia ſequens:

Vt ſinus latitudinis ſtellae
Ad radium;
Ita tangens anguli E
Ad tangentem anguli, qui dicitur A.

Hic *angulus* eſt *minor recto ſ. acutus*

Angulo E acuto { Si ſtella eſt in ſignis aſcend. ♑ ♒ ♓ ♈ ♉ ♊ cum latit. ſeptentrionali
Aut. ſi ſtella eſt in ſignis deſcend. ♋ ♌ ♍ ♎ ♏ ♐ cum lat. auſtrali

Et tunc ſtella eſt in maxima elongatione a polo, cognomine latitudinis, poſt tria ſigna, quando ☉ fuit in M. (*****)

Angu-

---

tertia quadratura ſubtractis 180°. ſumitur compl. ad 900 grad.
quarta quadratura ſubtractis 9. ſignis ſ. 270°. reſidium appellatur diſtantia a coluro ſolſt. hyberni.

(***)(****) Hic angulus eſt *Obtuſus*, ſi cadit intra circulum quem polus eclipticae circa polum borealem deſcribit.
Rectus, ſi cadit in ipſa peripheria praedicti circuli.
Acutus, ſi cadit extra peripheriam huius circuli a polo ecliptica circa polum mundi deſcriptum.

(*****) Vide infra γ.

Angulo E obtuſo { Si ſtella eſt in ſecundo quadrante eclipticae cum lat. boreali. Aut in quarto quadrante eclipticae cum lat. meridionali ;

Et tunc ſtella eſt proxima polo eiusdem nominis ac latitudo poſt 3. ſigna, vbi ☉ fuit in M.

Idem hic *angulus* A erit *maior recto ſ. obtuſus.*

Angulo E acuto { Si ſtella eſt in ſign. deſcend. ♋♌♍ ♎♏♐. latit. habens ſeptentrionalem. Aut ſi ſtella eſt in ſign. aſcendent. ♑♒♓♈♉♊ cum lat. auſtrali ;

Et tunc quidem pro elapſis tribus ſignis a puncto M. ſc. ♂☉☍ eadem ſtella eſt maxime vicina ſ. proxima polo eiusdem denominationis cum latitudine.

Angulo E obtuſo { Stella exiſtente in I^ma quadratura ecliptica ♈♉♊ cum lat. boreali. Stella exiſtente in 3^tia quadr. ♎♏♐ cum lat. meridionali,

Et tunc quidem ſtella erit maxime remota a polo eiusdem nominis cum latitudine, poſt elapſa tria ſigna a tempore, vbi ſol fuit in M.

γ) Hic

γ) Hic Angulus A (ſiue tangens antea inuenta) ſubtrahendus eſt a longitudine ſtellae adiectis 360 gr. ad longitudinem (ſi alias ſubtractio fieri nequit) vt habeatur locus ſolis M quo *apparens declinatio erit nulla*, cui ſi addantur 6. ſigna, dabitur alter locus N in quo aberratio iterum erit nulla.

Tribus ſignis ante et poſt hunc locum M. aberratio eſt maxima, ſecundum praecedentem determinationem. §. β. e. g.

Pro Lyra 1739.

♑ 9 4 57 } locus ☉ vbi aberr. eſt nulla 27. Dec.
♋ 3 4 57 } 27. Iun.

28. Sept. verſ. boream.

♎ 6 4 57 } loc. ☉ vbi aberratio eſt maxima
♈ 0 4 57 } 25. Mart. verſ. auſtrum

Sc. quia angulus A. erat acutus pariter ac ang. E, et ſtella verſabatur in ſigno aſcendente ♑ poſt tria ſigna vbi aberratio erat nulla, vti hic in ♈, ſtella maxime remota eſt a polo boreo, qui eiusdem nominis eſt cum latititudine ſtellae.

δ) Tandem fiat analogia:

Vt ſinus anguli A;
Ad ſinum anguli E:
Ita ſinus 20″,
Ad maximam aberrationem declinationis apparentis a vera.

Hac aberratione maxima pro 90°. inuenta, eius capiatur dimidium pro 30°.

Et deinde fiat

Vt ſinus totus,
Ad ſinum 60°;
Ita maxima aberratio
Ad aberrationem pro 60°.

Sicque aberratio pro ſingulis menſibus determinata erit: quae poſtea aequaliter diſtribui poteſt.

Aut ſi mauis adhibe ſequentem analogiam pro determinanda quantitate declinationis quouis tempore dato.

Quaere longitudinem ſolis pro illo tempore pro quo cupis declinationis aberrationem determinare: Subtrahe illam a longitudine ſtellae inuentae, quando aberratio declinationis eſt nulla, haec differentia appelletur D.

Inſer *Vt radius*,
Ad ſinum arcus D:
Ita maxima aberratio in declinatione,
Ad aberrationem tempore dato.

*) Regula pro aberratione fixae rite applicanda.

Si latitudo ſtellae borealis
- Maxima aberratio ſtellae, verſus polum boreum appellatur E. ſ. *Elongatio*, et eſt ſubtrahenda.
- Maxima aberratio ſtellae verſus polum auſtralem appellatur A. ſiue *Approximatio* et erit addenda.

Si latitudo auſtralis
- Maxima aberratio verſus auſtrum dicitur E ſiue *Elongatio*, et eſt ſubtrahenda.
- Maxima aberr. verſus boream appellatur A. ſiue *Approximatio*, et erit addenda.

Manu-

Manuductio

ad calculum aberrationis ſtellarum fixarum, quoad Latitudinem.

1.

Longitudo et latitudo ſtellae e catalogo fixarum pro initio anni determinandae ſunt.

2. Deinde pro inuenienda aberratione fixae in latitudine adhibeatur ſequens analogia:

Vt radius, ſiue ſinus totus;
Ad ſinum latitudinis ſtellae:
Ita ſinus 20″;
Ad ſinum aberrationis maximae.

niſi magis volupe fuerit ſequentem mediante hac analogia ad dena minuta prima latitudinum ſtellarum a D. de Fontaine de Crutes (*) conſtructam adhibere tabulam, quam in commodum lectoris hic inſerendam curauimus.

(*) Mr. Fontaine de Crutes Traité complet ſur l' aberration des fixes avec une hiſtoire générale de l' aſtronomie: à Paris 1744. 8°.

Gr.	Min.	Min. sec.	P. C.
0	00	00	00
	10	00	06
	20	00	12
	30	00	17
	40	00	23
	50	00	29
1	00	00	35
	10	00	41
	20	00	47
	30	00	53
	40	00	58
	50	00	64
2	00	00	70
	10	00	76
	20	00	82
	30	00	88
	40	00	93
	50	00	99
3	00	01	05
	10	01	11
	20	01	16
	30	01	22
	40	01	28
	50	01	33
4	00	01	39
	10	01	45
	20	01	51
	30	01	56
	40	01	62
	50	01	68
5	00	01	74
	10	01	80
	20	01	86
	30	01	91
	40	01	97
	50	02	03

°	′	″	P. C.
6	00	02	09
	10	02	15
	20	02	21
	30	02	26
	40	02	32
	50	02	38
7	00	02	44
	10	02	50
	20	02	55
	30	02	61
	40	02	67
	50	02	72
8	00	02	78
	10	02	84
	20	02	90
	30	02	95
	40	03	01
	50	03	07
9	00	03	13
	10	03	19
	20	03	24
	30	03	30
	40	03	36
	50	03	41
10	00	03	47
	10	03	53
	20	03	59
	30	03	64
	40	03	70
	50	03	76
11	00	03	82
	10	03	88
	20	03	93
	30	03	99
	40	04	05
	50	04	10

°	′	″	P. C.
12	00	04	16
	10	04	22
	20	04	27
	30	04	33
	40	04	39
	50	04	44
13	00	04	50
	10	04	56
	20	04	61
	30	04	67
	40	04	73
	50	04	78
14	00	04	84
	10	04	90
	20	04	95
	30	05	01
	40	05	07
	50	05	12
15	00	05	18
	10	05	23
	20	05	29
	30	05	34
	40	05	40
	50	05	45
16	00	05	51
	10	05	57
	20	05	62
	30	05	68
	40	05	74
	50	05	79
17	00	05	85
	10	05	90
	20	05	96
	30	06	01
	40	06	07
	50	06	12

Gr.

° ′	″ P. C.	° ′	″ P. C.	° ′	″ P. C.
18 00 -	06 18	24 00 -	08 13	30 00 -	10 00
10 -	06 23	10 -	08 18	10 -	10 05
20 -	06 29	20 -	08 24	20 -	10 10
30 -	06 34	30 -	08 29	30 -	10 15
40 -	06 40	40 -	08 34	40 -	10 20
50 -	06 45	50 -	08 40	50 -	10 25
19 00 -	06 51	25 00 -	08 45	31 00 -	10 30
10 -	06 56	10 -	08 50	10 -	10 35
20 -	06 62	20 -	08 56	20 -	10 40
30 -	06 67	30 -	08 61	30 -	10 45
40 -	06 73	40 -	08 66	40 -	10 50
50 -	06 78	50 -	08 72	50 -	10 55
20 00 -	06 84	26 00 -	08 77	32 00 -	10 60
10 -	06 89	10 -	08 82	10 -	10 65
20 -	06 95	20 -	08 87	20 -	10 70
30 -	07 00	30 -	08 92	30 -	10 74
40 -	07 06	40 -	08 98	40 -	10 79
50 -	07 11	50 -	09 04	50 -	10 84
21 00 -	07 17	27 00 -	09 09	33 00 -	10 89
10 -	07 22	10 -	09 14	10 -	10 94
20 -	07 27	20 -	09 19	20 -	10 99
30 -	07 33	30 -	09 24	30 -	11 03
40 -	07 38	40 -	09 29	40 -	11 08
50 -	07 44	50 -	09 34	50 -	11 13
22 00 -	07 49	28 00 -	09 39	34 00 -	11 18
10 -	07 54	10 -	09 44	10 -	11 23
20 -	07 60	20 -	09 50	20 -	11 28
30 -	07 65	30 -	09 55	30 -	11 32
40 -	07 70	40 -	09 60	40 -	11 37
50 -	07 76	50 -	09 65	50 -	11 42
23 00 -	07 81	29 00 -	09 70	35 00 -	11 47
10 -	07 86	10 -	09 76	10 -	11 52
20 -	07 92	20 -	09 81	20 -	11 56
30 -	07 97	30 -	09 85	30 -	11 61
40 -	08 02	40 -	09 90	40 -	11 66
50 -	08 08	50 -	09 95	50 -	11 70

° ′	″	P. C.	° ′	″	P. C.	° ′	″	P. C.
36 00 -	11	76	42 00 -	13	38	48 00 -	14	86
10 -	11	80	10 -	13	42	10 -	14	90
20 -	11	85	20 -	13	47	20 -	14	94
30 -	11	89	30 -	13	51	30 -	14	97
40 -	11	94	40 -	13	55	40 -	15	01
50 -	11	99	50 -	13	60	50 -	15	05
37 00 -	12	04	43 00 -	13	64	49 00 -	15	10
10 -	12	08	10 -	13	68	10 -	15	13
20 -	12	13	20 -	13	72	20 -	15	17
30 -	12	17	30 -	13	76	30 -	15	20
40 -	12	22	40 -	13	80	40 -	15	24
50 -	12	26	50 -	13	85	50 -	15	28
38 00 -	12	31	44 00 -	13	90	50 00 -	15	32
10 -	12	35	10 -	13	93	10 -	15	36
20 -	12	40	20 -	13	97	20 -	15	39
30 -	12	44	30 -	14	01	30 -	15	43
40 -	12	49	40 -	14	06	40 -	15	46
50 -	12	53	50 -	14	10	50 -	15	50
39 00 -	12	59	45 00 -	14	14	51 00 -	15	54
10 -	12	63	10 -	14	18	10 -	15	58
20 -	12	67	20 -	14	22	20 -	15	62
30 -	12	72	30 -	14	26	30 -	15	66
40 -	12	77	40 -	14	31	40 -	15	70
50 -	12	81	50 -	14	35	50 -	15	74
40 00 -	12	86	46 00 -	14	39	52 00 -	15	77
10 -	12	90	10 -	14	44	10 -	15	81
20 -	12	95	20 -	14	48	20 -	15	84
30 -	12	99	30 -	14	52	30 -	15	87
40 -	13	03	40 -	14	57	40 -	15	91
50 -	13	08	50 -	14	62	50 -	15	94
41 00 -	13	12	47 00 -	14	66	53 00 -	15	97
10 -	13	16	10 -	14	70	10 -	16	00
20 -	13	21	20 -	14	73	20 -	16	04
30 -	13	25	30 -	14	76	30 -	16	07
40 -	13	29	40 -	14	80	40 -	16	11
50 -	13	34	50 -	14	83	50 -	16	14

Gr.

° ′	″ P. C.	° ′	″ P. C.	° ′	″ P. C
54 00 -	16 18	60 00 -	17 32	66 00 -	18 27
10 -	16 21	10 -	17 35	10 -	18 29
20 -	16 25	20 -	17 38	20 -	18 32
30 -	16 28	30 -	17 40	30 -	18 34
40 -	16 31	40 -	17 43	40 -	18 36
50 -	16 35	50 -	17 46	50 -	18 39
55 00 -	16 38	61 00 -	17 49	67 00 -	18 41
10 -	16 41	10 -	17 52	10 -	18 43
20 -	16 45	20 -	17 55	20 -	18 45
30 -	16 48	30 -	17 57	30 -	18 47
40 -	16 51	40 -	17 60	40 -	18 50
50 -	16 55	50 -	17 63	50 -	18 52
56 00 -	16 58	62 00 -	17 66	68 00 -	18 54
10 -	16 61	10 -	17 69	10 -	18 56
20 -	16 65	20 -	17 71	20 -	18 58
30 -	16 68	30 -	17 74	30 -	18 60
40 -	16 71	40 -	17 77	40 -	18 63
50 -	16 75	50 -	17 79	50 -	18 65
57 00 -	16 77	63 00 -	17 82	69 00 -	18 67
10 -	16 80	10 -	17 85	10 -	18 69
20 -	16 83	20 -	17 87	20 -	18 71
30 -	16 86	30 -	17 90	30 -	18 73
40 -	16 89	40 -	17 93	40 -	18 76
50 -	16 92	50 -	17 95	50 -	18 78
58 00 -	16 96	64 00 -	17 98	70 00 -	18 80
10 -	16 99	10 -	18 00	10 -	18 82
20 -	17 02	20 -	18 03	20 -	18 84
30 -	17 05	30 -	18 05	30 -	18 85
40 -	17 08	40 -	18 07	40 -	18 87
50 -	17 11	50 -	18 10	50 -	18 89
59 00 -	17 14	65 00 -	18 13	71 00 -	18 91
10 -	17 17	10 -	18 15	10 -	18 93
20 -	17 20	20 -	18 17	20 -	18 95
30 -	17 23	30 -	18 19	30 -	18 96
40 -	17 26	40 -	18 22	40 -	18 98
50 -	17 29	50 -	18 24	50 -	19 00

Gr.

° ′	″ P.C.
72 00	- 19 02
10	- 19 04
20	- 19 06
30	- 19 07
40	- 19 09
50	- 19 11
73 00	- 19 13
10	- 19 14
20	- 19 16
30	- 19 17
40	- 19 19
50	- 19 20
74 00	- 19 22
10	- 19 24
20	- 19 25
30	- 19 27
40	- 19 29
50	- 19 30
75 00	- 19 32
10	- 19 33
20	- 19 35
30	- 19 36
40	- 19 38
50	- 19 39
76 00	- 19 41
10	- 19 42
20	- 19 44
30	- 19 45
40	- 19 46
50	- 19 48
77 00	- 19 49
10	- 19 50
20	- 19 51
30	- 19 52
40	- 19 54
50	- 19 55

° ′	″ P. C.
78 00	- 19 56
10	- 19 57
20	- 19 59
30	- 19 60
40	- 19 61
50	- 19 63
79 00	- 19 64
10	- 19 65
20	- 19 66
30	- 19 67
40	- 19 68
50	- 19 69
80 00	- 19 70
10	- 19 71
20	- 19 72
30	- 19 73
40	- 19 73
50	- 19 74
81 00	- 19 75
10	- 19 76
20	- 19 77
30	- 19 77
40	- 19 78
50	- 19 79
82 00	- 19 80
10	- 19 81
20	- 19 82
30	- 19 82
40	- 19 83
50	- 19 84
83 00	- 19 85
10	- 19 86
20	- 19 86
30	- 19 87
40	- 19 88
50	- 19 88

° ′	″ P.C.
84 00	- 19 89
10	- 19 90
20	- 19 90
30	- 19 91
40	- 19 92
50	- 19 92
85 00	- 19 93
10	- 19 93
20	- 19 94
30	- 19 94
40	- 19 94
50	- 19 95
86 00	- 19 95
10	- 19 95
20	- 19 96
30	- 19 96
40	- 19 96
50	- 19 97
87 00	- 19 97
10	- 19 97
20	- 19 97
30	- 19 97
40	- 19 98
50	- 19 98
88 00	- 19 98
10	- 19 98
20	- 19 98
30	- 19 98
40	- 19 99
50	- 19 99
89 00	- 19 99
10	- 19 99
20	- 19 99
30	- 19 99
40	- 20 00
50	- 20 00
90 00	- 20 00

Por-

Porro comparetur locus ſolis cum loco ſtellae, et notetur, ſole et ſtella exiſtente, in coniunctione, aberrationem eſſe nullam.

In quadraturis autem ſ. tribus ſignis elapſis a coniunctione ſ. oppoſitione aberrationem eſſe maximam, et quidem:

Tribus ſignis poſt oppoſitionem, aberrationem eſſe eiusdem denominationis cum latitudine, et per conſequens *Subtrahendam.*

Si latitudo borealis, aberratio erit borealis.
Si latitudo auſtralis, aberratio erit auſtralis.

Poſt coniunctionem autem in quadratura, ſiue poſt tria ſigna a coniunctione, aberratio quoad latitudinem iterum erit maxima, ſed aſſumet denominationem contrariam latitudini et erit *Additiua.*

Si latitudo borealis, aberratio erit meridionalis.
Si latitudo meridionalis, aberratio erit borealis.

3. Vt autem aberratio, quoad latitudinem pro quouis die determinetur praeſuppoſitis quae §. §. antecedentibus determinata ſunt,

Conſtruatur abacus pro ſingulis diebus totius anni e cognita aberratione maxima.

Sc. in ſyzigiis aberratio eſt nulla.

90° poſt ſyz. ſiue 3. ſignis elapſis aberratio eſt maxima, et quidem determinatae quantitatis per §. praecedentem.

30° ſiue vno ſigno elapſo aberrationis capiatur dimidium: et pro

60°. siue pro duobus signis ante vel post syzigias adhibeatur sequens analogia:

Vt radius:
Ad sinum 60°;
Ita aberratio maxima pro latitudine determinata:
Ad aberrationem respondentem.

Hae aberrationes itaque pro singulis signis determinatae erunt, quibus conueniens dies mensis ex ephemeridibus facile adaptari poterit, nempe:

Mediante interpolatione simplici hae aberrationes per spatium 30. siue 31. dierum aequaliter distribui, aut per 3. partes mensis e. g. pro 1. 11. 21. et 31. die mensis determinari possunt.

Qui autem summam desiderat praecisionem siue exactitudinem ille adhibeat sequentem illationem:

Vt sinus totus:
Ad sinum distantiae solis tempore dato a circulo latitudinis verae;
Ita sinus aberrationis maximae in latitudinem:
Ad sinum aberrationis quaesitae.

Manuductio

ad calculum aberrationis ſtellarum fixarum quoad Longitudinem.

Maxima aberratio ſtellae in longitudinem obſeruatur in ſyzigiis, et eſt nulla in quadraturis. Cognita igitur longitudine ſtellae, huic addantur 3 ſigna pro obtinenda prima quadratura, vbi aberratio eſt nulla, quibus ſi adiiciantur 6 ſigna obtinebitur locus oppoſitus, ſiue vltima quadratura in qua aberratio iterum erit nulla.

A prima quadratura ad oppoſitionem longitudo excedit veram verſus *Orientem*, et eſt maxima, in oppoſitione ſemperque diminuitur vſque ad vltimam quadraturam, vbi aequalis.

Ab vltima quadratura ad coniunctionem longitudo excedit veram verſus *Occidentem*, et eſt maxima, in coniunctione a qua iterum imminuitur et aequabit nihilo in prima quadratura vbi ſc. longitudo apparens eſt aequalis longitudini verae.

2. Pro determinanda quantitate aberrationis in longitudinem inferatur

Vt coſinus latitudinis,
Ad ſinum totum;
Ita ſinus 20″,
Ad ſinum aberrationis maximae in longitudinem.

3. Regula pro applicanda aberratione maxima erit ſequens

α A prima quadratura ad oppoſitionem, et ab ☌ ad ſecundam ſiue vltimam quadraturam, aberratione vergente ad Orientem, pars proportionalis huius aberrationis, reſpondens diſtantiae ſolis a quadratura, erit *ſubtrahenda*.

β Ab vltima ſiue ſecunda quadratura, vbi aberratio iterum erit nulla, ad coniunctionem, et a ☍ ad primam, maxima aberratione vergente ad occidentem, erit *addenda*.

Manuductio

ad calculum aberrationis ſtellarum fixarum quoad Aſcenſionem rectam.

Cognitis elementis longitudinis, latitudinis, declinationis et aſcenſionis rectae pro initio anni cuiusdam, et determinato angulo ad ſtellam, ſiue E, qui et poſitionis *dicitur*, et per regulas ſupra traditas, *l.* rectus *l. acutus* aut obtuſus eſſe poteſt;

α Inſtituatur analogiæ ſequens

Vt ſinus latitudinis ſtellae,
Ad radium:
Ita cotangens (*ſ. compl. tang.*) *anguli* E,
Ad tangentem anguli B.

Hic angulus B eſt *acutus*

Angulo E acuto { Stella exiſtente in ſignis deſcendentibus cum latitudine boreali. / Stella exiſtente in ſignis aſcendentibus cum latitudine meridionali.

Sole

Sole exiſtente in X infra determinando, addantur 3 ſigna pro inueniendo loco, vbi aberratio aſcenſionis rectae eſt minima, et quidem ad occidentem.

Angulo E obtuſo { Si ſtella erit in 1mo quadrante eclipticae cum latitudine boreali. Aut in 3^tio^ quadrante cum latitudine meridionali.

Sole exiſtente in X, mox determinando, additis tribus ſignis, aſcenſio recta erit maxima, et quidem ad orientem.

Angulus B eſt obtuſus.

Angulo E acuto { Stella exiſtente in ſignis aſc. cum latitudine boreali. Stella exiſtente in ſignis deſc. cum latitudine meridionali.

Sole exiſtente in X iamiam determinando, adiectis 3 ſignis ad hunc locum, aſcenſio recta erit minima et ad occidentem.

Angulo E obtuſo { Stella exiſtente in 2 quadratura cum latitudine ſeptentrionali. Stella exiſtente in vltimo quadrante cum latitudine meridionali.

Sole exiſtente in X, addantur tria ſigna pro determinando loco vbi aſcenſio recta erit maxima et quidem ad orientem.

β. Angulus hic inuentus B ſubtrahatur a longitudine ſolis (abditis 360° ſi opus) vt inueniatur angulus X, qui monſtrat locum vbi aſcenſio recta apparens aequalis eſt verae, ſeu variatio aſcenſionis rectae aut aberratio eſt nulla, idem valet de loco ſolis X cum adiectis 6 ſignis ſiue angulo V.

Tria ſigna ante et poſt hunc locum aſcenſio recta eſt maxima et vel ad orientem vel occidentem, prouti ſupra inuenta.

γ. Quo autem quantitas ipſa eo exactius determinetur, ſequentem in modum producendum.

addatur
- α Longarithmus ſinus totius
- β — — ſinus 20″
- γ — — Coſinus ang. E. ſ. ad ſtellam per declinationem iam inuentus.

de hac ſumma

ſubtrahatur
- α Logarith. ſinus arcus B.
- β — — coſinus declinationis ſtellae.

Reſiduum erit numerus ſecundorum maximae aberrationis, quoad aſcenſionem rectam.

δ Cognita maxima aberratione, facilis erit diſtributio pro ſingulis menſibus, aut in dies decem, vel ſi mauis in dies ſingulos vniuscuiusuis menſis pari ratione ac ſupra monſtratum eſt.

Vel ſi mauis ſequenti vtendum erit analogia.

Vt ſinus totus,
Ad ſinum arcus (ſc. differentia longitudinis X)
§ 2 *determinato;*

Ita

Ita aberratio maxima aſcenſionis rectae
Ad aberrationem tempore quaeſito.

E Regula pro applicanda aberratione maxima aſcenſionis rectae iam ſupra indicata, hic maioris euidentiae cauſſa iterum repetimus.

Si aberratio aſcenſionis rectae eſt ad orientem; tunc eſt ſubtrahenda.

Si aberratio aſcenſionis rectae eſt ad occidentem eſt addenda.

Eſt autem ad orientem, ſi 3 ſigna addantur loco X.

Ad occidentem ſi tria ſigna addantur ad locum oppoſitum V.

* * *

Dum haec ſub prelo ſudabat diſſertatio, incidit in manus noſtras epiſtola Celeberrimi Anglorum Aſtronomi *Iacobi Bradleii* ad Illuſtriſſimum Comitem de *Macclesfield*, inſignem aſtronomiae promotorem data, qua motum quendam apparentem in fixis, a motu nodorum lunae pendentem, expoſuit, quaeque in actis Anglicanis volumine XLV. No 485. pro menſe Ianuario 1747-8 legitur. Placuit igitur ob materiae connexionem, quam ibi pro novo hoc aberrationis fixarum genere p. 21. ſuppeditauit regulam, hic, quoniam ſpatio excludimur, breuibus inſerere.

Subtrahatur diſtantia nodi aſcendentis lunae, a principio arietis computata, ab aſcenſione recta ſtellae, et notetur reſiduum:

Deinde fiat analogia:

Vt radius,
Ad ſinum reſidui anteà inuenti;
Ita 9. minuta ſecunda,
Ad numerum minutorum ſecundorum, quibus ſtella propior erit aut remotior polo vero, quam medio;

Vbi notandum, ſi reſiduum minus eſt quam 180° ſtellam propiorem fore polo vero, quam medio;

Contrarium autem obtinere, ſi idem reſiduum excedat 180°. gradus.

OB-

OBSERVATIONES
ALIQVOT COELESTES
Lipſiae habitae aeſtate an. 1746.

a Godofredo Heinſio.

Poſtquam locum nactus ſum, ex quo liber coeli proſpectus patet, animum applicui, ad obſeruationes inſtituendas aſtronomicas, ex quibus ſitus Lipſiae geographicus congnoſci poſſet. Hunc in finem ſequentibus vſus ſum inſtrumentis.

Quadrantem adaptandum curaui orichalceum, ab artifice *Edm. Culpeper*, Anglo, bene elaboratum, cuius diuiſio ad bina minuta extenditur; in qua tamen non ſolum ſingula minuta, verum etiam minutorum quadrantes aeſtimare licet. Radius eius a centro ad extremam diuiſionis peripheriam eſt $1\frac{1}{2}$. ped. Anglic. Dioptris teleſcopicis iſte inſtructus eſt, quarum focus communis continet reticulum ex quatuor filis tenuiſſimis argenteis, decuſſatim ſub angulis ſemirectis compoſitum, exiſtente lentium diſtantia 19. pollic. anglican. Inſtrumentum hoc ope cochlearum infinitarum optime tractari et in omnem plagam commode dirigi poteſt, ita vt absque obſeruatoris incommodo et altitudines ſyderummetiri et examen inſtrumenti ſucceſſu felici inſtituere liceat. Facto hoc examine plus ſimplici vice, conſentientibus obſeruationibus, expertus ſum, lineam fiduciae dioptrarum aberrare a radio nonageſimum gradum connectente, angulo $19\frac{1}{4}$ minut. quae ab obſeruatis ſecundum diuiſionem limbi Quadrantis alti-

altitudinibus ſubtrahi debent, vt altitudines ſyderum ſuper horizonte innoteſcant.

Horologio deinde vtor oſcillatorio bonae notae, cuius motum vniformem facto per reuolutiones ſyderum examine probe intellexi. Iuxta hoc horologium ad motum ſolis medium proxime compoſitum, meridiem cuiuslibet diei, quantum pro coeli clementia et obſeruationum conditione fieri licuit ac debuit, definiui per obſeruationes altitudinum limbi ſuperioris ſolis reſpondentium; adhibita meridiei debita correctione. Inde et ſtatus horologii reſpectu temporis ſolaris innotuit, et hoc modo ſemper tempus verum in obſeruationibus eclipſium ſatellitum Iouis ſequentibus determinaui.

Denique inſtructus ſum teleſcopio catadioptrico Gregoriano praeſtantiae ſingularis, ab artifice *Short* Anglo, elaborato. Diſtantia focalis ſpeculi maioris eſt $16\frac{1}{2}$ pollic. anglic. Tria adſunt ſpecula minora concaua et duo ocularia ex binis lentibus compoſita, quibus ſucceſſiue ad teleſcopium applicatis efficitur, vt obiecta ſecundum diametrum 52, 84, 97, 126, 157, 240, vicibus augeantur. In obſeruationibus eclipſium Satellitum Iouis ſequentibus eum elegi apparatum, quo per teleſcopium obiecti diameter 52. vicibus maior apparet, quam nudo oculo. In hoc ſtatu maximam obtinui lucis Satellitum copiam, quam conditionem reſpicere debui, cum in his obſeruationibus Iupiter plerumque in vicinia horizontis verſaretur, et altitudo Iouis meridiana vix 18 gradus ſuperaret. Figuram Iouis oualem faſcias atque ſatellites diſtinctiſſime ſub hoc apparatu, coelo ſereno, conſpicere licuit.

Emerſiones Satellitis I^mi Iouis
Lipſiae obſeruatae tempore vero ſtyl. nou.

Iunii. d. 27. 8^h. $50'$. $3''$. Satelles emergere incipiebat, obſeruatio quidem in crepuſculo ſat forti, prope horizontem, et coelo in regione Iouis paulisper vaporoſo exiſtente habita, ſatis tamen certa eſt, ſiquidem Satelles ſubito emergebat, et Satelles tertius limbo Iouis occidentali tunc fere adhaerens diſtincte conſpiciebatur, quem deinceps ad eclipſin properantem, iudicaui tangere limbum Iouis occidentalem (ſitu recto, pro apparentia teleſcopii Gregoriani) hor. 8. $58'$. temp. veri.

Iulii d. 4. 10^h. $42'$. $58''$. Satelles emergere coepit, et poſt $1\frac{1}{2}$ minut. omne lumen recuperauit. Obſeruatio exacta eſt, coelo in regione Iouis valde ſereno.

d. 20. 9^h. $0'$. $18''$. Satellitis prima emerſio, qui poſt $1\frac{1}{2}$ minut. pleno lumine inſtructus apparuit. Obſeruatio exacta eſt, coelo maxime ſereno.

d. 27. 10^h. $56'$. $41''$. Satelles emergere coepit; lente autem emerſit, et non niſi poſt tria minuta lumen omne recuperauit. Iupiter prope horizontem et coelum in regione Iouis pauliſper vaporoſum erat; obſeruationem tamen ſatis certam habeo, reliquis Satellitibus diſtincte conſpicuis.

Obſerua-

Obſeruationes

altitudinem poli reſpicientes

Circa ſolſtitium aeſtiuum, ob coelum plerumque nubilum, non niſi duas altitudines meridianas limbi ſuperioris ſolis debita certitudine acquirere potui, alteram nempe d. 24. Iunii $= 62°. 50'$, alteram d. 25. Iunii $= 62°. 38\frac{1}{2}'$. Exinde poli eleuationem ſequentem in modum deduxi.

	d. 24. Iun.	d. 25. Iun.
alt. limbi ſup. ☉ obſeru.	62°. 40'. 0''.	62°. 38'. 20''.
aberratio quadrantis ſubtr.	19. 15.	19. 15
	62. 20. 45.	62. 19. 5
paralax. ☉ et refract. ſec. Caſſin.	25.	25
alt. vera limb. ſup. ☉.	62. 20. 20.	62. 18. 40
ſemidiam. ☉ iuxta Caſſin.	15. 50.	15. 50
alt. centri ☉ vera	62. 4. 30.	62. 2. 50
differ. declin. ☉ a declinat. ſolſtitiali ex calculo, add.	1. 36.	2. 56
alt. merid. centri ☉ ſolſtitialis	62. 6. 6.	62. 5. 46
obliquitas eclipticae	23. 28. 20.	23. 28. 20
eleuatio aequatoris	38. 37. 46.	38. 37. 26
eleuatio poli	51. 22. 14.	51. 22. 34

Inde eleuatio poli media erit..

$51°. 22'. 24''.$

Menſibus Iunio et Iulio aliquot fixarum altitudines meridianas repetitis vicibus obſeruaui et exinde, ſumendo

mediam ex obſeruatis eiusdem ſtellae altitudinibus, poli eleuationem determinaui prout ſequens tabula monſtrat; in quo negotio refractionem ex Tab. *Caſſini*, declinationem ſtellae vero ad tempus praeſens reductam ex catalogo tum *Halleii* tum *Caſſini* adhibui.

Nomen ſtellae	Alt. merid. ſtellae ex obſ. facta ob aberrat. quadrantis correctione	Eleuatio poli ſumta ſtellae declinatione ex catalogo	
		Halleii	Caſſini
δ ♍	16°. 48°. 53″	51°. 21′. 43′	51°. 21′. 28″
Cor. ♍	12. 51. 45	51. 22. 8	51. 21. 49
η Serpentarii	23. 16. 30	51. 22. 47	51. 22. 37
α Herculis	53. 21. 8	51. 21. 0	51. 20. 43
α Ophiuchi	51. 23. 30	51. 22. 56	51. 22. 55
β Ophiuchi	43. 20. 45	51. 21. 43	51. 21. 40
Qnd. Aquilae	46. 51. 15	51. 22. 29	51. 22. 41
Eleuatio poli	media	51. 22. 7	51. 21. 59
			51. 22. 7
		ex alt. ſolſtit.	51. 22. 24
			51. 22. 10

vnde *Eleuatio poli Lipſiae* ſtatui poteſt *Tycho de Brahe* (in Progymn. P. I. p 630. edit. Vranib. et Prag.) olim iam rimatus eſt eleuationem poli Lipſiae ex obſeruationibus maximae et minimae altitudinis ſolis meridianae ab Homelio Mathematico Lipſienſi, habitis. Maxima ponitur 62°, 11′. minima 15°. 15′. ex quibus *Tycho* ſuis adhibitis correctionibus eleuationum eſſe infert 51°. 19′. *Ricciolus* (in Georg. reform. p. 301) iſtamm

istarum obseruationum annum nuncupat 1560, et factis suis correctionibus altitudinem poli produxit 51°. 19′. 14″. Si Cassinianae parallaxes et refractiones ad altitudines istas applicentur, prodit obliquitas ecliptica 23°. 29′. 30″. et eleuatio poli 51°. 18′. 56″. vel rotunde 51°. 19′. Et huius magnitudinis altitudinem poli Lipsiae vsurparunt plerique hactenus Astronomi. Non desunt quidem Autores, qui in tabulis suis astronomicis eam aliter pronunciant, veluti *Reinholdus* 51°. 25′; *Longomontanus* 51°. 22′, Keplerus 51°. 44′ ex quibus vero fundamentis, me latet. Superior determinatio ex meis obseruationibus, diuersis sulta conclusionibus, medium inter has occupat locum.

Obseruationes aliquot meteorologicae.

Per intergrum fere menſem Iulium aestum experti sumus ingentem, qui etiam in aliis regionibus Bohemia, Silesia, Morauia, Polonia, Austria, Hungaria, tristia sui vestigia reliquit, vt nouellae publicae testantur. Aestum hunc secundum thermometrum mercuriale magnum diiudicaui, cui scalam factis experimentis in aqua bulliente et gelascente, ad mentem Cel. *de l'Isle* diuisam applicui; ita vt in aqua ebulliente mercurius ad 0. grad. in gelascente ad 150. grad. haereret: Mercurius in isto probe purgatus aere et ipse ad ebullitionem ope carbonum candentium redactus est, antequam thermometrum aquae bullienti deinde immissum in superiori loco hermetice clausum fuit. Calidissimi fuerunt dies 6. et 15. Iulii, qui etiam calidissimi obseruati sunt Vratislauiae. Hic nempe loci thermometrum in loco vmbroso, sed aeri libero exposito, horis pomeridianis monstrabat

		gradum
Iulii d. 6.	0ᵇ. 50′ - - -	105
	0. 55 - - -	104⅔

poſtea deſcendebat iterum ☿ius et haerebat adhuc
2ᵇ. 24′. ad gradum 105.

Statim poſt hoc tempus thermometrum ſoli libere expoſui, coelo valde ſereno. Mercurius illico aſcendebat et oſtendebat

	gradum
2ᵇ. 37′. - - -	83.
- 48 - - -	82½
- 50 - - -	81⅛
3 1. - - -	80¼
- 13 - - -	82
- 23 - - -	78¼
- 25 - - -	77
- 28 - - -	76⅝
- 30 - - -	76⅕

Mercurius tunc haeſit, et nonnula minuta poſt ſol locum reliquit, in quo thermometrum fuit poſitum. Iſtud denuo in locum vmbroſum translatum hor. 5. indicauit adhuc 107¼ grad.

Iulii d. 15. maximus aeſtus incidit poſt meridiem in hor. 3. min. 52. thermometro monſtrante 104¼ grad. in loco vmbroſo aeri libero expoſito.

Praeterea ſequentes dies noto reliquis plerumque calidiores, quoad ſummum aeſtum in ſingulis diebus

therm.

		therm. in loco vmbroſo
Iulii d. 7.	3ᵇ. 24′.	- 108.
13.	3. 56	- 110
14.	3. 20	- 106$\frac{1}{2}$
17.	4. 30	- 108$\frac{1}{2}$

Hoc modo ſummus calor d. 15. Iulii non niſi 1$\frac{1}{4}$ grad. inferior eſt eo, quem an. 1738. d. 14. Iul. ſtyl. nou. Petroburgi experti ſumus 103. graduum; vno fere gradu autem differt tantum a calore maximo 103$\frac{1}{3}$ grad. obſeruato, tum in inſula *Bourbon* ſub latitudine auſtrali 22°. ad orientem reſpectu Madagaſcar ſita d. 24. Ianuar. 1734, tum Sylanchae ſub aequatore ad littus Peruuienſe in America d. 16. Maii. 1736; et denique 2$\frac{1}{2}$ grad. fere maior eſt calore 106$\frac{2}{3}$ grad. qui mari ſub aequatore notatus eſt; prout id Commentarii Acad. Pariſ. an. 1734. 1736. et 1733. facta thermometrum reductione teſtantur.

Effectum ſolis in thermometrum ipſi libere expoſitum nunquam maiorem deprehendi gradu 76$\frac{1}{3}$ d. 6. Iulii obſeruato, qui propius accedit ad gradum 54$\frac{1}{4}$ cerae liquefactae, quam gradus inter hunc et gradum aeſtus ſummi d. 15. Iulii medius. Sic enim Petroburgi thermometrum ſoli expoſitum indicaſſe tantum notaui maximum calorem an 1742. ſtyl. nou.

Iulii d. 3.	5ᵇ. 21′.	per gradum 97.
7.	4. 30	- - - 96.
Aug. 3.	4. 35	- - - 87$\frac{1}{2}$.

CONTI-

CONTINVATIO OBSERVATIONVM ASTRONOMICARVM LIPSIAE HABITARVM An. 1746 STIL. NOV. TEMP. VERO.

AVCTORE
G. Heinsio.

Auguſt d. 12. 9′. 16′. 35″. Satelles 1^mus 2vis incipiebat emergere. Obſeruatio ſat certa eſt, reliquis ſatellitibus diſtincte, et non nunquam etiam faſciis Iouis conſpicuius, licet Iupiter in vicinia horizontis et coelum in regione Iouis pauliſper vaporoſum eſſet. Lente autem emerſit ſatelles.

OBSERVATIO
Eclipſis lunae partialis
die 30 Auguſt.

Coelum quidem nubibus tectum ſpem exiguam relinquebat eclipſin hanc rite obſeruandi; attamen cum veſperi luna aliquoties per nubium hiatus ſe conſpiciendam praeberet, tubo Gregoriano ſub eo apparatu, quo obiecta 52 vicibus ſecundum diametrum amplificantur, ſequentia annotare licuit. Tempus verum definitum eſt per altitudines ſolis reſpondentes diebus ſubſequentibus captas.

Tempus verum Aſtronomicum.

11^h. 16′. 0″. Luna in fiſſura nubis primum conſtituta penumbram denſam in regione Harpali oſtendebat. Luna autem ſtatim poſt nubibus recta fuit. 11^h.

11. 19′. 30″. Adſpectus Lunae per nubium hiatum me certiorem fecit de eclipſis initio iam facto. Licuit autem ex quantitate obſcurationis aeſtimare, initium eclipſis 1½ vel 2 min. ante notatum tempus contigiſſe; quamobrem initium circiter ponendum eſt 11ᵇ. 18′. Idem animaduerſum eſt per tubum aſtronomicum 6 ped. Totum coelum deinceps nubes occupabant.

Paulo poſt mediam noctem fiſſuras agebant nubes, et coelum ſerenari videbatur, ſparſis tamen hinc inde nubibus. Licet autem coeli regio, apparenter ſerena, reuera vaporoſa eſſet; maculas tamen Lunares et vmbram Terreſtrem, quae valdè nigra apparuit, probe diſtinguere potui; quae circumſtantiae ſequentes admiſerunt obſeruationes ſat accuratas.

12ᵇ. 9′. 55″. Mare Criſium tangitur ab vmbra in regione boreali, ſitu recto, pro apparentia teleſcopii.

16. 0. Vmbra per medium maris Criſii transire aeſtimatur.

20. 55. Dionyſius incipit in vmbram incurrere

21. 55. Dionyſius totus immergitur.

12ᵇ. 23′. 10″. Mare Criſium totum intra vmbram abſconditur

Nubes iterum copioſae exurgebant, quae cum hiatus agerent, ſequentes conceſſerunt obſer-

vationes, vmbra nunc valde diluta apparente.

53. 40. Ariſtarchus totus emergit ex vmbra.

13. 5. 40. Pytheas totus emergit.

Poſtea coelum eſt factum maxime vaporoſum, halone lunam cingente, nec vlla ſtella conſpicua, ita vt maculas clariores et vmbram, praeſertim valde dilutam vix diſtinguere liceret; quae conditio reliquas obſeruationes irritas, imo de fine eclipſis valde incertum me reddidit.

58. 0. Limbum Lunae ante eclipſatum nunc vmbra liberum cernere credidi. Ad hoc ergo tempus finem eclipſis circiter referre licet.

14. 1. 0 Certiſſime finis eclipſis iam celebratus eſt, prout id quoque obſeruationes per tubos 6. et 3. ped. confirmarunt.

CONTI-

CONTINVATIO OBSERVATIONVM LIPSIENSIVM

an. 1747 ſtyl. nou. habitarum.

Iisdem inſtrumentis, quae ante deſcripſi, et ſub eodem teleſcopii Gregoriani apparatu, quo ſcilicet iſtud obiecta ſecundum diametrum 52. vicibus auget, ſequentes obſeruaui emerſiones ſatellitis primi Iouis.

Temp. vero

Auguſt. 8. 10^b. 21′. 35″. Em. prima. Obſeruatio bona coelo ſereno. Tempus non niſi per altitudines fixae d. 8. Aug. et altitudines antemeridianas ſolis d. 9 Aug. corrigere potui. Licet autem deductiones ex his altitudibus factae ſat bene inter ſe conſentiant, ita vt concluſio media ab extremis vix 10 ſecundis differat; ob temporis correctionem tamen per ſolas altitudines inſtitutam, obſervatio ad aliquot ſecunda temporis dubia pronunciari debet.

Auguſt. 24. 8^b. 43′. 32″. Em. prima.

45. 0. Em. totalis.

Iupiter cum reliquis ſatellitibus tempore emerſionis primae paulo vaporoſus viſus eſt. Statim autem cum omnes diſtinctiones apparerent, ſatellitem primum aliquantulum iam emerſum conſpexi, nempe 8^b. 43′. 42″. quam ob cauſam ex aeſtimio emerſionem primam ſupra 10. ſec. citius notaui. Correctio tem-

poris fundatur obſeruatione meridiei, quam d. 20. Aug. ſolummodo inſtituere potui; quamobrem, cum nonnullas horologii correctiones aliunde cognitas adhibere debuerim, obſeruatio etiam ex hoc capite aliquantiſper dubia cenſeri debet.

OBSERVATIONES
altitudinem poli reſpicientes.

Circa Solſtitium brumale non niſi duas limbi ſuperioris Solis altitudines meridianas quadrante obtinui; alteram d. 20. Decembr. = 15°. 49¼′ certam; alteram d. 21. Decembr. = 15°. 48′. pauliſper dubiam. Quadrantis ſtatum eundem, vt in praecedentibus, recognoui. Inde deductiones ſequentes.

	d. 20. Dec.			d. 21. Dec.		
alt. limb. ſuper. ⊙ obſ.	15°.	49′.	15″.	15°.	48′.	0″
Error. quadrantis ſubtr.		19.	15.		19.	15
	15.	30.	0.	15.	28.	45
Refractio ex Tab. Caſſinii.		3	30.		3.	30
	15.	26.	30.	15.	25.	15
Semid. ⊙ ex Tab. Caſſinii		16.	20.		16.	20
alt. centri. ⊙ vera	15.	10.	10.	15.	8.	55
differ. declin. ⊙ a ſolſtitiali			39.			ſubtr. 7
alt. centri ⊙ ſolſtitialis	15.	9.	31.	15.	8.	48
obliquitas eclipticae	23.	28.	20.	23.	28.	20
Eleuatio aequatoris	38.	37.	51.	38	37.	8
- - - - poli	51.	22.	9.	51.	22.	52
media	51.	22.	31.			vel

vel comparando inter ſe altitudines ſolſtitiales centri Solis, aeſtiuam nempe an. 1746. et brumalem an. 1747. habebitur

altit. centri ⊙lis ſolſtitialis media ex obſeruatis			
aeſtate an. 1746 - -	62°.	5′.	56″′
hieme an. 1747 - -	15.	9.	10
Inde diſtantia tropicorum	46.	56.	46
obliquitas eclipticae	23.	28.	23 ſubtr.
ab alt. ſolſt. aeſtiua	62.	5.	6
exhibet eleu. aequatoris	38.	37.	33
- - - - poli	51.	22.	27

Hinc *Eleuatio poli* Lipſiae, ſi obſeruationes reliquae an. 1746. conſulantur, ad 51°. 22$\frac{1}{4}$′, figi poteſt.

De Stellis variabilibus in Conſtellatione Cygni.

Cum d. 9. Iulii variabilem in pectore Cygni, quam *Bayerus* in Vranometria per P. notat, oculo nudo inſtar ſtellae 5^{tae} vel 6^{tae} magn. conſpicerem, Aſtronomis ob apparitionum irregularitates celebrem; animum ſtatim ad obſeruationem huius reliquarumque variabilium in conſtellatione Cygni applicui. Hoc autem die neque variabilem in collo, a *Bayero* litera X ſignatam, neque variabilem ſub capite Cygni, oculo nudo animaduertere potui, Teleſcopium deinceps adhibui terreſtrae trium pedum, quod autem tantam ſtellularum copiam circa P offerebat, vt diiudicare non potuerim, quae ex iſtis fuerit variabilis; praeſertim cum campus repraeſentationis teleſcopii nimis exiguus comparationem ſitus eius reſpectu fixarum vicinarum ex chartis cognitarum non admitteret. Vt huic

rei medelam afferrem, ob lubricas nudo oculo obſeruationes, comparaui tubos hollandicos (ocularis nempe concaui) tum 3 tum 6. pollices longos, qui eximium non ſolum repraeſentationis campum per plures coeli gradus concedebant, verum etiam clariores tantum ſtellulas conſpicuas reddebant, quo fiebat, vt ſitus ſtellarum ad fixas. cognitas promtius diiudicari, et variabilis a reliquis fixis certe diſcerni potuerit. Horum teleſcopiorum adminiculo circa finem Iulii et initium Auguſti poſitionem mutuam et magnitudinem apparentem aliquot ſtellarum Cygni, quae ad ſcopum faciebant, ad ſenſum aeſtimaui et in charta adiecta delineaui, ita quidem, vt ſitum praecipuarum ſtellarum, auctis proportionaliter diſtantiis, deſumſerim ex effigie Cygni in Tab. VI. vol. IV. Part- I. pag. 238. Tranſact. philoſ. abridgd. exhibita, (quam coelo prae ceteris magis conformem deqrehendi) reliquarum vero ſtellarum ſitum ad iſtam normam diiudicauerim; in quo negotio, me parum a vero, quantum ſenſuum iudicio fieri poteſt, aberraſſe, confido. Literae β, γ, Φ, η, χ, P, *b* ſunt notae *Bayeri*; reliquas autem literas ex arbitrio adieci. P eſt variabilis in pectore, X in collo Cygni. Ope huius ſchematis, quod ad cauam coeli ſuperficiem referri debet, viciſſitudines variabilium optime examinare licuit; cuius rei caput huc redit.

Variabilis in pectore P per totum obſeruationum tempus a d. 9 Iulii vsque ad d. 29. Dec. quo deſinunt obſeruationes, tum oculo nudo, tum per tubos hollandicos, eiusdem ſemper magnitudinis apparuit, ipſi *b* aequalis, vel exactius paulo minor, vix tamen ſenſibiliter quam

b,

δ, quae eſt. ſtella 5^{tae} magnitudinis.

Variabilis ſub capite Cygni per iſtud temporis interuallum nunquam in coſpectum venit.

Variabilis in collo X, cuius apparitionem Calendarium Berolinenſe ad finem Auguſti, ſed, vt euentus docuit, praemature praedixerat, ſequentes ſubiit viciſſitudines, quas ſemper teleſcopio hollandico 6. pollicum contemplatus ſum, quotiescunque coeli ſerenitas id permiſit.

Octobr. 8. Coelo ante per plures dies nubilo, nunc autem ſereno, primum in conſpectum venit variabilis X ſatis clara, nempe ipſi Q 7^{mae} magn. aequalis.

9 et 10. Eadem deprehendi ac d. 8.

21. X apparuit vt M, vel paulo maior quam M quae eſt 6^{tae} magn. lumen Lunae forte.

Nouembr. 6. Poſt plures dies nebuloſos coelo nunc valde ſareno, varialis X maior quam M, minor autem quam η, aequalis ipſi Φ, quae eſt 5^{tae} magn. viſa eſt.

23. A die 6. Nou. hucusque coelum continuo fuit nebuloſum et pluuioſum. Hodie coelo per exiguum tempus ſerenitatem mentiente, X ipſi M iterum aequalis, vel vix ſenſibiliter minor quam M apparuit.

29. Coelo ſereno X ſenſibiliter minor quam M, paululum tamen maior quam Q. Hinc X cadit inter ſtellas 6^{tae} et 7^{mae} magn.

Decembr. 2. Eadem phaenomena vt d. 29. Nou.

6. Variabilis X., quantum ob caelum vaporoſum fieri potuit, ipſi Q aequalis iudicabatur, ideoque 7^{mae} magn.

9.

9. X, praesente Luna, vix conspicua fuit; certe tamen ipsa Q vel R non maior cernebatur.
29. Post tempestatem valde pluuiosam variabilis X amplius videri non potuit.

Ex his obseruationibus elucet, phasin maximam variabilis X instar stellae 5^tae magn. circiter incidisse in d. 6. Nouembr. cuius phasis tempus vt certiori modo innotescat, consulendae sunt phases similes ante et postmaximam. Huius generis sunt obseruationes d. 8. Octobr. et d. 6. Decembr. variabilem ipsi Q aequalem indicantes; vnde tempus phasis maximae concluditur d. 7. Nou. mane. Eadem conclusio prodit, si diebus 21. Octobr. et 23. Nouebr. variabilis ipsi M aequalis statuatur. Comparatis autem inter se obseruationibus d. 8. Octobr. et 9. Decembr. quae variabilem ipsi Q fere aequalem quoque faciunt, habebitur tempus phasis maximae d. 8. Nou. Ex his satis certe tempus phasis maximae alligare licet ad d. 7. Nouembr. quo stabilito tempus *reuolutionis* huius stellae seu reditus ad phasin maximam ex plurium annorum interuallo certe definiri poterit. Scilicet *Godofredus Kirchius*, primus huius stellae an. 1686. obseruator, periodum hanc determinauit $404\frac{1}{3}$ dierum in Miscell. Berolinens. Vol. I. p. 211. vsus obseruationibus suis ab an. 1686 vsque ad an. 1713. *Maraldus* in Commentar. Acad. Paris. ad an. 1713. p. 64. ed. Bat. suas obseruationes cum Kirchianis comparans eandem pronunciauit 405. dierum, et Epocham phasis maximae constituit d. 1. Sepmebr. st. n. 1695. et d. 20. April. st. n. 1712. Si Epocha posterior conferatur cum nostra phasi

phasi maxima d. 7. Nov. 1747. ex interuallo 12984 dierum, consulta periodo 405. dierum, colliguntur 32 reuolutiones interca peractae, et inde demum innotescit periodus $405\frac{3}{4}$ dierum. Sin autem epocha d. 1. Septembr. 1695 cum phasi maxima d. 7. Nou. 1747, quod intervallum excedit dimidium seculum, comparetur, interiectis 19059 diebus, prodeunt 47. reuolutiones, quantitate vnius existente $405\frac{24}{47}$ vel rotunde $405\frac{1}{2}$ dierum.

Obseruationes aliquot meteorologicae.

Barometrum satis amplum, luminis scilicet 3. lin. Paris. extraordinariam ☿ii altitudinem indicauit

an. 1747. Nou. 24. in meridie - - - - 28. dig. $1\frac{2}{3}$ lin mensurae Paris. secundum partes 12mas digiti

25. hor. 3. post merid. - - 28 - - - $1\frac{5}{8}$ - -

vtroque die coelum fuit valde nebulosum.

an. 1748 Ianuar. 12. hor. $9\frac{1}{4}$ mane - - 28 - - $2\frac{3}{8}$ - -

Thermometrum ☿iale idem, quo in praecedentibus vsus sum, ostendit

Frigus maximum

an. 1747. Ianuar. 13. hor. $8\frac{1}{2}$ mane - - - $168\frac{9}{10}$

an. 1748. Ianuar. 12. hor. $9\frac{1}{4}$ mane - - - $171\frac{4}{8}$

Calorem maximum

an. 1747. Augusti. 12. et Sept. 8 - - - 111.

Initio Septembris per plures dies calor ingens fuit obseruatus.

OBSERVATIO ECLIPSIS SOLARIS

die 25 Iulii an 1748 ſt. Nou. Lipſiae habita

a
G. Heinſio

1.

Tab. XVII. Dies, qui praecedebant eclipſin, maxima ex parte ſereni, de ſucceſſu obſeruationis ſelici ſpem iniiciebant, et commodam offerebant occaſionem ex obſeruationibus altitudinum Solis reſpondentium copioſis, quadrante conſueto factis, ſtatum duorum horologiorum oſcillatoriorum reſpectu temporis veri examinandi, et factis debitis correctionibus cognoſcendi, ita vt de tempore vero obſervationum, quas proferam, maxime certus ſim. Aſt ipſe dies, quo eclipſis contigit, ab initio ſpem fruſtrari videbatur. Ante initium nempe eclipſis copioſae nubes ſe oſtendebant, interruptae tamen et nonquam ſpatium coeli ſerenum admittentes, qui coeli adſpectus, accedente circa hor. $10\frac{1}{4}$ tempeſtate, quam fulgura et tonitrua comitabantur, continuauit fere vſque ad meridiem, quo nubes diſpergi incipiebant, et coelum ſerenum fieri. Inde factum eſt, vt negotium obſeruationum ante meridiem ſaepe turbaretur. Nec initium eclipſis exacte obſeruaui; finem vero per tubum Gregorianum ſub apparatu, quo iſte obiecta 52 vicibus ſecundum diametrum auget, optime annotare licuit hor. 1 19′ 38″ temp. vero.

2. Pracipuae obſeruationes inſtitutae ſunt per tubum aſtronomicum tres pedes pariſinos longum, obiecta ſecundum diamerum 14 vicibus amplificantem, eaque clare reprae-

repraeſentantem (ſi quidem iſte omnes Iouis Satellites nitide exhibet), qui prae ceteris aptus ad hoc negotium iudicabatur, cum per feneſtras conclauis ad Solem altum commode dirigi poſſet, praeterea vero campum repraeſentationis $1\frac{1}{2}$ gradus fere ſiſteret. Impoſitus erat iſte tubus machinae parallacticae atque reticulo inſtructus, quod quatuor fila argentea tenuiſſima ad angulos ſemirectos ſe mutuo ſecantia gerit. Inſtrumento ſic ſtatuto, vt limbus Solis vel ſuperiorvel inferior, pro conditione phaſis, filum aliquod, diurnum exhibens, raderet, numerante ſocio ſecunda horologii, notaui appulſus limbi Solis vel praecedentis vel ſequentis, pro conditione obſcurationis, nec non cornuum phaſis atque limbi Lunae in diſco Solis conſpicui, ad filum horarium diurno normaliter inſiſtens; quantum id coeli facies permiſit.

3. Mora diſci Solaris per filum horarium, ex obſeruationibus copioſis, diebus 23 24 25 Iulii habitis, et bene inter ſe conſentientibus, deprehenſa eſt $= 2'\ 14\frac{1}{2}''$ temporis Solaris; vnde diameter Solis $= 33'\ 42''$, in partibus diurni. Pro conuerſione iſtarum in partes circuli maximi, ſi ſumatur Solis declinatio $= 19°\ 35'$, ex analogia ſin. tot. : coſ. $19°\ 35' = 33'\ 42''$: quaeſitum, inuenitur diameter Solis in partibus circuli maximi $= 31'\ 45''$.

4. In phaſibus decreſcentibus ſeu ante obſcurationem maximam, ex appulſibus limbi Solis ſequentis S, limbi Lunae L, cornu praecedentis A, ſequentis B, ad filum horarium reticuli Ss, acquiſiui in recta sa, ad Ss normali et filum reticuli diurnum exhibente, ſpatia sb, ab, lb, Fig. 2.

lb, per partes temporis veri Solaris expreſſa, ductis nempe B*b*, A*a*, L*l*, ad S*s* parallelis. Sumto deinceps momento appulſus B pro momento obſeruationis, ad quod nempe locus centri Lunae C in figura deſignari debuit, quaeſiui correctiones, a ſpatiis *ab*, *lb*, ante definitis ſemper ſubtrahendas, ob progreſſum Lunae indiſco Solis temporibus per ſpatia *ab*, *lb*, factum, iuxta eam methodum, quam fuſe expoſui in deſcriptione eclipſis Solaris d. 4. Auguſt ſt. n. 1739 Petropoli obſeruatae; hunc in finem, vt Luna progreſſu ſuo quaſi priuata eum acquireret in diſco Solis ſitum, quem habuit momento appulſus B. Hoc modo innotuerunt ſpatia *ab*, *lb*, correcta; et per conſtructionem ſchematis ex cognita Solis ſemidiametro et reliquis datis, poſitio centri Lunae in C reſpectu limbi Solis ſequentis et diurni nempe *sc* et *c*C (ducta C*c* ad S*s* parallela); nec non ſemidiameter Lunae. Simili modo in phaſibus creſcentibus ſeu poſt obſcurationem maximam ex appulſibus Fig. 3. limbi Solis praecedentis P, limbi Lunae L, cornu praecedentis B, ſequentis A, ad filum horarium reticuli P*p*, obtinui ſpatia *pb*, *ab*, *lb*, et deinceps ad momentum appulſus B pro momento obſeruationis ſumtum, ſpatia *ab*, *lb*, correcta; poſitionem centri Lunae per *pc* et C*c*, et ſemidiametrum Lunae. Sequens tabula ſiſtit obſeruationes praecipuas quoad data et deductiones inde factas. Figurae autem omnes ſitu erecto delineatae intelligi debent.

Data ex obseruatione in phasibus decrescentibus

deductiones

Locus obs. in fig. 3	Momentum obs. temp. veri	sb	ab correct.	correctio ipsius ab	lb correct.	correctio ipsius lb	Cs	Cc	semidiam. Lunae
	° ′ ″	′ ″	′ ″	″	′ ″	″	′ ″	′ ″	′ ″
4	10 36 39	1 26¼	0.45⅘	⅕	0. 1½	0	2.29½	0.17¾	1. 4½
5	11 2 51	1 5¼	1. 3¼	¼	0. 8¾	¼	2. 0	0.32¾	1. 4
7	11 14 38	0 52	1.14¾	0	0. 11′	¼	1.45′¼	0.38¾	1. 4½
8	11 25. 7	0 38½	1.28¼	——	0.14½	——	1.28	0.47′¼	1. 4⅛

in phasibus crescentibus

		pb					pc		
11	0. 0. 7	1.26	0. 5½	0	. 1⅞	1⅞	1.27¾	1. 8½	1. 4
12	0. 2.38	1.23¾	0.12 7/10	⅘	0.55½	1¼	1.32¾	1. 0	1. 3¾
13	0. 6.3	1. 9½	0.21¾	1	0.47	1.	1.36½	1.12′	1. 3¾
14	0.19.52	1.17	0.35	——	0.28	——	1.53½	1.21¼	1. 4⅛

Semidiameter Lunae media 1 4 1/11.

Partes temporis Solaris veri communem mensuram totius tabulae sistunt, quae facile in partes circuli diurni, quem Sol tunc temporis descripsit, transmutantur, si singulis 4. secundis temporis assignetur minutum circuli diurni. Additis correctionibus respondentibus ad *ab*, *lb* correcta, hisque comparatis cum momento appulsus B, ipsae obseruationes, si placet, restitui possunt. Omissae autem sunt correctiones in tabula iis casibus, quibus appulsus ad fila obliqua reticuli sunt obseruati, spatia vero *ab*, *lb*, correcta inde deducta; ne ordo tabulae turbetur.

5. Semidiameter Lunae tot obseruationibus confirmata $= 1'.\ 4\frac{1}{11}''$ conficit in partibus circuli diurni $16'.\ 1\frac{1}{3}''$, in partibus autem circuli maximi (vt §. 8) $15'.\ 54''$; vnde diameter Lunae rotunde $= 30'.\ 11''$. Si haec referatur

tur ad altitudinem Solis meridianam, quae circiter eſt 58°. 13′; habebitur diameter Lunae horizontalis = 29′. 45″. et parallaxis Lunae horizontalis reſpondens = 54′. 32″, poſita ratione inter horizontales Lunae diametrum et parallaxin = 6: 11.

6. Ex obſeruationibus praecedentibus §. 4. per Cc et sc vel pc dantur poſitiones centri Lunae reſpectu diſci Solaris et diurni ad data tempora, ideoque ſemita centri Lunae, prout figura 4. ſitu erecto exponit. Ad hanc certiori modo definiendam conducunt etiam deductiones ſequentes, quas ex appulſibus limbi Solis vel praecedentis P vel ſequentis S, limbi Lunae L et cornu A vel B, ſumta Lunae ſemidiametro = 1′. 4″, per conſtructionem ſchematis inueni in eadem menſura, quam §. 4. notaui.

Locus obſeru. in fig. 4	Momentum obſeru temp. vero	as	al correct.	cs	Cc
	h ′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″
6.	11. 7. 6.	2. 6½	1. 17½	1. 53¾	0. 36½
		ap		pc	
9	11. 49. 9	0. 53	0. 41¼	1. 15½	1. 1½
17	0. 37. 2.	2. 2¾	0. 53¼	2. 13⅝	1. 31½
18	0. 45. 31	2. 6½	0. 47¾	2. 22	1. 36
		pb	lb		
20	0. 56. 37	1. 34	0. 4	2. 37	1. 45

Fig. 2.

Fig. 4 Loca in ſemita centri Lunae per numeros diſtincta exponunt loca centri Lunae pro iis obſeruationibus, quae iisdem reſpectiue numeris inſigniuntur. In initio eclipſis locus centri Lunae fuit in I, in fine in F.

7.

7. In designatam centri Lunae semitam ex centro disci Solaris *e* demissa perpendicularis *e*O manifestat distantiam centri Lunae a centro Solis boream versus minimam $= 0'.\ 8''\frac{1}{2}$ in mensura schematis §. 4, $= 2'.\ 5''.$ partium $\frac{1}{2}$ diurni vel $1'.\ 58''.$ partium circuli maximi. Inde datur quantitas eclipsis $=$ summae semidiametrorum Solis et Lunae demta distantia centrorum minima $= 15'.\ 52''\frac{1}{2} + 15'.\ 5''\frac{1}{2} - 1'.\ 58'' = 29'.\ 0$ partium circuli maximi vel $=$ 10. digitis cum $57\frac{1}{2}$ minutis.

8. Constructa centri Lunae semita, sumtaque Lunae semediametro $= 1'.\ 4''$, reliquae etiam phases assignari potuerunt, quarum obseruatio moram tantummodo inter appulsum limbi Solis praecedentis vel sequentis et alterutrius cornu patefecit. Designato enim vi huius morae cornu loco in peripheria Solis, atque ex eo ope semidiametri Lunae facta intersectione semitae centri Lunae, innotuit locus Lunae ad momentum appulsus cornu ad filum horarium.

9. Hoc pacto phasium singularum magnitudine iuxta indicatas §. 4. 6. 8. methodos repraesentatorum dimensio secundum digitos et minuta ecliptica ope scalae in hunc finem constructae potuit institui. Sequens tabula exhibet momenta phasium et quantitates obscurationum; in qua etiam distantiae centri Lunae in singulis phasibus a loco eius vel in initio eclipsis I, vel in obscuratione maxima O sistuntur expressae per partes temporis veri, quo centrum Lunae spatium inter locum initii et locum centri in data phasi, vel inter hunc et locum obscurationis ma-

maximae, descripsit. Scilicet ex comparatione situs mutui locorum centri Lunae ad momenta phasium innotuit motus centri Lunae interuallo 40. minutorum temporis in semita $= 0.\ 57\frac{1}{2}$ consuetae schematis mensurae. Ex hoc autem spatio, facta eius diuisione secundum partes temporis, distantias memoratas cognoscere et inde tempus tum initii eclipsis tum obscurationis maximae definire licuit. Initium nempe medium ex comparatione obseruationum contigit $10^b.\ 11'.\ 41''$; obscuratio autem maxima $11^b.\ 46'.\ 32''$. tempore vero.

Locus obseru. in fig. 4	Momentum phasis temp. vero	Quantitas obscur.	Dist. obseru in tempore ab initio	Tempus initii verum
1	$10^h.\ 18'.\ 30''$	$3^{dig.}\ 56'$	$7'.\ 15''$	$10^b.\ 11'.\ 21''$
2	22. 30	1. 17	10. 15	12. 15
3	25. 23	1. 47	14. 0	11. 23
4	36. 39	3. 10	24. 55	11 44
			Initium med. dist. obser. ab obscur. max.	0. 11. 41 Temp. obscur. max. verum
5	11. 2. 51	6. 2	44. 20	11. 47. 11
6	7. 6	6. 51	38. 45	45. 51
7	$11^b.\ 14'.\ 38''$	7. 30	32. 55	11. 47. 33
8	26. 7	9. 8	19. 20	45. 27
	obscur. max.	$10.\ 57\frac{2}{3}$		
9	49. 9	10. 46	2. 55	46. 14
10	57. 5	10. 14	10. 15	46. 50
11	0. 0. 7	9. 53	13. 25	46. 42
12	2. 38	9. 26	16. 35	46. 3

13	6. 33	9. 3	19. 50	46. 43	
14	19. 52	7. 26	33. 15	46. 37	
15	26. 5	6. 40	39. 30	46. 35	
16	31. 44	5. 52	46. 0	45. 44	
17	37. 2	5. 26	49. 40	47. 22	
			Medium pro obſcur. max		11. 46. 32.
18	45. 31	4. 33			
19	53. 5	3. 26			
20	56. 37	3. 0			
	r. 19. 38	Finis			

10. Ope parallaxis Lunae horizontalis §. 5. inuentae $= 54'. 32''$, ſumtis ex calculo ad tempus nouilunii declinatione Solis $= 19^{\circ}. 34\frac{1}{4}'$, et angulo eclipticae cum meridiano verſus orientem $= 103^{\circ} 12\frac{1}{2}'$; poſitaque elevatione aequatoris Lipſiae $= 38^{\circ}. 37\frac{1}{4}'$, conſtruxi ſchema conſuetum projectionem Terrae orthographicam tempore nouilunii exhibens, in quo parallelus ellipticus pro latitudine Lipſienſi deſcriptus ad ſingula phaſium obſeruatarum momenta, facta eius diuiſione ſecundum tempus, concedebat locum centri Solis, quod parallelum iſtum percurrere fingitur, cuius centri poſitio reſpectu circuli declinationis ex ſchemate ſimul innoteſcebat. Iam cum ad ſingula phaſium momenta, vi conſtructionis iſtarum, daretur poſitio centri Lunae reſpectu circuli declinationis et centri Solis, facillime loca centri Lunae pro iis momentis in ſchemate aſſignari potuerunt. Inde vero ſe manifeſtabant, orbita Lunae viſa rectilinea inclinata verſus

eclipticam angulo = 5°. 43′, conuergens cum ista ad partes orientales; latitudo Lunae vera borealis in coniunctione = 28′. 38″. et horarius Lunae a Sole = 27′. 40″. partium circuli maximi. Ope horarii collatis centri Lunae locis ad phasium momenta cum loco coniunctionis seu intersectione orbitae visae cum circulo latitudinis innotuerunt interualla inter momenta ista respectiue et momentum coniunctionis seu nouilunium. Hoc pacto deductum est.

ex obseru.	Tempus verum nouilunii d. 25. Iuli.	ex obseru.	Tempus verum nouilunii
4	0^b. 4′. 19″.	11.	0^b. 4′. 2″
6	4. 46	12.	3. 23
7	5 28	13.	4. 3
obscur. max.	4. 52	14.	3. 0
9	3. 29	15.	4. 15
10	4. 35	20.	4. 7
		fine	3. 28

Medium pro nouilunio 0^b. 4.′ 8″

11. In. summam collectis iis, quae hactenus deducta sunt habentur ex obseruatione eclipsis nostrae sequentia elementa.

Coniunctio vera ☉ et ☽ respectu ecllipticae sub meridiano Lipsiensi temp. vero an. 1748. Iulii 25. st. nou. 0^b. 4′. 8″.

Latitudo Lunae vera borealis in ☌ 0°. 28. 38

Inclinatio orbitae ☽ visae ad circulum latitudinis versus ortum. 84°. 17′.

Parallaxis ☽ horizontalis 0. 54. 32

Diameter

Diameter ☽ horizontalis $0^{h}.\ 29'.\ 45''$
Diameter Solis $0.\ 31.\ 45$

12. Copioſae erant maculae in Sole, quarum occultationes a Luna annotare decreueram. Hunc in finem ope machinae parallacticae diebus 24 et 25. Iulii horis pomeridianis poſitiones macularum precipuarum reſpectu diſci et diurni Solis per appulſus limborum Solis praecedentis *p* ſequentis *s*, et centri alicuius maculae, ad filum horarium P*p* nec non centri maculae ad fila obliqua obſeruaui; vnde ſequentes obtinui determinationes, ductis ſcilicet *k* K, *a* A, *b* B, *m* M, ad *p* P parallelis Fig. 4.

		d. 24. Iulii	d. 25. Iul.
pro macula		hor. 3. 40′.	hor. 5. 30′.
k	PK =	$0'.\ 17\frac{1}{2}''$	$0'.\ 9\frac{1}{4}''$.
	K*k* =	$0.\ 53\frac{1}{2}$ dub.	$0.\ 48\frac{1}{2}$ dub.
a	PA =	$0.\ 58$	$0.\ 43\frac{1}{2}$
	A*a* =	$1.\ 34\frac{3}{4}$	$1.\ 28.$ dub.
b	PB =	$1.\ 3\frac{1}{2}$	$0.\ 46\frac{3}{4}$
	B*b* =	$1.\ 24\frac{1}{4}$	$1.\ 18\frac{1}{2}$
m	PM =	$1.\ 55\frac{3}{4}$	$1.\ 46\frac{3}{4}$
	M*m* =	$0.\ 45\frac{1}{2}$ dub.	$0.\ 44.$

Menſura determinationum eadem eſt, quam pro ſchemate §. 4. notaui, inuoluens nempe partes temporis, quarum $2'.\ 14\frac{3}{4}''$ conficiunt moram diſci Solaris per filum horarium. In fig. 4 repreſentaui ſitum macularum erectum ſecundum determinationes d. 25. Iulii hor. $5\frac{1}{2}$, reliquarumque macularum in diſco Solis tunc conſpicuarum loca ad iſtum ex aeſtimio definita ſignaui.

13. Appulſus limbi Lunaris ad ſequentes maculas durante eclipſi obſeruaui per tubum machinae parallacticae, alium enim adhibere diſſuadebat attentio ad obſervationes principales hactenus enumeratas.

d. 25. Iulii
temp. vero ante meridiem
$10^{b}.\ 20'.\ 34''$. Medium maculae *k* tegitur a limbo ☽ orien-
11. 5. 22 - - - - - *b* - - - - - (tali
11. 11. 22 - - - - - *d* - - ſed dubius ſum de nomine maculae

poſt meridiem
0. 21. 5 vel $10''$. Macula *b* tota emergit ad limbum ☽ occidat,
0. 24. 16 - - *c* tota - - -
0. 24. 51. Medium maculae *y* prodit - - - -
0. 46. 1 Macula tota *m* in conſpectum venit

14. Tempore obſeruationis maximae circa eam regionem marginis Lunaris, qui extra Solis diſcum extabat, et cornua in peripheria Solis definiebat, nec ullum lumen, nec annulum lucidum, cuiusmodi ex atmoſphaera Lunae vel inflexione radiorum Solarium ad iſtum Lunae marginem oriundum alias ſuſpicari licebat, per tubum machinae parallacticae animaduertere potui; cornua potius optime terminata apparuerunt. Nec in fine eclipſis Luna penitus e diſco Solis egreſſa ad marginem limbo Solis adhuc maxime vicinum, eiusmodi lumen oſtendebat per tubum Gregorianum, licet totus fere Sol extra campum repreſentationis tubi poneretur, vt eiusmodi lumen, ſi quoddaretur, ſenſibile effici poſſet. Tempore obſcurationis ma-

maximae pallido quidem lumine fruebamur; eo tamen obiecta probe adhuc distinguere licuit, melius, ac nonnumquam Sole occidente fieri solet. Venerem quoque eodem tempore conspexerunt multi oculis nudis, presertim quos iuuabat aedificiorum vmbra; ipse Venerem attentus ad alias obseruationes non vidi.

15. Amicus curam in se susceperat obseruationum meteorologicarum tempore eclipsis. Hunc in finem thermometrum mercuriale Soli libere exponebatur; aliud vero in loco vmbroso, quem aër externus ferire poterat, vna cum barometro, asseruabatur, vtrumque thermometrum ea diuisione instructum erat, qua gradus aquae bullientis per 0, gelascentis per 150, descendendo a priori termino, notatur. Thermometrum in loco vmbroso vix sensibilem subiit mutationem, circa initium et fere per totam eclipsin $115\frac{1}{2}$, circa finem autem 114 monstrauit. Barometrum quoque toto eclipsis tempore constantem retinuit altitudinem. Thermometrum Soli expositum ad quina minuta temporis veri obseruatum est, et variationem quidem ostendit notabilem, ast certae legi non satis adstrictam, quam nubes continuo interuenientes, praesertim ab initio eclipsis vsque ad obscurationem maximam, turbabant. Generaliter tamen circa obscurationem maximam gradum caloris minorem patefecit, ac in initio et fine eclipsis, differentia maxima existente $17\frac{1}{2}$ grad. Sic thermometrum istud indicabat

Temp. vero		gradus therm.	Temp. vero		gradus therm.
10^{b}.	0′	109	11^{b}.	45′	114
	10	105		50	114
	20	99		55	114
	25	98	0.	0	115½
	30	100		10	110
11.	30	112		35	108
			1.	15	105

Hor. 5. 34′. post meridiem thermometrum idem in loco pristino, ast iamdudum vmbroso facto, ostendebat 110. coelo valde sereno.

OBSERVATIO ECLIPSIS SOLIS

ANNI MDCCXLVIII. DIE $\frac{14}{25}$ MENSIS IVLII IN SPECVLA ASTRONOMICA IMPERATORIA REPARATA QVAE PETROBVRGI EST PRAESENTE ILLVSTRISSIMO COMITE DE RASVMOVSKI ACADEMIAE SCIENTIARVM PRAESIDE INSTITVTA

A

Ioſeph. Ad. Braunio, et ſacio Popouio.

Quamuis ſpecula aſtronomica imperatoria incendio illo fatali, quod in aedibus academicis circa finem anni MDCCXLVII. factum eſt, maximum ceperit detrimentum, quum inſtrumenta aſtronomica omnia eo ſint conſumta, ipſaque ſpecula paene interierit: tamen cura omni laude maiore Illuſtriſſimi atque Excellentiſſimi Praeſidis noſtri non ita multo poſt ea non ſolum reparata, ſed etiam inſtrumentis neceſſariis ita fuit denuo inſtructa, vt obſeruationes aſtronomicae neceſſariae interim haberi queant, donec noua recentiſſimis, iisque exquiſitiſſimis adornata inſtrumentis erit perfecta. Quod igitur ad hanc eclipſeos ſolis obſeruationem attinet, in ea neceſſariam adhibuimus praeparationem. Linea meridiana de nouo ducta, et ex altitudinibus ſolis reſpondentibus ita correcta, vt pro vera reputari queat, horologia ſecundum verum motum ſolis ſunt directa. Licet diebus aliquot eclipſin hanc antecedentibus coelum ita fuerit pluuium, vt pertenuis ſpes oſtenderetur eam obſeruandi: tamen ipſo, quo contigit, die ſerenitas non defuit. Momenta et phaenomena huius eclipſeos potiora vti ſecundum tempus verum euenere, nobis ſunt hac ratione adnotata:

H. M.

H.	M.	S.	Tempore vero.
11	49	11	initium
	55	7	dig. 1
	55	19	Immerſio maculae A
0	2	50	dig. 2.
	13	12	dig. 3
	24	52	Maculae B immerſio
1	12	3	Maxima obſcuratio = 9 dig. et 7 minutor.
	45	24	Emerſio maculae B
	47	48	Emerſit macula C
	52	46	Emerſit macula D.
2	31	33	Finis

Tab. XVII. fi. 5. Diſcus ſolis tempore eclipſis per tubum aſtronomicum adparuit in hunc modum maculis conſperſus, vti figura monſtrat.

Obſeruatio facta eſt partim directe tubo aſtronomico 8. pedum Lond. partim machina tubo aſtronomico 6. pedum Lond. inſtructa, per quem imago ſolis transmiſſa eſt in tabulam in ſuos digitos more conſueto diuiſam. Succeſſiuae digitorum obſcurationes, vti macularum immerſiones et emerſiones omnes propter quaedam impedimenta adcurate obſeruari non potuerunt. In maxima ſolis obſcuratione per tubum 14 pedum Lond. limbus lunae viſus eſt circumdari filo quodam lucido albicante eiusmodi nitoris, vti adparet luna plena. Hoc filum lucidum cingebat arcus coloratus ad $\frac{1}{5}$ digitum diametri ſolis in diſcum ſolis porrectus. Colores eodem modo, quo pars iridis ſuperior conſpicitur, adparebant, diſtinctius tamen prope limbum lunae.

ECLIP

ECLIPSIS LVNAE

Anni MDCCXLVIII die 29 Menſis Iulii ſt. v.
EX OBSERVATORIO IMPERATORIO REPARATO OBSERVATA

Ioſeph. Ad. Braunio.

Quod fere in omnibus eclipſium lunarium obſeruationibus contingere ſolet, vt difficillimum ſit terminos vmbrae terreſtris et penumbrae diſtinguere, id quoque in praeſenti nos eſſe expertos confitendum eſt. Vmbra enim terreſtris ita diluta et male terminata adparuit, vt cum penumbra confuſa vix ac ne vix quidem diſtingui potuerit. Obſeruationem tubo aſtr. 12 pedum Lond. micrometro Kirchiano inſtructo inſtituimus, cuius potiora momenta ſunt, quae ſequuntur, ſecundum tempus verum adnotata, quantum per difficultates commemoratas facere licuit.

H.	M.	S.	
o	10	34	Initium aeſtimaui.
	19	17	Vmbra tangit mare humorum.
	23	9	- - Gaſſendum.
	24	50	Capuanus plane immerſus vmbrae eſt
	27	9	Vmbra ad Tychonem.
	28	55	- - Grimaldum.
	31	41	- - Bullialdum.
1	0	18	Maxima obſcuratio = 5 dig. 23. min.
	4	50	Grimaldus emergere coepit.

	49	11	Vieta emergit.
	49	41	Mare humorum plane umbra egreſſum eſt.
	52	33	Schikardus plane emerſit.
2	3	11	Fracaſtorius emerſit.
	5	18	Tycho plane vmbra liberatus.
	26	43	Finis verſus Snellium adparuit.
	29	13	Finis penumbrae.

Quantitas eclipſeos determinata eſt micrometro Kirchiano ad tubum adplicato. Differebant quidem paululum tempora initii atque finis huius eclipſis ſecundum meam et Popouii obſeruationem tubo quadranti adplicato duos pedes longo in turri ſuperiore inſtitutam, quae differentia autem partim diuerſitati tuborum, partim confuſis vmbrae et penumbrae terminis erit tribuenda.

Tempore eclipſis ſolaris ratio quoque habita eſt variationis caloris, aliarumque athmoſphaerae mutationum, quae ea durante contigere. Obſeruationes has meteorologicas faciendas ſuſcepit Vir Clariſ. Lomonoſouius. Inſtitutae ſunt duobus thermometris mercurialibus concordantibus et barometro in hypaethro aedium academicarum. Thermometrorum alterum e diametro ſoli expoſitum, alterum in vmbra columnae ligneae erat collocatum. Bulbi erant aequales figurae ſphaericae diametri ſemidigitatis. Diuiſio vtriusque thermometri erat ea, qua gradus aquae bullientis per 0, gelascentis per 150 deſcendendo inſignitur. Barometri diuiſio erat ſecundum pedem Pariſinum. Obſeruatio integra, vti nobiscum a Viro Cl. eſt communicata ita ſe habet.

Tem-

Tempus	Thermometrum in sole	Thermometrum in vmbra	Barometrum	Status aeris.
H. M.				
8.30	—	128	—	Coelum nubibus albis vndulatis tegebatur.
10.25	95	115	—	nubes rariſſimae, tenuiſſimae
10.32	90	114½	—	Sudum.
10.35	83	114	—	
10.58	80	113½	—	
11.17	77	113	—	
11.23	76	113	27.00	
11.30	76	113	26.94	
11.41	76	112⅔	26.92	
11.46	74	113	26.88	Sol incipit deficere.
11.50	76	113½	26.86	
11.55	75	113½	26.88	nubecula tenuiſſima
12. —	77	114	—	Sudum.
— 3	79	114	—	
— 6	84	114½	26.95	
— 10	84	115	26.95	
— 15	84	116	26.95	
— 20	86	116	27.00	
— 25	85	116½	27.05	
— 30	95	117	27.05	
— 35	96	117	27.08	
— 40	101	117	27.14	
— 45	104	117	27.17	
— 50	107	119	27.19	
— 55	109	120½	27.20	
1 —	111	121⅔	27.23	
— 5	112	122	27.25	
— 10	112	122	27.24	

Tempus	Thermometrum in sole	Thermometrum in umbra	Barometrum	Status aeris.
H. M.				
— 15	112	122½	27.24	Nubes tenuissimae undulatae in sole
— 20	111⅛	123	27.24	Sudum.
— 25	106	122½	27.24	
— 30	104	123	27.25	
— 35	105	123	27.25	
— 40	105	122½	27.25	
— 45	103	122	27.25	
— 50	101	121½	27.25	
— 55	99	121⅛	27.25	
2 —	101	122	27.25	
— 5	98	121⅛	27.25	
— 10	97	121	27.25	
— 15	101	122	27.26	
— 20	100⅛	122	27.26	
— 25	101	123	27.26	
h.				
4. 30	—	—	27.19	Sudum.
4. 41	85—	120	27. 5	
4. 55	85—	115	27.00	
5. —	88—	115	27.00	

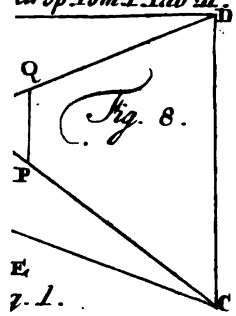
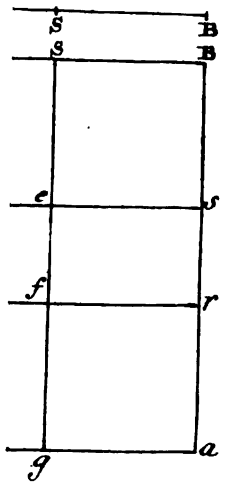
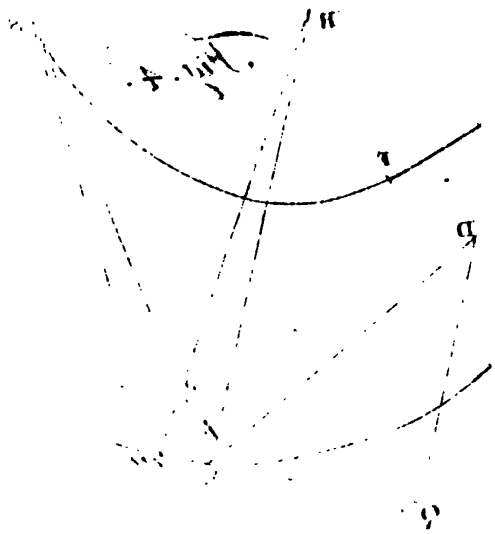
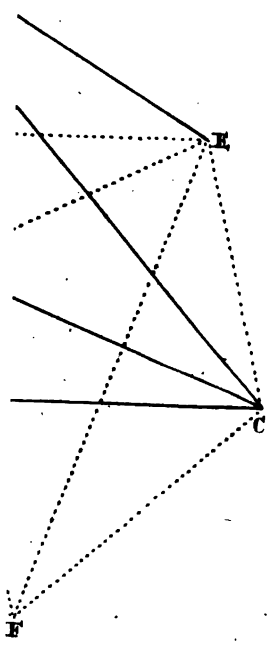


Fig. 8.

z. 1.







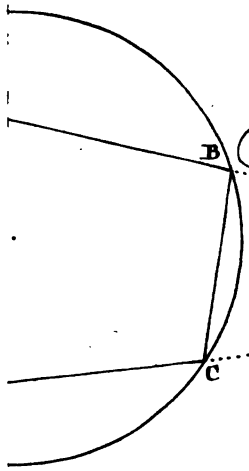


Fig. 6.

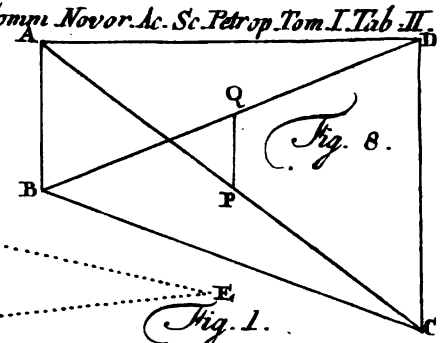


Fig. 8.

Fig. 1.

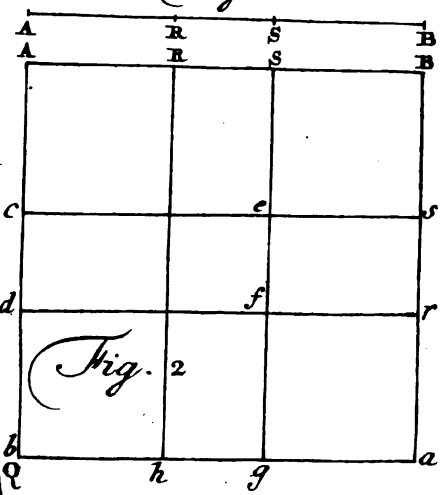


Fig. 2

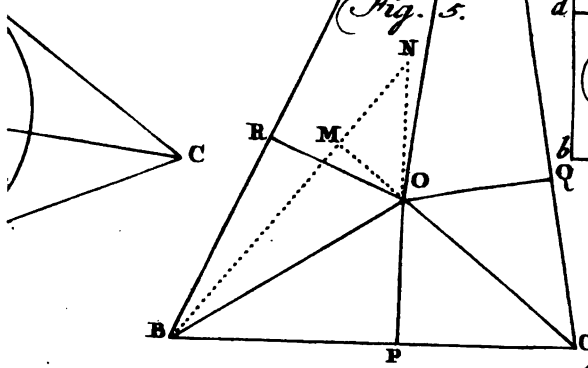
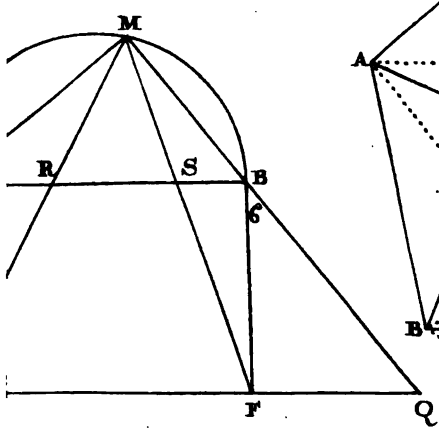


Fig. 5.



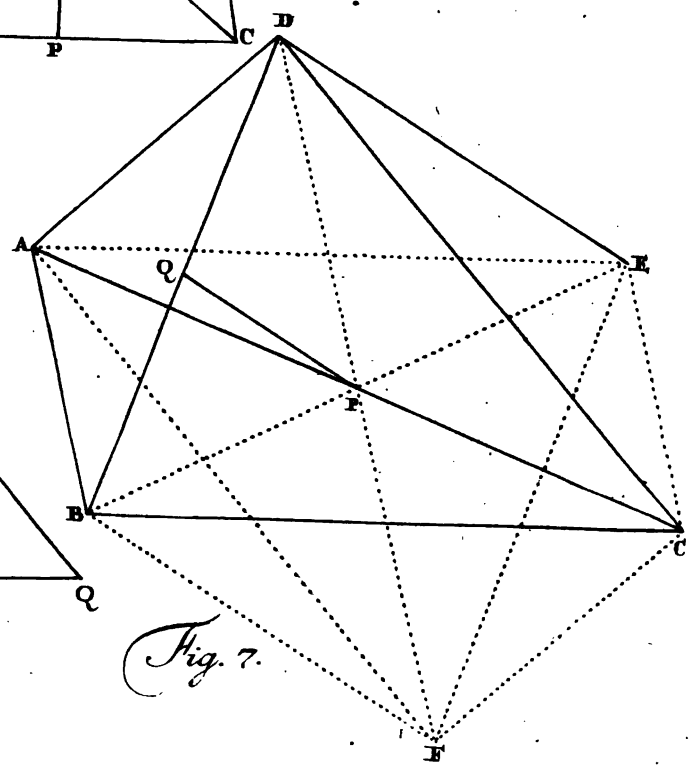
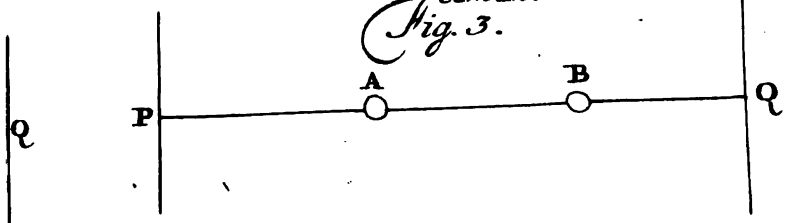


Fig. 7.

Fig. 3.



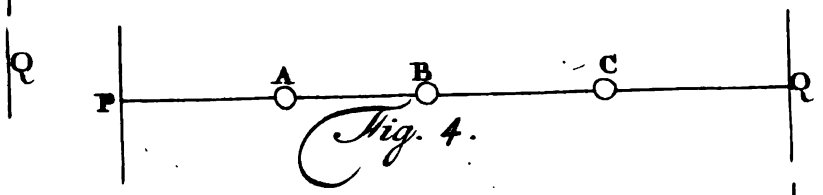


Fig. 4.

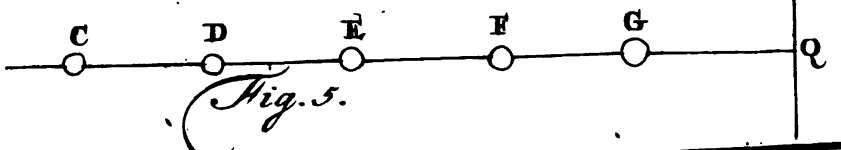


Fig. 5.

Tab. IV.

Fig. 1.

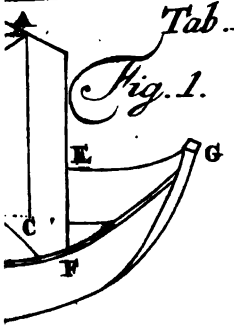


Fig. 2.

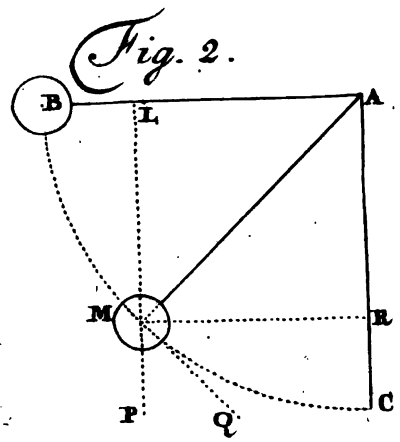


Fig. 4.

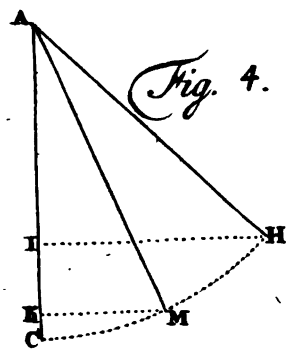
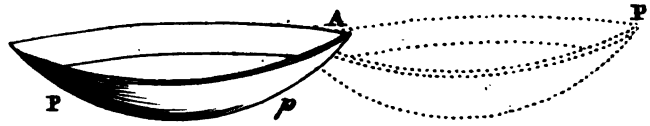
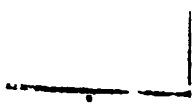


Fig. 5.





H

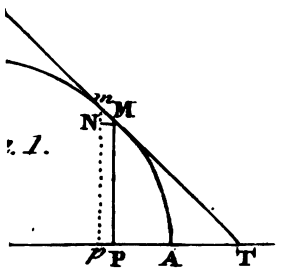


Fig. 2.

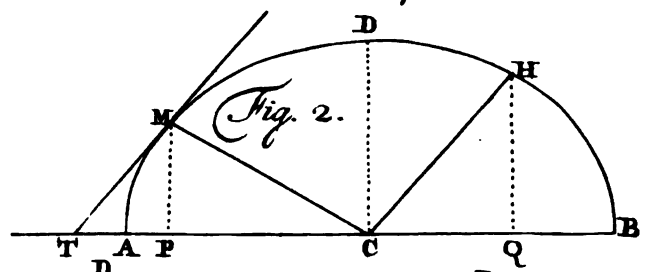


Fig. 4.

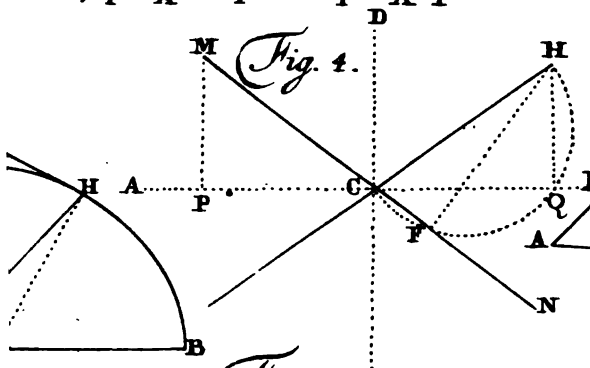


Fig. 6.

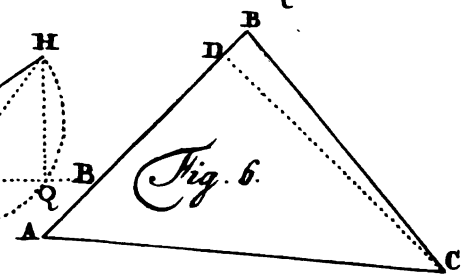


Fig. 11.

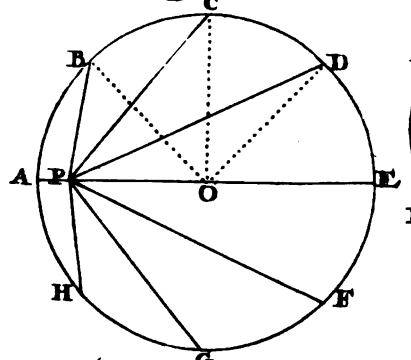


Fig. 5.

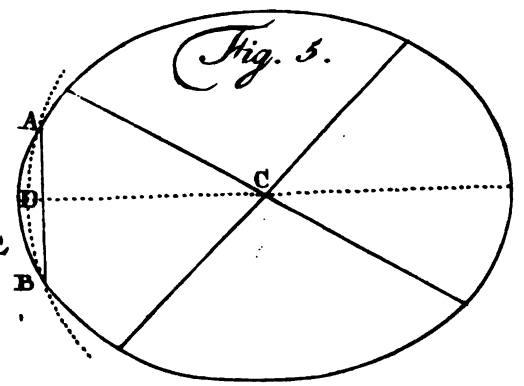
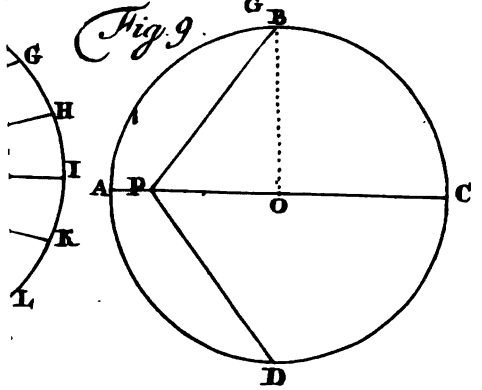


Fig. 9.



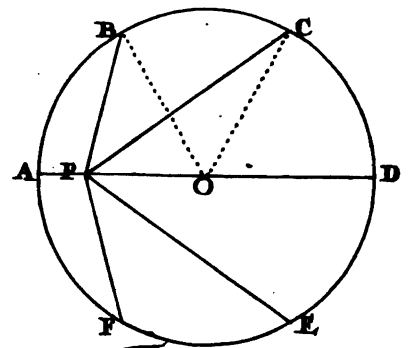
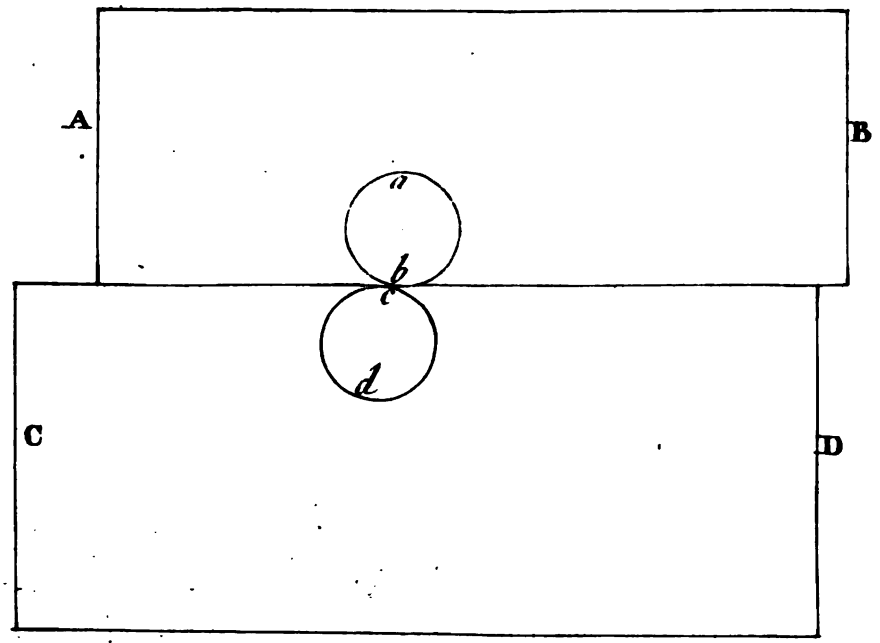
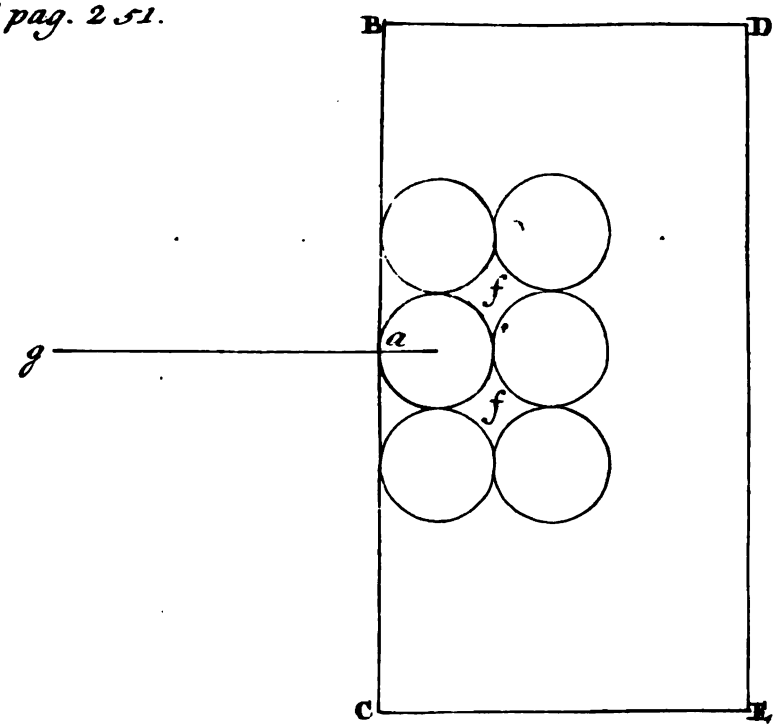


Fig. 10.



ad pag. 251.



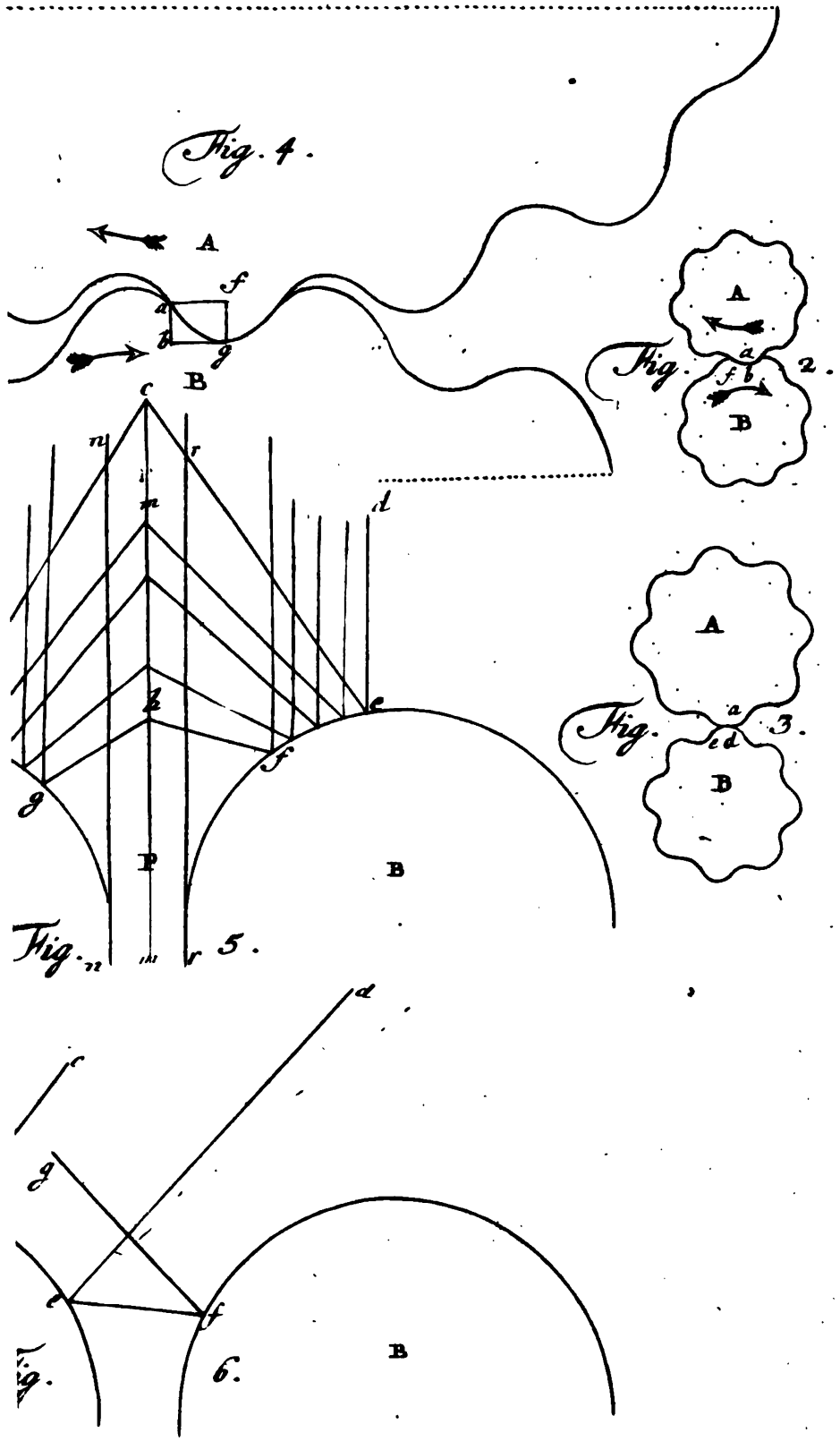


Fig. 4.
A
B
a
b
f
g
Fig. 2.
A
B
a
f b
Fig. 3.
A
B
a
e d
Fig. 5.
c
n
r
m
d
e
f
g
P
B
Fig. 6.
c
d
g
e
f
B

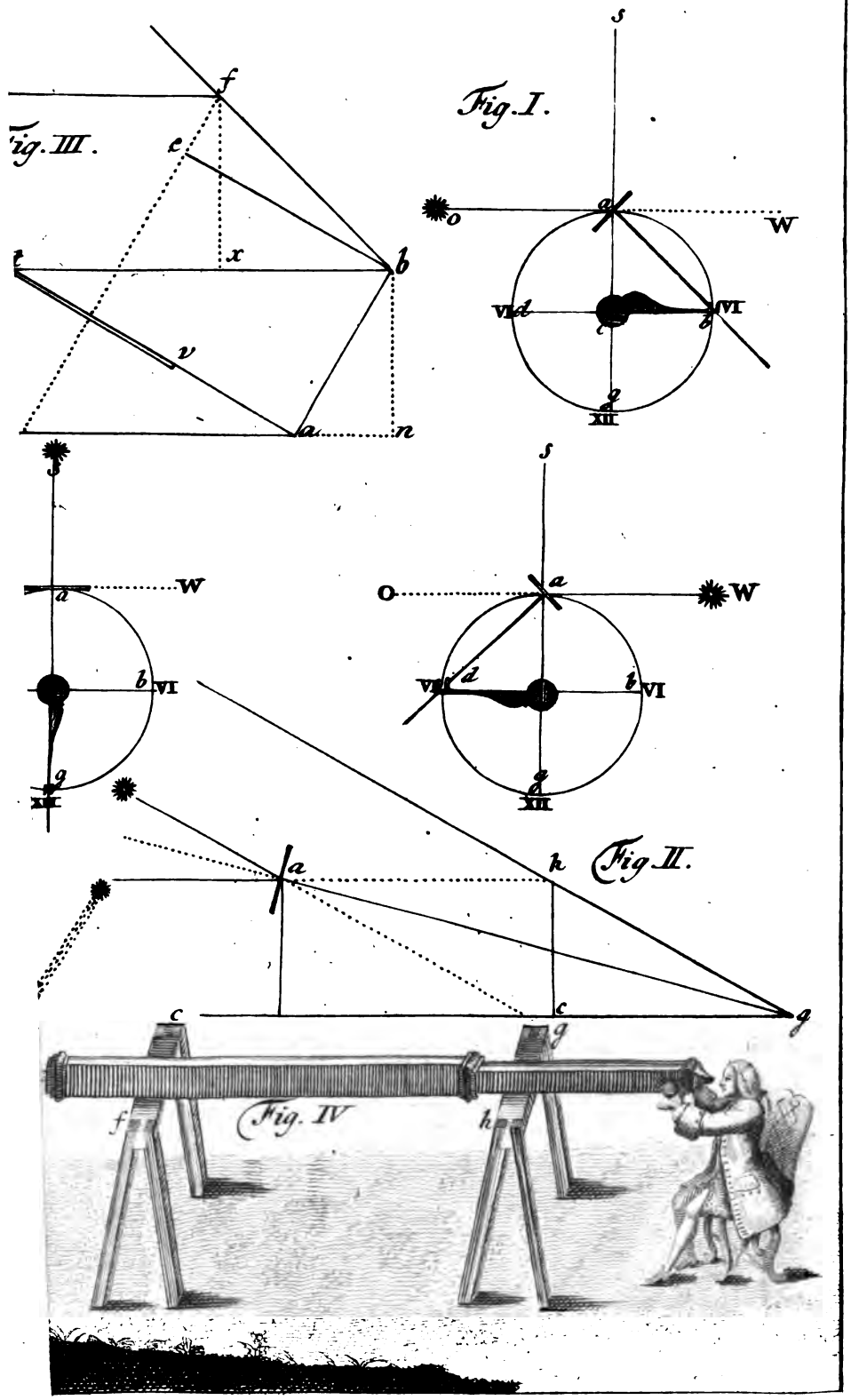
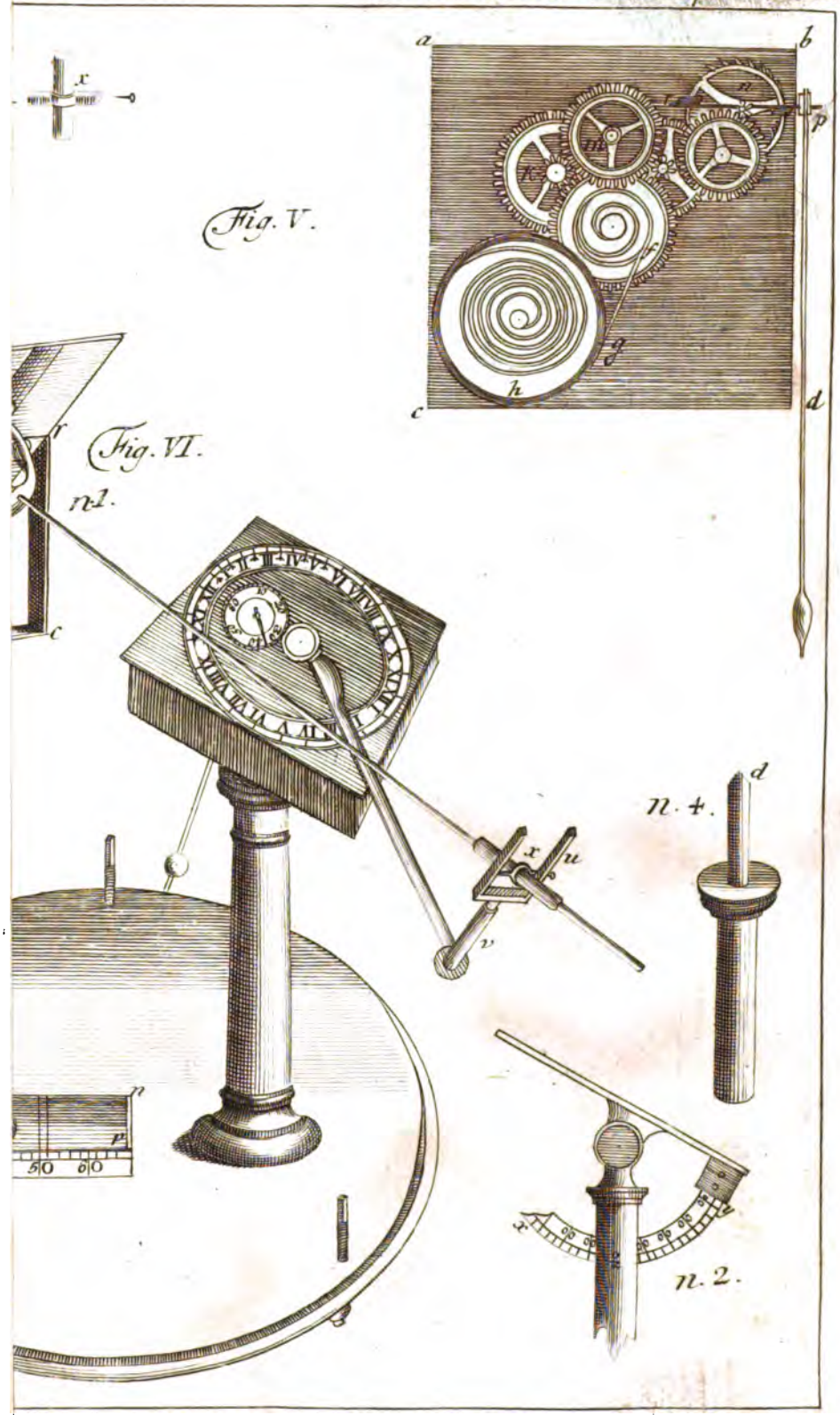
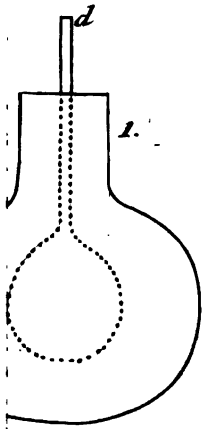


Fig. III.
f
e
x
b
v
a
n
Fig. I.
s
o
a
W
VI
d
c
b
VI
g
XII
s
W
a
b
VI
g
XII
s
O
a
W
VI
d
b
VI
g
XII
Fig. II.
a
h
c
c
g
g
Fig. IV
f
h


x
a
b
p
d
c
h
g
Fig. V.
Fig. VI.
n. 1.
n. 4.
n. 2.


d
1.

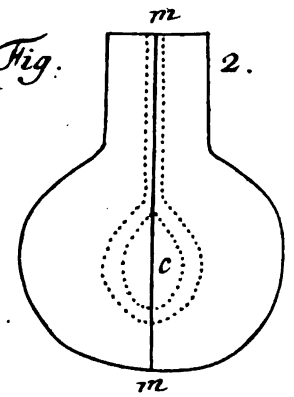
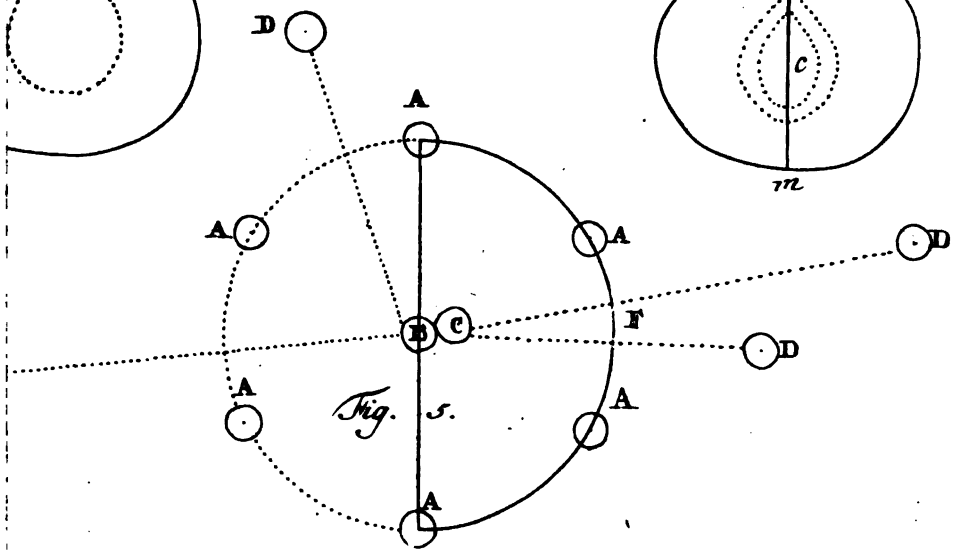
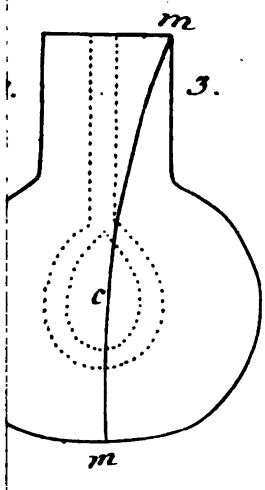


Fig. 2.
m
c
m


D
A
A
A
D
B
C
F
D
A
A
A
Fig. 5.


m
3.
c
m

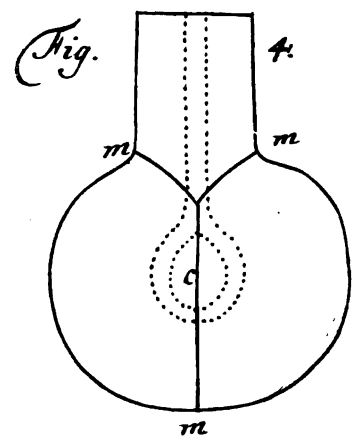


Fig. 4.
m
m
c
m

Fig. 2.

Magnitudines apparentes

3tiæ magn. γ. β.

4tæ ..... η

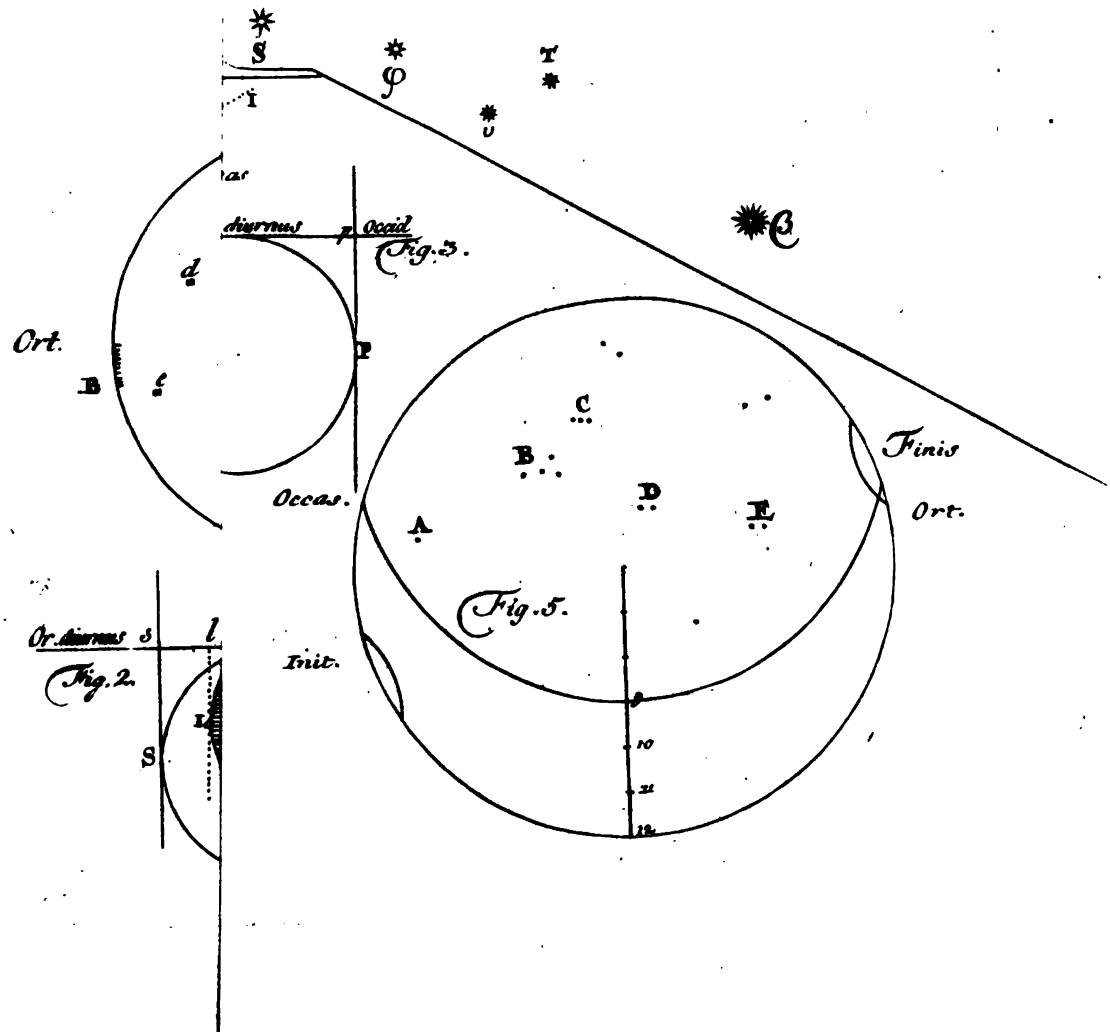
5tæ ..... m. φ. b. h. s. m tamen paulo major reliquis

6tæ ..... g. n. k. N. f. e. c. 2n. n paulo major quam 2n.

7mæ .... i. a. R. Q. S. T. v. d.

reliquæ valde parvæ sunt ita, ut per tubum hollandicum 6. pollicum vix conspici possint, nisi coelum admodum sit serenum.

P et X sunt stellæ variabiles



This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

JUN 6 '55 H

Widener Library
3 2044 092 615 293